THEORETIKUM ZUR MATHEMATIK FÜR BIOPHYSIKER SS 2012

Aufgabenblatt 8 **Datum: 15/06/2012. Abgabe: 22/06/2012**

Aufgabe 1: Entropie (5 Punkte = 1 + 4)

Gegeben sei die Funktion

$$f(x, y) = -k(x \ln x + y \ln y) \tag{1}$$

wobei $k > 0$.

1. Bestimmen Sie den Definitionsbereich von $f(x, y)$.
2. Finden Sie das Maximum dieser Funktion unter der Randbedingung $x + y = 1$.

Aufgabe 2: Differentialgleichungen (11 Punkte = 3 + 5 + 3)

1. Gegeben sei die Differentialgleichung
$$\left(\partial_x^2 + \partial_y^2\right) f(x, y) = 0\ . \tag{2}$$
Bestimmen Sie α, damit die Funktion
$$f(x, y) = (x^2 - y^2)^2 - \alpha x^2 y^2 \tag{3}$$
eine Lösung von Gl. (2) ist. Kann diese Lösung auf die Form $u(x)w(y)$ gebracht werden?
2. Gegeben sei die Differentialgleichung
$$\left(\lambda \partial_t - \partial_x^2\right) \phi(t, x) = 0 \tag{4}$$
wobei $\lambda > 0$. Machen Sie den Separationsansatz $\phi(t, x) = w(t)u(x)$ und lösen Sie die Differentialgleichung unter der Annahme, dass $w(t \to \infty) = 0$. Bestimmen Sie auch die Lösung für die Anfangsbedingung $\phi(0, x) = \cos(2x)$.
3. Gegeben sei die Differentialgleichung
$$\left(c^{-2} \partial_t^2 - \partial_x^2\right) \phi(t, x) = 0\ . \tag{5}$$
Machen Sie den Separationsansatz $\phi(t, x) = w(t)u(x)$ und lösen Sie die Differentialgleichung. Zeigen Sie, dass es möglich ist, die gefundenen Lösungen in die Form
$$\phi(t, x) = f(x - ct) + g(x + ct) \tag{6}$$
umschreiben zu können.

Aufgabe 3: Die kleinste nichttriviale Gruppe (4 Punkte)

Gegeben sei die Menge $M = \{a, b\}$, wobei $a \neq b$. Wie muss die interne Operation $\cdot : M \times M \to M$ sein, damit $(M, \cdot)$ eine Gruppe bildet? Bestimmen Sie $a \cdot a$, $a \cdot b$, $b \cdot a$ und $b \cdot b$. Finden Sie auch eine explizite Darstellung dieser Gruppe mit zwei reellen Zahlen und der gewöhnlichen Multiplikation.