THEORETIKUM ZUR MATHEMATIK FÜR BIOPHYSIKER SS 2012

Aufgabenblatt 9 **Datum: 22/06/2012. Abgabe: 29/06/2012**

Aufgabe 1: Gruppen (5 Punkte = 2 + 2 + 1)

In diser Aufgabe werden Mengen berücksichtigt, die aus $N \times N$ reellen Matrizen bestehen.

1. Gegeben sei die Menge $M = \{B$, so dass $\det B \neq 0\ \}$. Zeigen Sie, dass $(M, \cdot)$, wobei $\cdot$ die übliche Multiplikation von Matrizen ist, eine Gruppe bildet. Ist diese Gruppe abelsch?
2. Gegeben sei die Menge $M = \{B$, so dass $B^t B = BB^t = 1$ und $\det B = 1\}$. Zeigen Sie, dass $(M, \cdot)$ eine Gruppe bildet. Ist $(M, +)$, wobei $+$ die Summe von Matrizen darstellt, eine Gruppe?
3. Gegeben sei die Menge $M = \{B$, so dass $B^t B = BB^t = 1$ und $\det B = -1\}$. Bildet $(M, \cdot)$ eine Gruppe?

Aufgabe 2: detB und TrA (4 Punkte)

Gegeben sei die Gleichung

$$B = e^{\theta A} \quad , \tag{1}$$

wobei A und B 2×2 reelle Matrizen sind und θ eine (kleine) reelle Zahl ist.
Beweisen Sie bis zur einschließlich Ordnung θ^2, dass

$$\det B = e^{\theta TrA} \quad . \tag{2}$$

Aufgabe 3: Mischung (8 Punkte = 3 + 3 + 2)

Gegeben sei

$$f(x, y) = \frac{1}{2}a^2x^2 + \frac{1}{2}b^2x^2 + \alpha xy. \tag{3}$$

1. Führen Sie explizit die Koordinatentransformation

$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \tag{4}$$

   durch. Wie lautet $f(x(u, v), y(u, v))$ als Funktion von u und v?

2. Bestimmen Sie $\tan 2\theta$, so dass $f(x(u, v), y(u, v))$ *keinen* Term proportional zu uv enthält. Es muss also gelten:

$$f(x(u, v), y(u, v)) = \frac{1}{2}\tilde{a}^2u^2 + \frac{1}{2}\tilde{b}^2v^2 \ . \tag{5}$$

   Bestimmen Sie in diesem Fall auch $\tilde{a}^2$ und $\tilde{b}^2$.

3. Unter welcher Bedingung ist der Mischungswinkel $\theta = 45°$?

Aufgabe 4: Inverse (3 Punkte)

Gegeben sei die $N \times N$ symmetrische Matrix A. Sei B die Matrix der Gruppe $SO(N)$, die A diagonalisiert:

$$B^t AB = D \ ,$$

wobei $D = diag\{\lambda_1, ...\lambda_N\}$ die Diagonale Matrix mit den Eigenwerten ist. Bestimmen Sie die Inverse A^{-1} der Matrix A als Funktion von B und D^{-1}.