

Physik der sozio-ökonomischen Systeme *mit dem Computer*

*PC-POOL RAUM 01.120
JOHANN WOLFGANG GOETHE UNIVERSITÄT
23.11.2018*

MATTHIAS HANAUSKE

*FRANKFURT INSTITUTE FOR ADVANCED STUDIES
JOHANN WOLFGANG GOETHE UNIVERSITÄT
INSTITUT FÜR THEORETISCHE PHYSIK
ARBEITSGRUPPE RELATIVISTISCHE ASTROPHYSIK
D-60438 FRANKFURT AM MAIN
GERMANY*

6. Vorlesung

Allgemeines zur Vorlesung

- Ort und Zeit:
PC-Pool Raum 01.120, immer freitags von 15.00 bis 17.00 Uhr
- Vorlesungs-Materialien:
<http://th.physik.uni-frankfurt.de/~hанаuske/VPSOC/>
- Aufgaben auf der Online-Lernplattform Lon Capa:
<http://lon-capa.server.uni-frankfurt.de/>
- Plan für die heutige Vorlesung:
Wiederholung (Klassifizierung von unsymmetrischen (2x2)-Spielen (Bi-Matrix Spiele)), Evolution von (2x3)-Spielen, Maple und Python Programme, Zusammenfassung von Teil I, Kursprojekte im Teil I, Einführung in Teil II, Network Science and Graph Theory

Symmetriebedingung der Auszahlungsmatrizen

	Spieler 2 wählt Strategie 1	Spieler 2 wählt Strategie 2
Spieler 1 wählt Strategie 1	$(\$_{11}^1, \$_{11}^2)$	$(\$_{12}^1, \$_{12}^2)$
Spieler 1 wählt Strategie 2	$(\$_{21}^1, \$_{21}^2)$	$(\$_{22}^1, \$_{22}^2)$

Auszahlungsmatrix des zweiten Spielers:

$$\hat{\$}^2 = \begin{pmatrix} \$_{11}^2 & \$_{12}^2 \\ \$_{21}^2 & \$_{22}^2 \end{pmatrix}$$

Auszahlungsmatrix des ersten Spielers:

$$\hat{\$}^1 = \begin{pmatrix} \$_{11}^1 & \$_{12}^1 \\ \$_{21}^1 & \$_{22}^1 \end{pmatrix}$$

Symmetriebedingung:

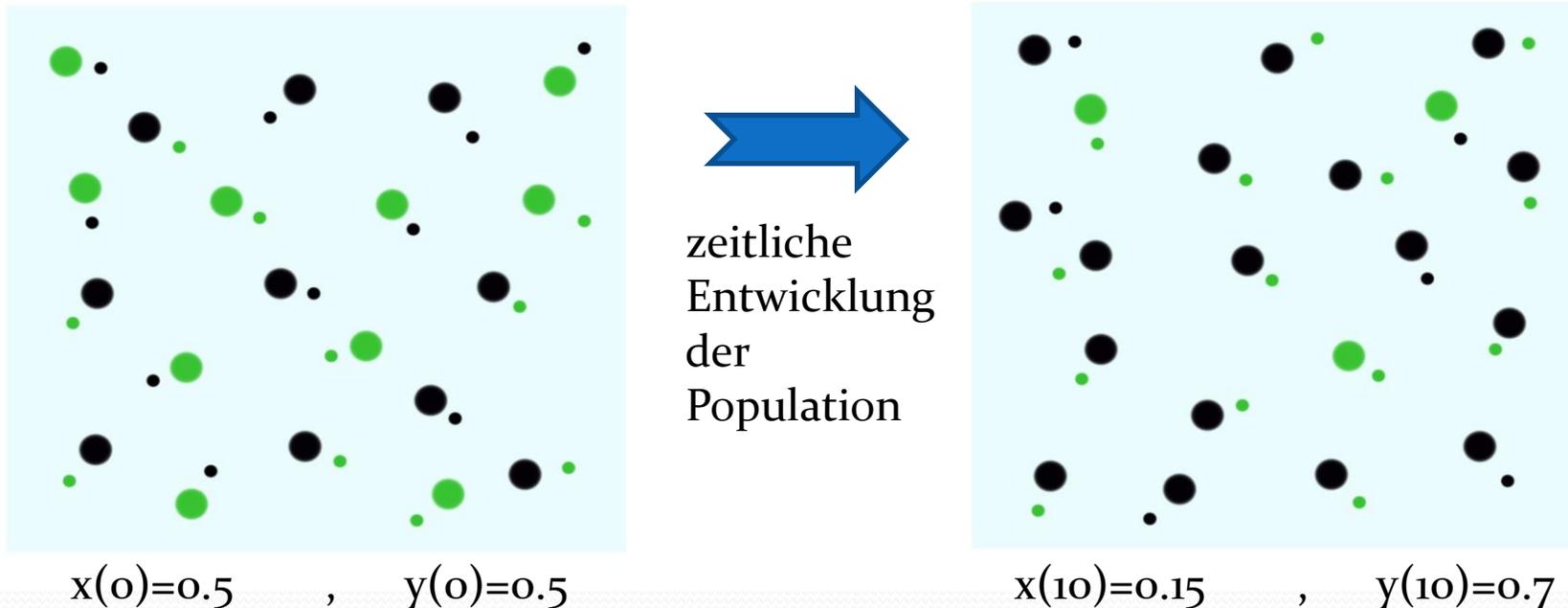
$$(\hat{\$}^2)^T = \begin{pmatrix} \$_{11}^2 & \$_{21}^2 \\ \$_{12}^2 & \$_{22}^2 \end{pmatrix} \stackrel{!}{=} \begin{pmatrix} \$_{11}^1 & \$_{12}^1 \\ \$_{21}^1 & \$_{22}^1 \end{pmatrix} = \hat{\1$

Transponierte Matrix

Evolutionäre Spieltheorie (I)

Unsymmetrische (2x2)-Spiele (Bimatrixspiele)

Bei unsymmetrischen (2x2)-Spiele besteht die zugrundeliegende Population aus zwei Gruppen (hier große und kleine Kreise). Aufgrund der unterschiedlichen Auszahlungsmatrizen können die Populationsgruppen sich in ihren Strategieentscheidungen (**grün**, schwarz) unterschiedlich entwickeln.

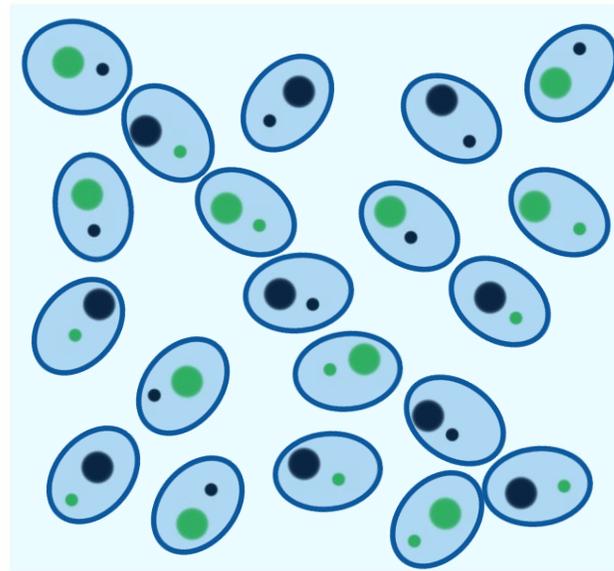


Mögliche Strategien: (**grün**, schwarz), Parameter t stellt die „Zeit“ dar.
 $x(t)$: Anteil der großen Spieler, die im Zeitpunkt t die Strategie „**grün**“ spielen.
 $y(t)$: Anteil der kleinen Spieler, die im Zeitpunkt t die Strategie „**grün**“ spielen.

Evolutionäre Spieltheorie (II)

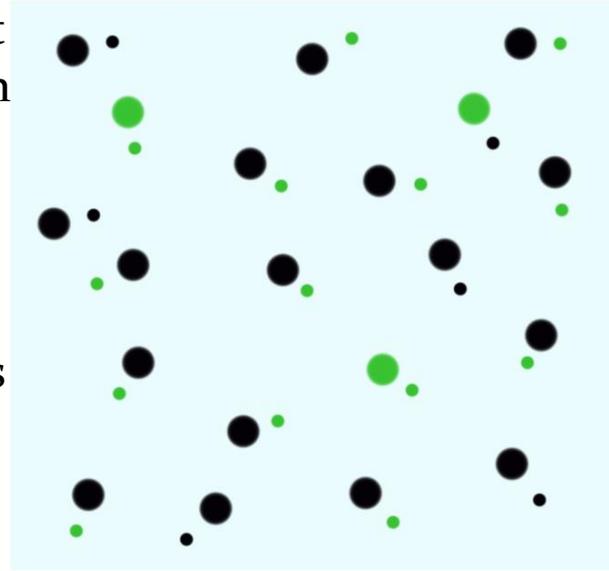
Unsymmetrische (2x2)-Spiele (Bimatrixspiele)

Die einzelnen Akteure innerhalb der betrachteten gesamten Population spielen ein andauernd sich wiederholendes Spiel miteinander, wobei sich jeweils zwei Spieler mit unterschiedlichen Gruppenzugehörigkeiten zufällig treffen, das Spiel spielen und danach zu dem nächsten Spielpartner der anderen Gruppe wechseln.



$x(10)=0.5$, $y(10)=0.5$

Die Anfangspopulation von Spielern spielt zum Zeitpunkt $t=0$ das erste Mal das Spiel. Es bilden sich stets Zweier-Gruppen aus großen und kleinen Kreisen.



$x(10)=0.15$, $y(10)=0.7$

Das evolutionäre Spiel schreitet voran und die grüne Strategie wird für die kleinen Spieler zunehmend attraktiver ($y(10)=0.7$), wohingegen sie für die großen Spieler zunehmend weniger attraktiv wird ($x(10)=0.15$).

$$\begin{aligned}
\frac{dx_i^A(t)}{dt} &= \left[\underbrace{\sum_{l=1}^{m_B} \$_{il}^A x_l^B(t)}_{\text{Fitness der Strategie i}} - \underbrace{\sum_{l=1}^{m_B} \sum_{k=1}^{m_A} \$_{kl}^A x_k^A(t) x_l^B(t)}_{\text{Durchschn. Fitness der Population A}} \right] x_i^A(t) \quad (1) \\
\frac{dx_j^B(t)}{dt} &= \left[\underbrace{\sum_{l=1}^{m_A} \$_{lj}^B x_l^A(t)}_{\text{Fitness der Strategie j}} - \underbrace{\sum_{l=1}^{m_A} \sum_{k=1}^{m_B} \$_{lk}^B x_l^A(t) x_k^B(t)}_{\text{Durchschn. Fitness der Population B}} \right] x_j^B(t) \quad ,
\end{aligned}$$

wobei $x_i^A(t)$, $i = 1, 2, \dots, m_A$ und $x_j^B(t)$, $j = 1, 2, \dots, m_B$ die Anteile der in den Spielergruppen A und B zur Zeit t gewählten Strategien widerspiegeln und in der Soziobiologie den Frequenzen der *Quasispezies* entsprechen.

Bi-Matrix Spiele

*unsymmetrische (2x2)-Spiele,
zwei unterscheidbare Populationsgruppen*

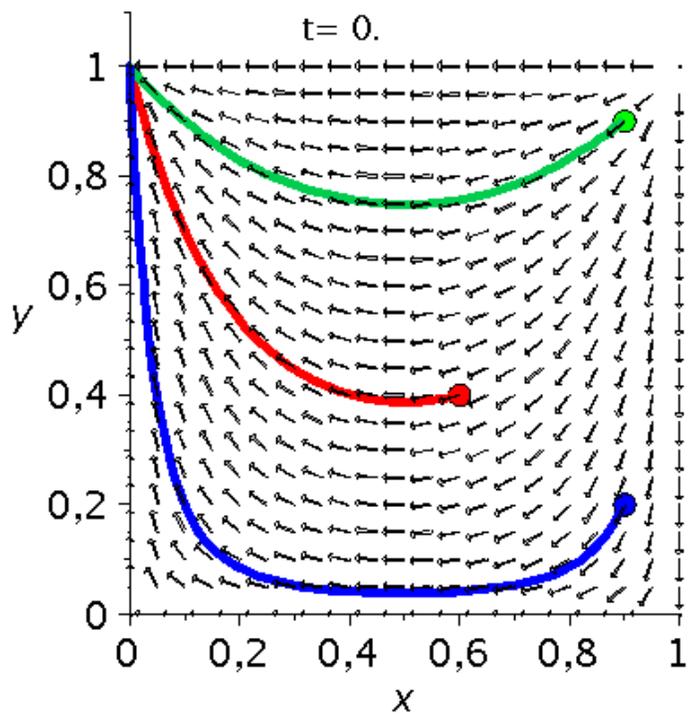
Wir beschränken uns im folgenden auf den 2-Strategien Fall ($m_A = m_B = 2$), lassen jedoch weiter eine Unsymmetrie der Auszahlungsmatrix zu. Die beiden Komponenten der zweidimensionalen gruppenspezifischen Populationsvektoren lassen sich dann, aufgrund ihrer Normalisierungsbedingung, auf eine Komponente reduzieren ($x_2^A = 1 - x_1^A$ und $x_2^B = 1 - x_1^B$). Das zeitliche Verhalten der Komponenten der Populationsvektoren (Gruppe A: $x(t) := x_1^A(t)$ und Gruppe B: $y(t) := x_1^B(t)$) wird in der Reproduktionsdynamik mittels des folgenden Systems von Differentialgleichungen beschrieben (siehe z.B. [4], S:116 oder [3], S:69):

$$\begin{aligned} \frac{dx(t)}{dt} &= [(\$_{11}^A + \$_{22}^A - \$_{12}^A - \$_{21}^A) y(t) + (\$_{12}^A - \$_{22}^A)] \left(x(t) - (x(t))^2 \right) =: g_A(x, y) \quad (2) \\ \frac{dy(t)}{dt} &= [(\$_{11}^B + \$_{22}^B - \$_{12}^B - \$_{21}^B) x(t) + (\$_{12}^B - \$_{22}^B)] \left(y(t) - (y(t))^2 \right) =: g_B(x, y) \end{aligned}$$

Klassifizierung von Bi-Matrix Spielen

Eckspiele

Die Spielklasse der Gruppe A
oder der Gruppe B ist ein
Dominantes Spiel



Sattelspiele

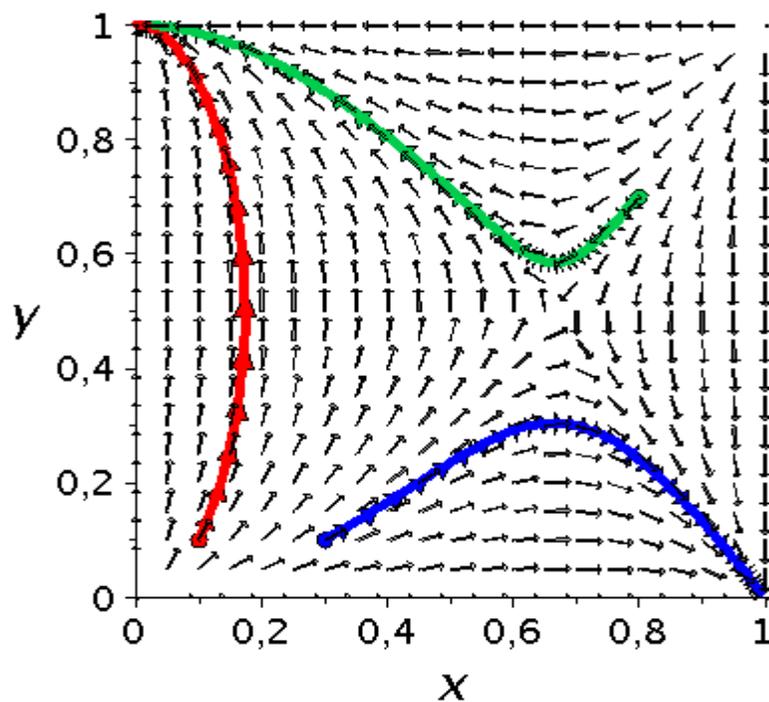
Spiel A: Koordinationsspiel

Spiel B: Koordinationsspiel

oder

Spiel A: Anti-Koordinationsspiel

Spiel B: Anti-Koordinationsspiel



Zentrumsspiele

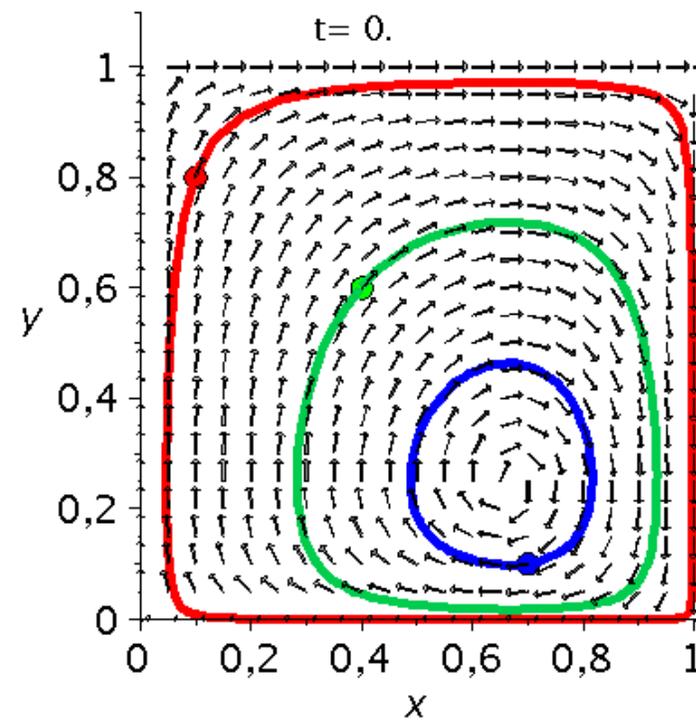
Spiel A: Koordinationsspiel

Spiel B: Anti-Koordinationsspiel

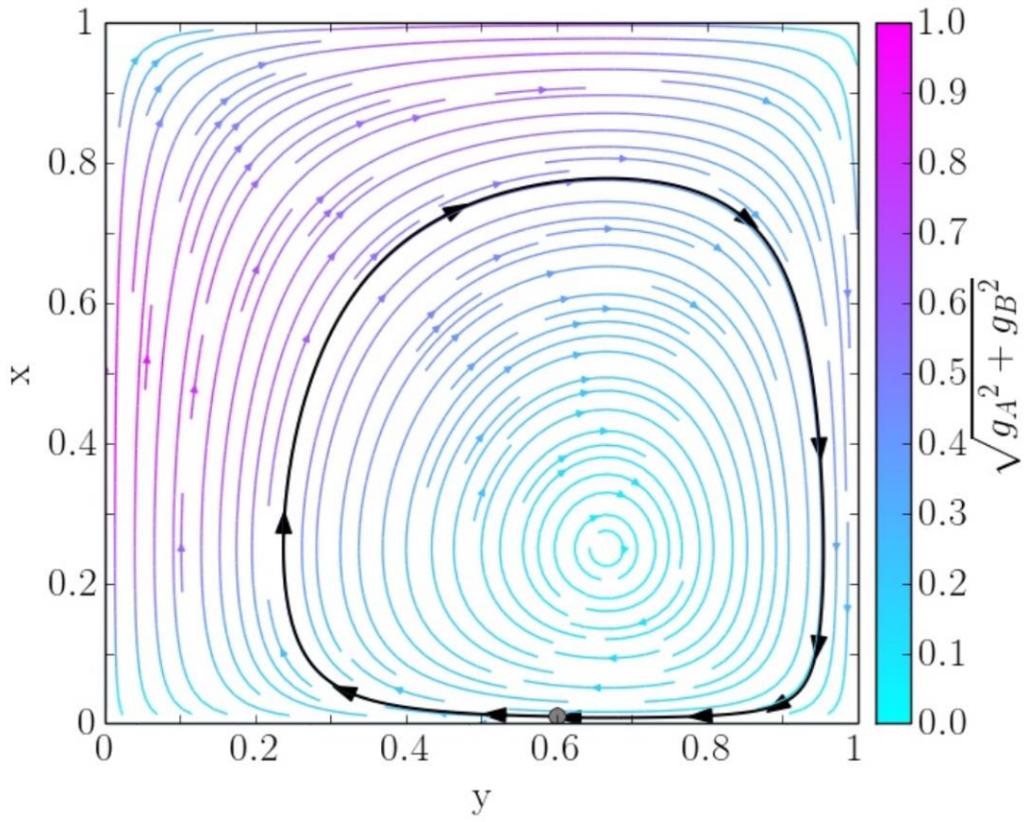
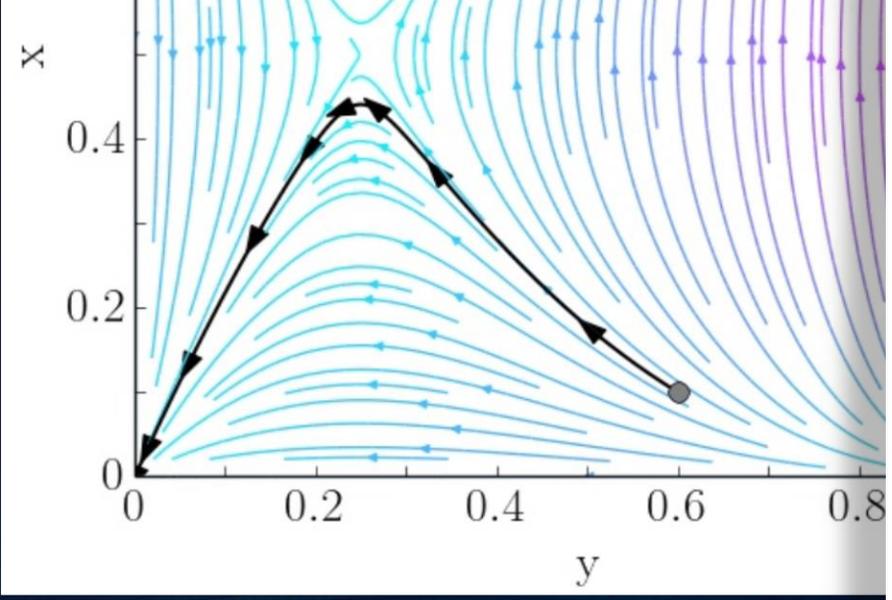
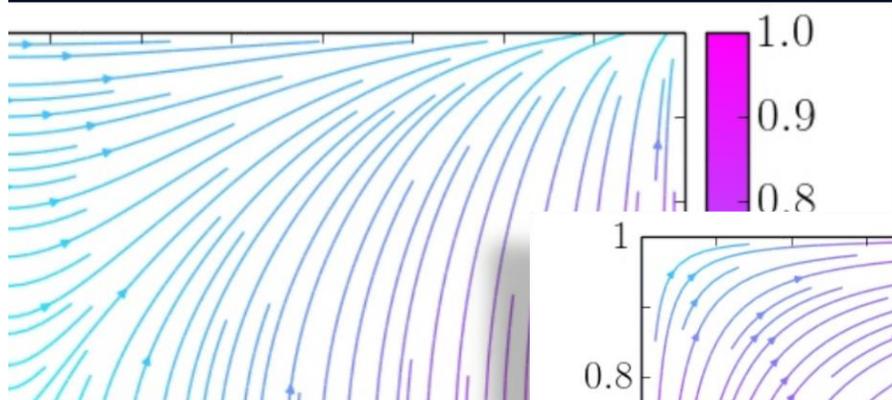
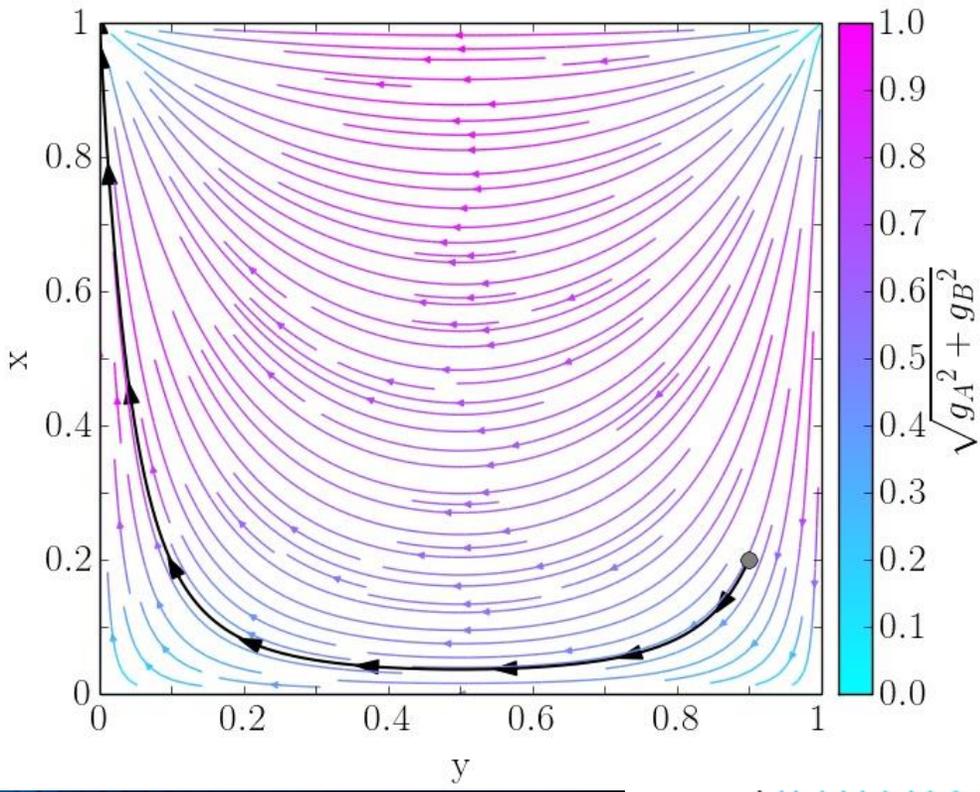
oder

Spiel A: Anti-Koordinationsspiel

Spiel B: Koordinationsspiel



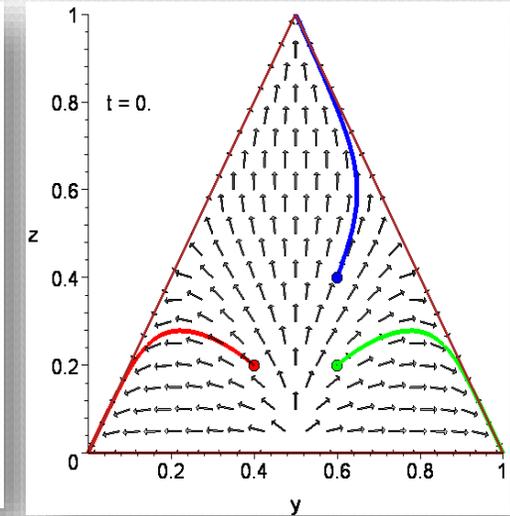
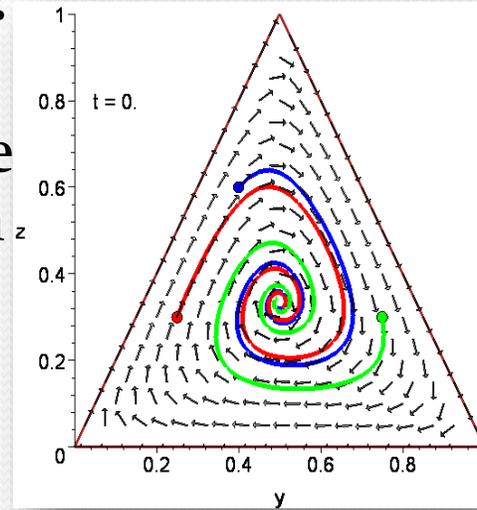
Bi-Matrix Spiele mit Python Version bimatrix1.py



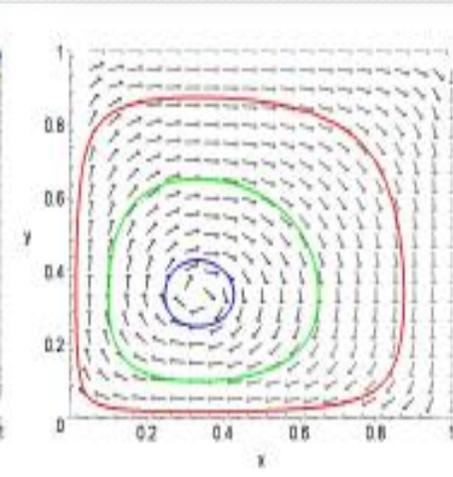
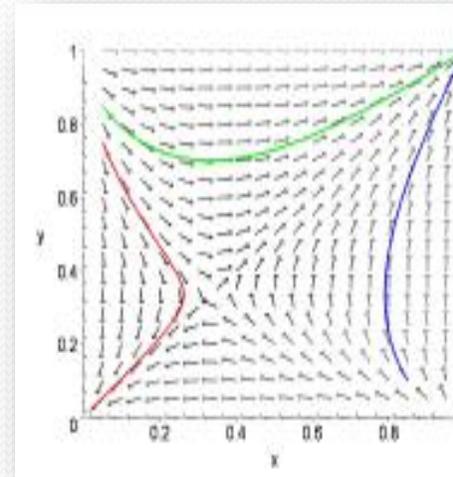
Weitere Arten von Spieltypen

(Ausblick: Vorlesungsteil 5)

- **Mehr als zwei Strategien:**
Schon bei drei Strategien können 19 unterschiedliche Spielklassen unterschieden werden.



- **Bimatrix Spiele**
Unsymmetrische (2x2) Spiele:
Setzt sich die Population aus zwei unterschiedlichen Spielergruppen ($x(t)$ und $y(t)$) zusammen, so spricht man von Bimatrix Spielen.



Replikatorodynamik (2xM)-Spiele

Wir beschränken uns zunächst auf symmetrische (2xM)-Spiele, d.h. zwei Personen - M Strategien Spiele. Da es sich um symmetrische Spiele handelt, sind alle Spieler gleichberechtigt und man kann von einer homogenen Population ausgehen. Die Differentialgleichung der Replikatorodynamik beschreibt wie sich die einzelnen Populationsanteile der zur Zeit t gewählten Strategien $x_j(t)$, $j=1,2,\dots,M$ im Laufe der Zeit entwickeln.

$$\dot{x}_j(t) := \frac{dx_j(t)}{dt} = x_j(t) \cdot \left[\underbrace{\sum_{k=1}^M \$_{jk} \cdot x_k(t)}_{\text{Fitness der Strategie } j} - \underbrace{\sum_{l=1}^M \sum_{k=1}^M \$_{kl} \cdot x_k(t) \cdot x_k(t)}_{\text{Durchschnittliche Fitness (Auszahlung) der gesamten Population}} \right]$$

Wobei die Parameter $\$_{kl}$ die einzelnen Einträge in der Auszahlungsmatrix des 1. Spielers darstellen

$$\hat{\$} = \hat{\$}^1 = \begin{pmatrix} \$_{11} & \$_{12} & \$_{13} & \dots & \$_{1M} \\ \$_{21} & \$_{22} & \$_{23} & \dots & \$_{2M} \\ \$_{31} & \$_{32} & \$_{33} & \dots & \$_{3M} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \$_{M1} & \$_{M2} & \$_{M3} & \dots & \$_{MM} \end{pmatrix}$$

Fitness der Strategie j

Durchschnittlicher Erfolg der j-ten Strategie

Durchschnittliche Fitness (Auszahlung) der gesamten Population

Replikatorodynamik

(für symmetrische (2x3)-Spiele)

Wir beschränken uns nun auf symmetrische (2x3)-Spiele, d.h. zwei Personen - 3 Strategien Spiele (M=3). Die Differentialgleichung der Replikatorodynamik vereinfacht sich unter dieser Annahme wie folgt:

$$\frac{dx_j(t)}{dt} = x_j(t) \cdot \left[\sum_{k=1}^3 \$_{jk} \cdot x_k(t) - \sum_{l=1}^3 \sum_{k=1}^3 \$_{kl} \cdot x_k(t) \cdot x_k(t) \right]$$

$$\frac{dx_j}{dt} = x_j \cdot \left[\begin{array}{l} \$_{j1} \cdot x_1 + \$_{j2} \cdot x_2 + \$_{j3} \cdot x_3 - \\ \left(\begin{array}{l} \$_{11} \cdot x_1 \cdot x_1 + \$_{12} \cdot x_1 \cdot x_2 + \$_{13} \cdot x_1 \cdot x_3 + \\ + \$_{21} \cdot x_2 \cdot x_1 + \$_{22} \cdot x_2 \cdot x_2 + \$_{23} \cdot x_2 \cdot x_3 + \\ + \$_{31} \cdot x_3 \cdot x_1 + \$_{32} \cdot x_3 \cdot x_2 + \$_{33} \cdot x_3 \cdot x_3 \end{array} \right) \end{array} \right]$$

$j = 1, 2, 3$

$\overline{\$}$

Replikatorodynamik

(für symmetrische (2x3)-Spiele)

Man erhält ein System von drei gekoppelten Differentialgleichungen:

$$\frac{dx_1}{dt} = x_1 \cdot [\$_{11} \cdot x_1 + \$_{12} \cdot x_2 + \$_{13} \cdot x_3 - \bar{\$}]$$

$$\frac{dx_2}{dt} = x_2 \cdot [\$_{21} \cdot x_1 + \$_{22} \cdot x_2 + \$_{23} \cdot x_3 - \bar{\$}]$$

$$\frac{dx_3}{dt} = x_3 \cdot [\$_{31} \cdot x_1 + \$_{32} \cdot x_2 + \$_{33} \cdot x_3 - \bar{\$}]$$

Das System von Differentialgleichungen lässt sich bei gegebener Auszahlungsmatrix $\hat{\$}$ und Anfangsbedingung $(x_1(0), x_2(0), x_3(0))$ meist nur numerisch (auf dem Computer) lösen. Die Lösungen bestehen dann aus den drei (zeitlich abhängigen) Populationsanteilen $(x_1(t), x_2(t), x_3(t))$.

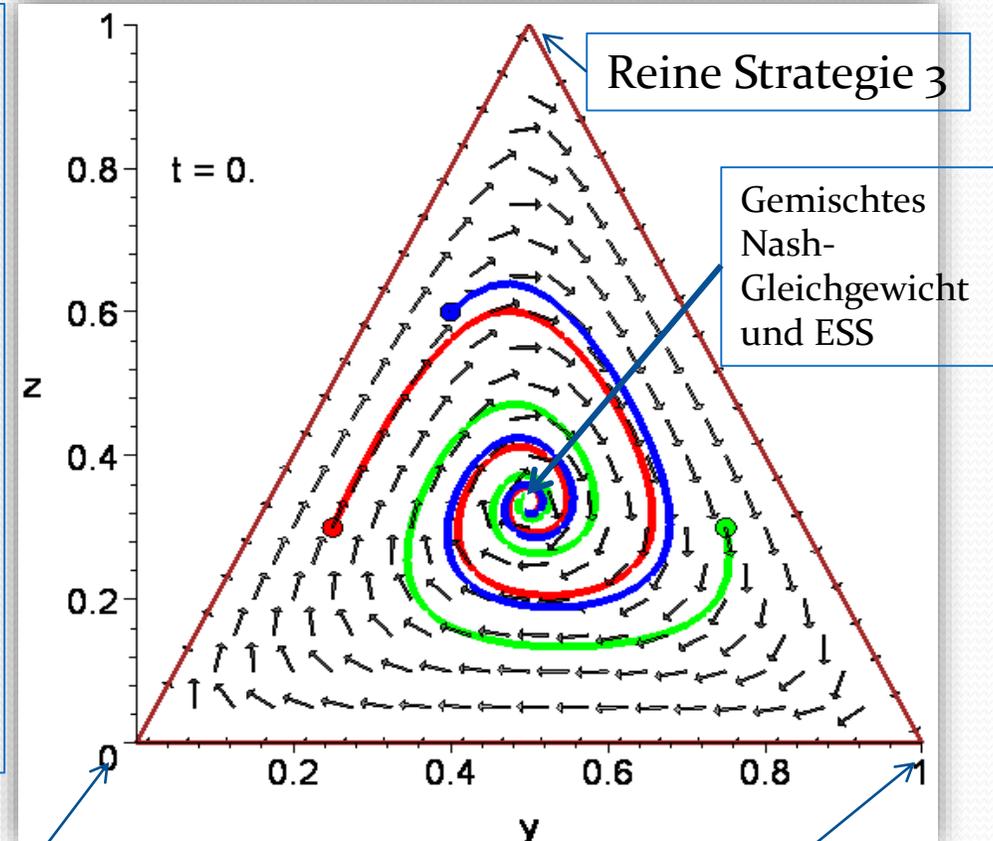
Replikatorodynamik

(für symmetrische (2x3)-Spiele, **Beispiel 1**)

Wir betrachten im Folgenden ein Beispiel eines (2x3)-Spiels mit der rechts angegebenen Auszahlungsstruktur:

	Strategie 1	Strategie 2	Strategie 3
Strategie 1	(0, 0)	(2, -1)	(-1, 2)
Strategie 2	(-1, 2)	(0, 0)	(2, -1)
Strategie 3	(2, -1)	(-1, 2)	(0, 0)

Die rechte Abbildung zeigt die zeitliche Entwicklung der relativen Populationsanteile der gewählten Strategien für drei mögliche Anfangsbedingungen. Die einzige evolutionär stabile Strategie dieses Beispiels befindet sich beim gemischten Nash-Gleichgewicht $(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3})$. Die einzelnen Pfeile im Dreieck veranschaulichen den durch die Spielmatrix bestimmten Strategien-„Richtungswind“, dem die Population zeitlich folgen wird.



Reine Strategie 1

Reine Strategie 2

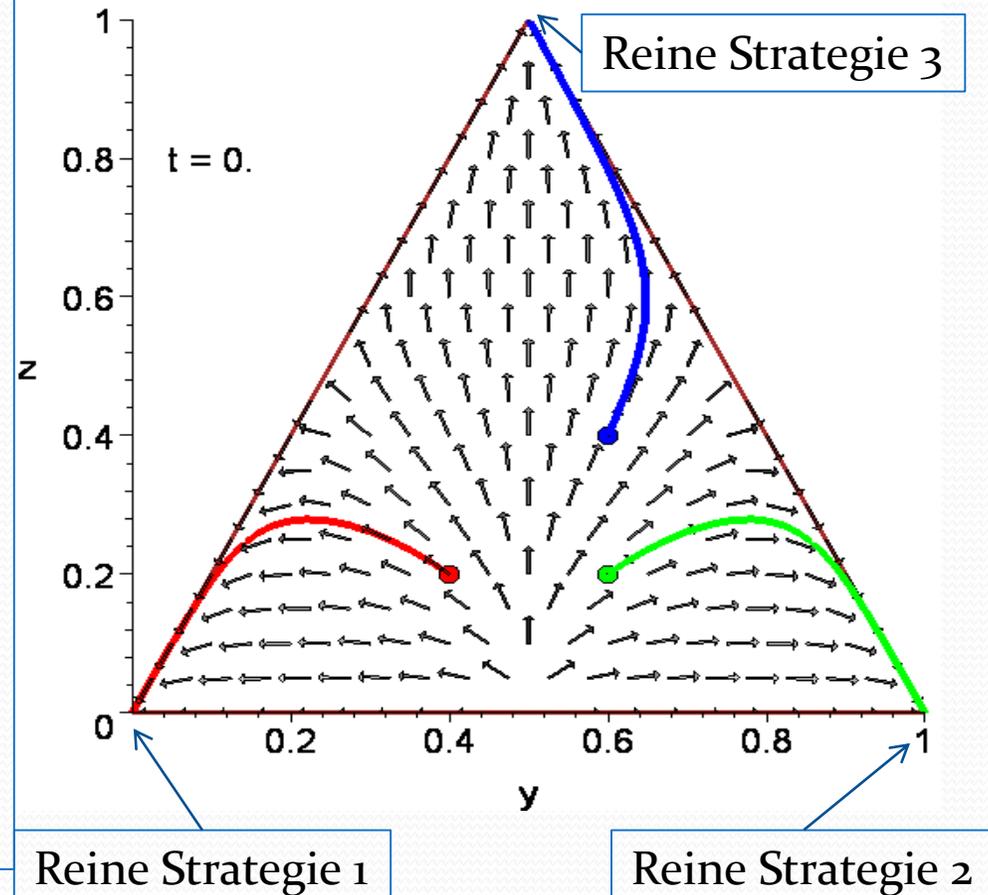
Replikatorodynamik

(für symmetrische (2x3)-Spiele, **Beispiel 2**)

Wir betrachten im Folgenden ein Beispiel eines (2x3)-Spiels mit der rechts angegebenen Auszahlungsstruktur:

	Strategie 1	Strategie 2	Strategie 3
Strategie 1	(0, 0)	(-3, -3)	(-1, -1)
Strategie 2	(-3, -3)	(0, 0)	(-1, -1)
Strategie 3	(-1, -1)	(-1, -1)	(0, 0)

Die rechte Abbildung zeigt die zeitliche Entwicklung der relativen Populationsanteile der gewählten Strategien für drei mögliche Anfangsbedingungen. Das Spiel besitzt drei Nash-Gleichgewichte in reinen Strategien, die ebenfalls evolutionär stabile Strategien darstellen. Welche der drei ESS die Population realisiert hängt von dem Anfangswert der Populationsanteile ab. Die zeitliche Entwicklung folgt wieder dem Strategien-„Richtungswind“ der zugrundeliegenden Auszahlungsmatrix.

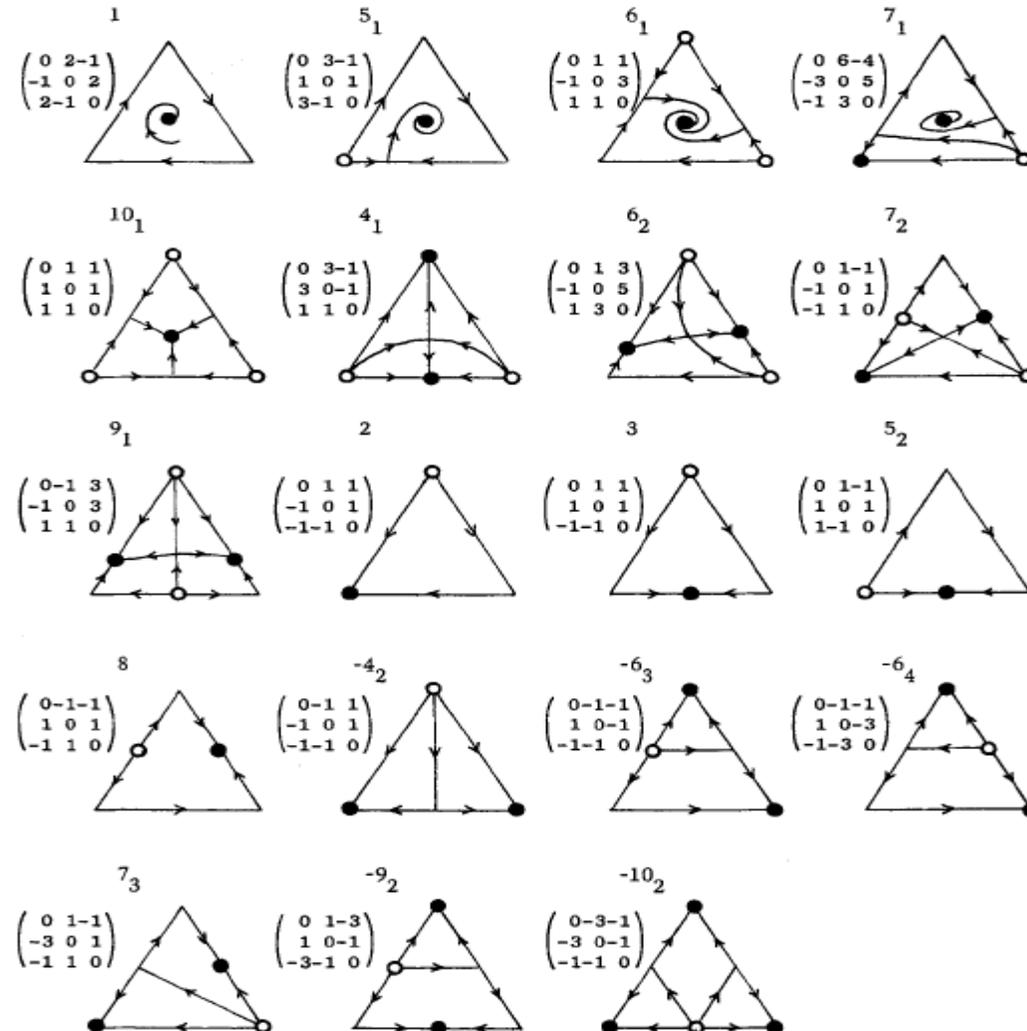


Replikatordynamik

(Klassifizierung symmetrische (2x3)-Spiele)

E. C. Zeeman, *POPULATION DYNAMICS FROM GAME THEORY*,
In: *Global Theory of Dynamical Systems*, Springer 1980

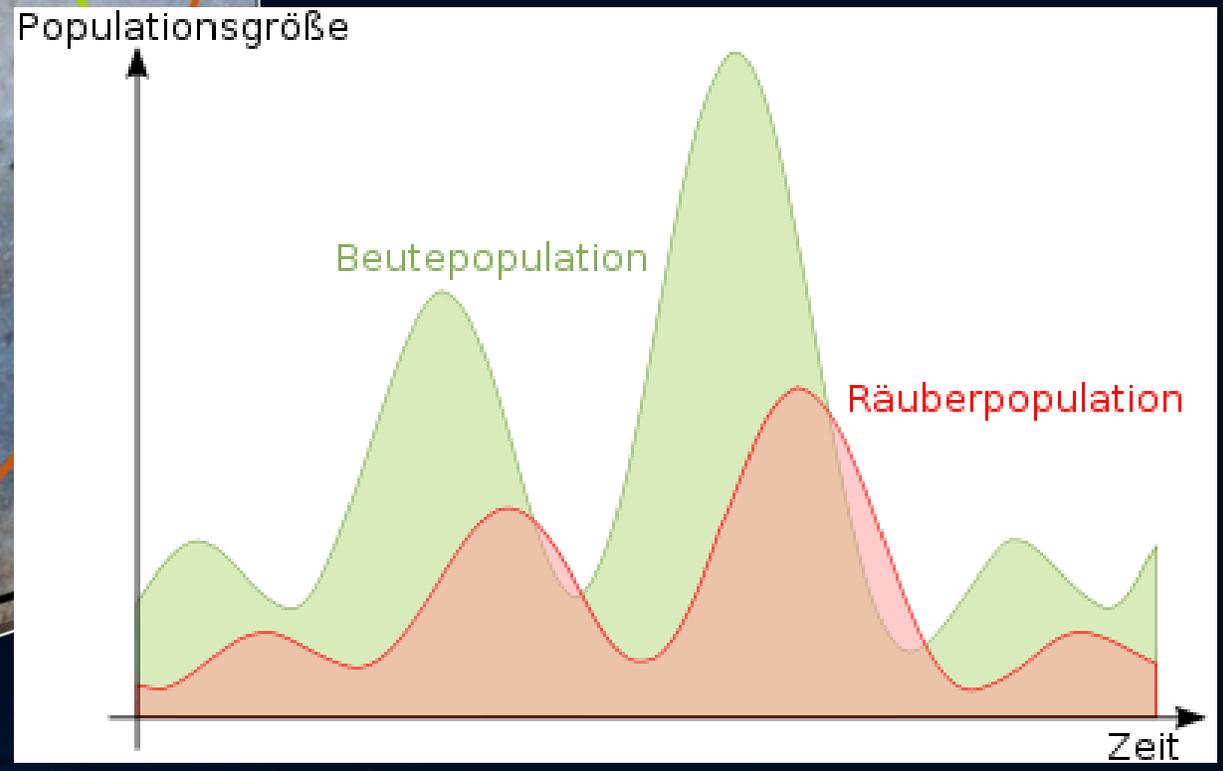
E. C. Zeeman zeigt in seinem im Jahre 1980 veröffentlichten Artikel, dass man evolutionäre, symmetrische (2x3)-Spiele in 19 Klassen einteilen kann. Die Abbildung rechts zeigt das evolutionäre Verhalten dieser 19 Spieltypen. Die ausgefüllten schwarzen Punkte markieren die evolutionär stabilen Strategien der jeweiligen Spiele. Es gibt Spielklassen, die besitzen lediglich eine ESS und Klassen die sogar drei ESS besitzen.



Räuber-Beute-Beziehung



Das Räuber-Beute Spiel



Die Lotka-Volterra-Gleichung (Räuber-Beute-Gleichung) für N-Populationen

Anzahl der Räuber/Beute Wesen
der i-ten Population zur Zeit t

$$\frac{dx_i(t)}{dt} = \left(r_i + \sum_{j=1}^N b_{ij} x_j(t) \right) x_i(t)$$

Reproduktions-
bzw. Sterberaten

Interaktionsmatrix

I.2.6 Mögliche Projekte im Teil I

Projekt I: Spielklassen symmetrischer (2x3)-Spiele

E. C. Zeeman zeigt in seinem im Jahre 1980 veröffentlichten Artikel, dass man evolutionäre, symmetrische (2x3)-Spiele in 19 Klassen einteilen kann. Es gibt Spielklassen, die besitzen lediglich eine evolutionär stabile Strategie und Klassen die sogar drei evolutionär stabile Strategien besitzen. (siehe E.C. Zeeman, POPULATION DYNAMICS FROM GAME THEORY, In: Global Theory of Dynamical Systems, Springer 1980). Stellen Sie Beispiele dieser Spielklassen mittels eines Maple Worksheets oder eines Python Skriptes dar. Das folgende Maple Worksheet kann Ihnen dabei helfen ([View Maple Worksheet](#), [Download Maple Worksheet](#)).

Projekt II: Äquivalenz der Räuber-Beute-Gleichung für 2-Populationen mit der Replikatorodynamik der evolutionären Spieltheorie für 3 Strategien

Stellen Sie die Äquivalenz der Räuber-Beute-Gleichung für 2-Populationen mit einem evolutionären Spiel mit 3 Strategien mittels eines Maple Worksheets oder eines Python Skriptes dar.

Anwendungsfelder der evolutionären Spieltheorie (I)

- **Biologie**

- **Verteilung von Bakterien in Organismen**

Siehe z.B.: Kerr, Feldmann, Nature 2002

- **Kooperation von Virus-Populationen**

Siehe z.B.: Turner, Chao, Nature 1999

- **Paarungsstrategien von Eidechsen**

Siehe z.B.: Sinervo, Hazard, Nature 1996

- **Evolutionäre Entwicklung von Makromolekülen**

Siehe z.B.: Eigen, Schuster, Naturwissenschaften 64, 1977

Anwendungsfelder der evolutionären Spieltheorie (II)

- **Ökonomie**

- **„Public Goods“- (Öffentliches Gut)- Spiele**

- **Trust in Private and Common Property Experiments**, Elinor Ostrom, et al.
- **Evolutionary Dynamics in Public Good Games**, CHRISTIANE CLEMENS and THOMAS RIECHMANN, Computational Economics (2006) 28: 399–420
- **Institution Formation in Public Goods Games**, Michael Kosfeld, Akira Okada, and Arno Riedl, American Economic Review 2009, 99:4, 1335–1355

- **Experimentelle Ökonomie**

- **Cooperation in PD games: Fear, greed, and history of play**, T.K. AHN, ELINOR OSTROM, DAVID SCHMIDT, ROBERT SHUPP, Public Choice 106: 137–155, 2001.

- **„Behavioral“- Verhaltensökonomie (Altruismus, Empathie, ...)** z.B.: Fehr et al.

- **Evolution von Informationsnetzwerken**

Anwendungsfelder der evolutionären Spieltheorie (III)

- **Sozialwissenschaft**
 - **Kulturelle und moralische Entwicklungen**
 - **Evolution of social learning does not explain the origin of human cumulative culture**, Magnus Enquist, Stefano Ghirlanda, *Journal of Theoretical Biology* 246 (2007) 129–135
 - **EVOLUTION OF MORAL NORMS**, William Harms and Brian Skyrms, *For Oxford Handbook on the Philosophy of Biology* ed. Michael Ruse
 - **Evolution der Sprache**
 - **Finite populations choose an optimal language**, Christina Pawlowitsch, *Journal of Theoretical Biology* 249 (2007) 606–616
 - **Soziales Lernen**
 - **Evolution of social learning does not explain the origin of human cumulative culture**, Magnus Enquist, Stefano Ghirlanda, *Journal of Theoretical Biology* 246 (2007) 129–135
 - **Evolution von sozialen Normen**
 - **Collective Action and the Evolution of Social Norms**, Elinor Ostrom, *The Journal of Economic Perspectives*, Vol. 14, No. 3 (Summer, 2000), pp. 137-158
 - **Evolution von sozialen Netzwerken**
 - **GOVERNING SOCIAL-ECOLOGICAL SYSTEMS**, MARCO A. JANSSEN and ELINOR OSTROM
 - **A General Framework for Analyzing Sustainability of Social-Ecological Systems**, Elinor Ostrom, et al., *Science* 325, 419 (2009)

III.3 Anwendungsfelder der Spieltheorie

III.3.1 Die Wissenschaft als komplexes Netzwerk (Models of Science Dynamics)

III.3.2 Sozio-ökonomische Labor- und Feldexperimente

III.3.3 Anwendungen in der Biologie

III.3.4 Anwendungen in den Politikwissenschaften

III.3.5 Spieltheorie und Auktionskonzepte

III.3.6 Finanzkrisen und evolutionäre Spiele

III.3.7 Sozio-ökonomische Netzwerke

Anwendung zu Projekt Teil I

The rock-paper-scissors game and the evolution of alternative male strategies

B. Sinervo & C. M. Lively

Department of Biology and Center for the Integrative Study of Animal Behavior, Indiana University, Bloomington, Indiana 47405, USA



Evolutionäre
Strategie
(Quasi-Spezies)



Orange

Blau

Gelb

The Rock-Siccor-Paper Game Replicatordynamics and ESS

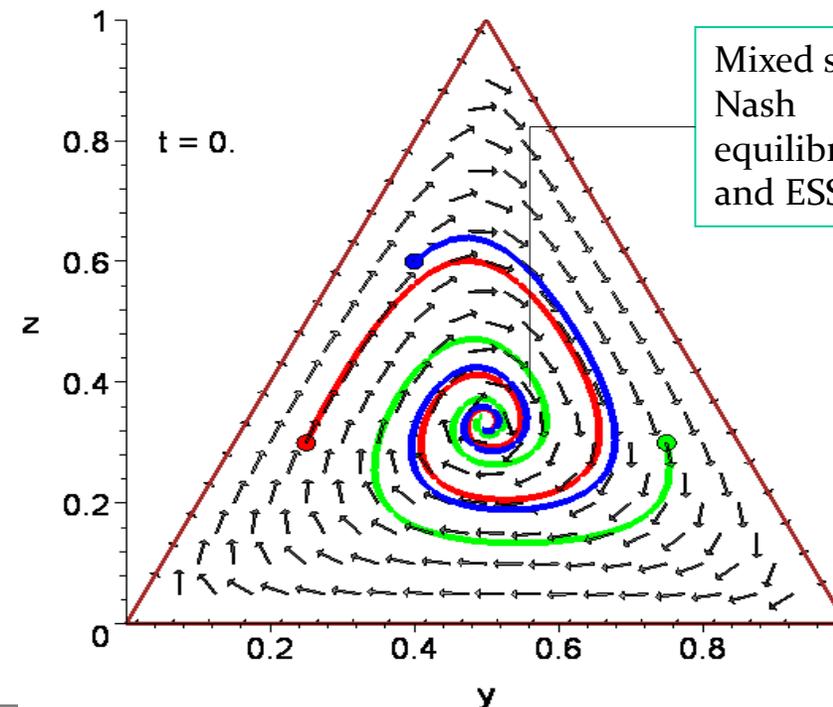
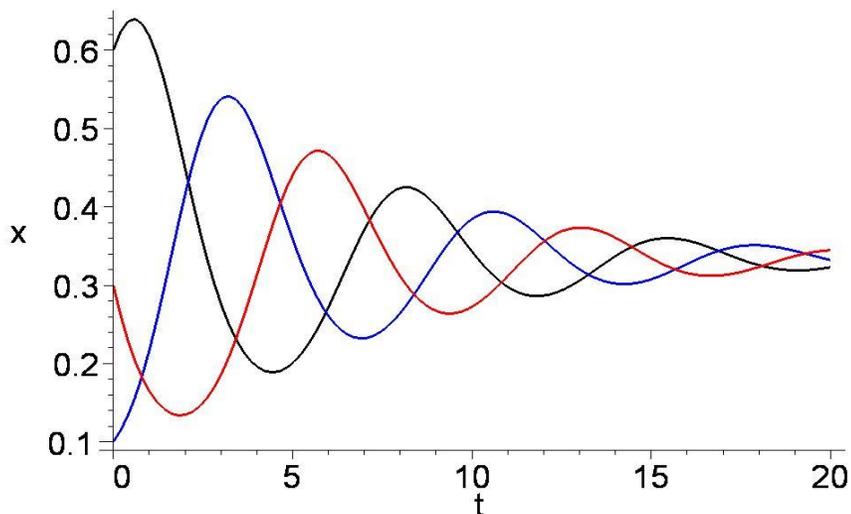
$$\frac{dx_1}{dt} = x_1 \cdot [2 \cdot x_2 - x_3 - \bar{\$}]$$

$$\frac{dx_2}{dt} = x_2 \cdot [-x_1 + 2 \cdot x_3 - \bar{\$}]$$

$$\frac{dx_3}{dt} = x_3 \cdot [2 \cdot x_1 - x_2 - \bar{\$}]$$

with: $\bar{\$} = x_1 \cdot x_2 + x_1 \cdot x_3 + x_2 \cdot x_3$

	Strategie 1	Strategie 2	Strategie 3
Strategie 1	(0, 0)	(1, -1)	(-1, 1)
Strategie 2	(-1, 1)	(0, 0)	(1, -1)
Strategie 3	(1, -1)	(-1, 1)	(0, 0)



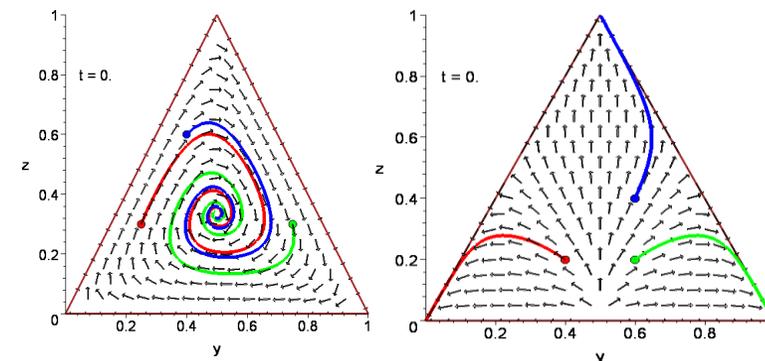
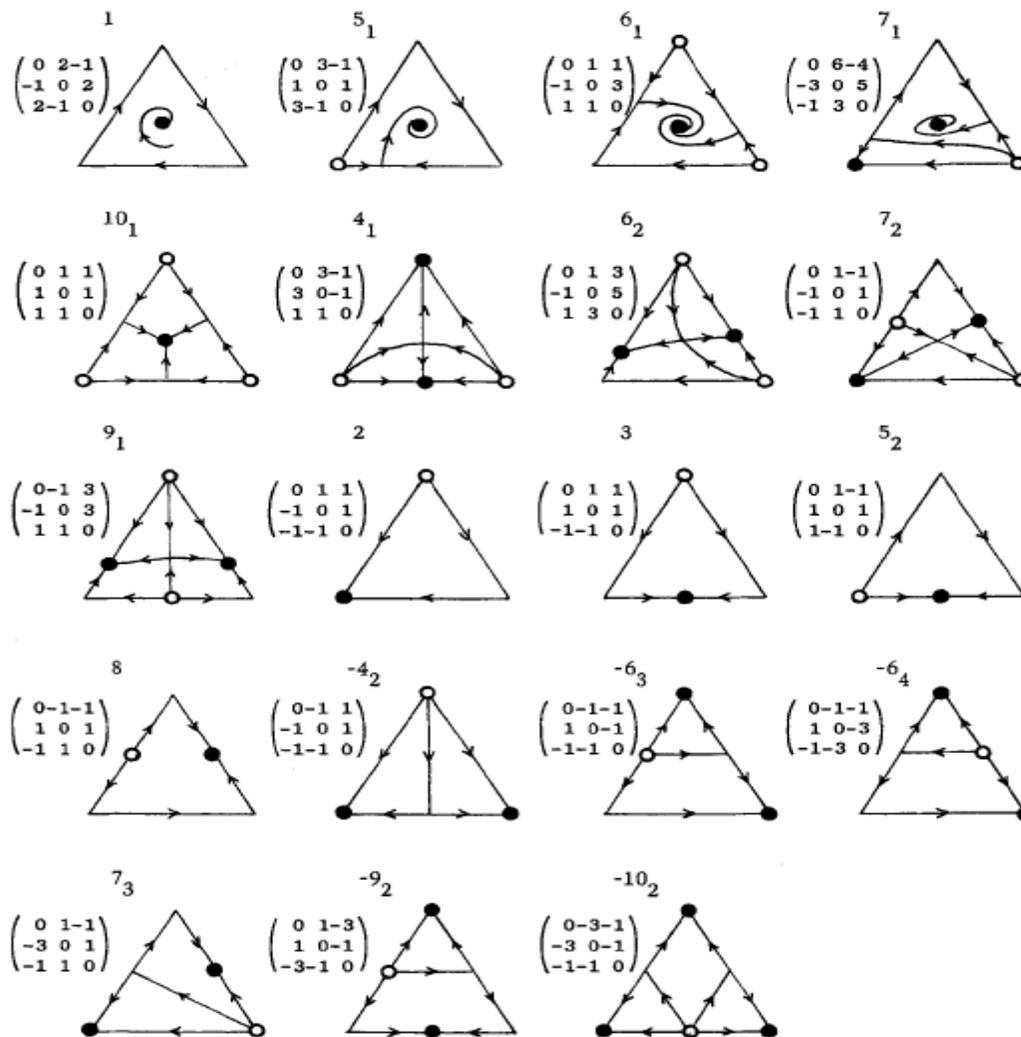
Mixed strategy
Nash
equilibrium
and ESS

Using
barycentric
coordinates:

$$y := x_2 + \frac{x_3}{2}$$

$$z := x_3$$

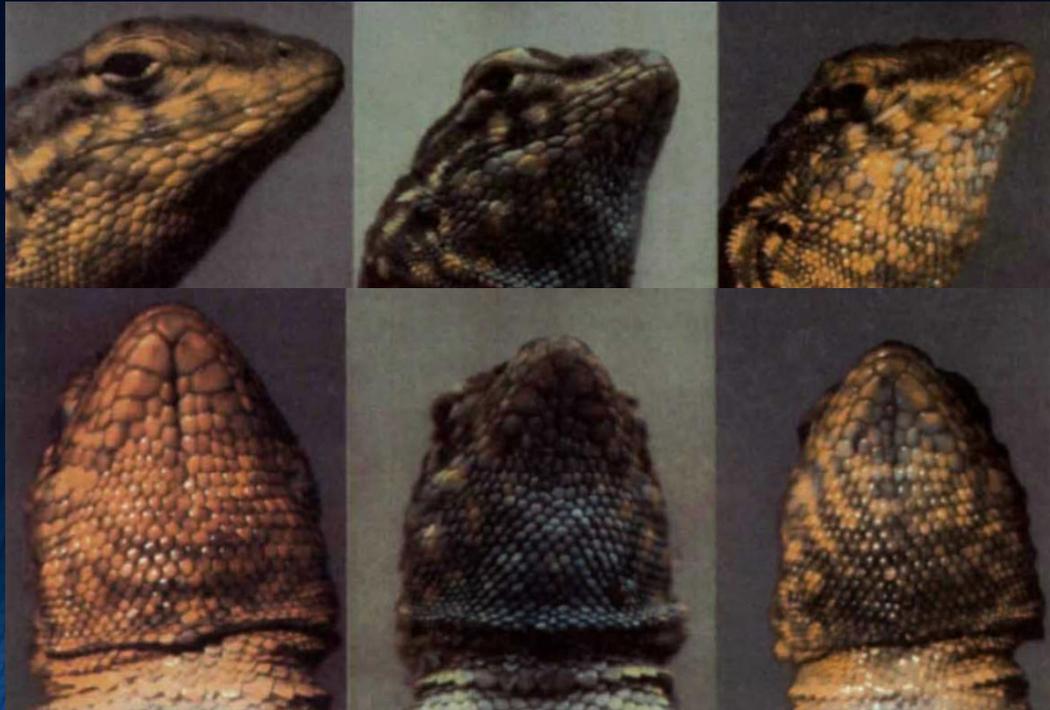
Classes of symmetric (2x3) games



FE. C. Zeeman proved in his article that one can categorize symmetric evolutionary (2x3) games into 19 different classes. The figure on the left side shows that some classes have only one ESS (filled black circles), while others can have three ESSs.

E. C. Zeeman, *POPULATION DYNAMICS FROM GAME THEORY*,
In: *Global Theory of Dynamical Systems*, Springer 1980

The Rock-Papers-Scissors Game and the Evolution of Sexual Selection



B.Sinervo and C.M.Lively focus within their article (The rock-paper-scissors game and the evolution of alternative male strategies, *Nature*, Vol.380 (1996)) on the sexual selection of male side-blotched lizards. From 1990-1995 they studied experimentally these animals and proposed an evolutionary model to explain their data.

Male fitness:

Number of monopolized + shared females

The male lizards have substantially three different colors, which are strongly connected to their behavior: **Orange** (very aggressive, defend large territories), **Blue** (less aggressive, defend small territories), **Yellow** (sneakers, look like females, not aggressive, do not defend territories). The payoff for the male lizards (their fitness) was estimated by the number of monopolized females (exclusively on his home range) and shared females (overlap to other territories),^{51.64,11}

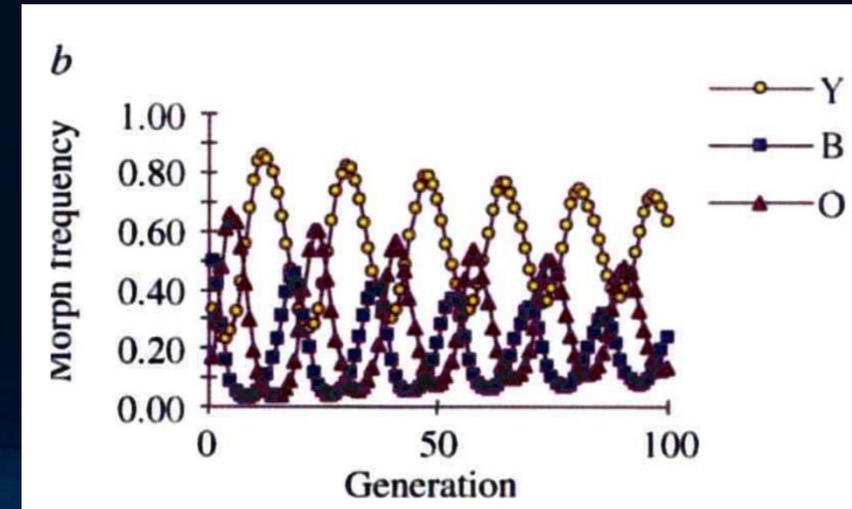
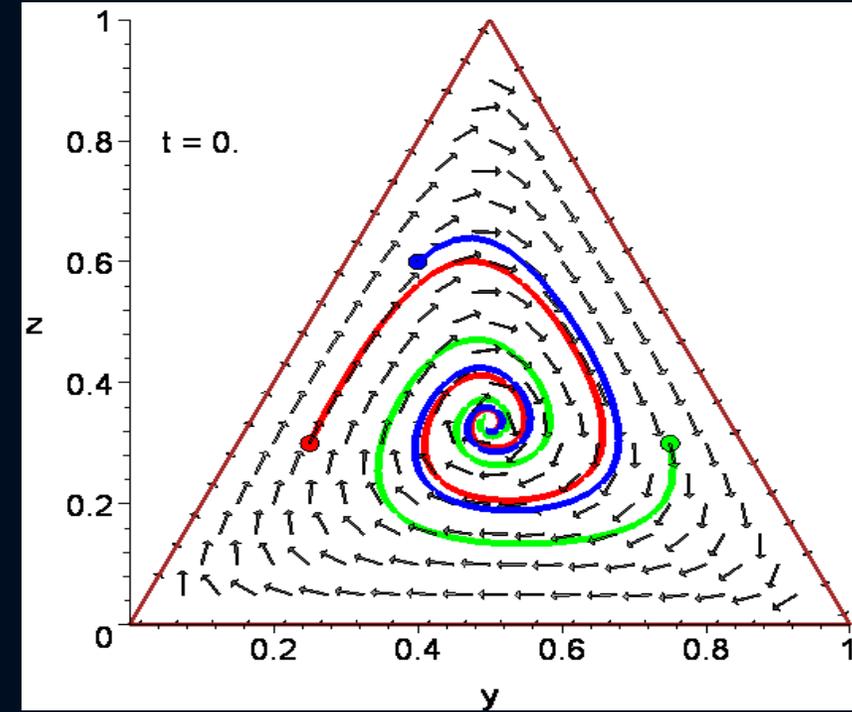
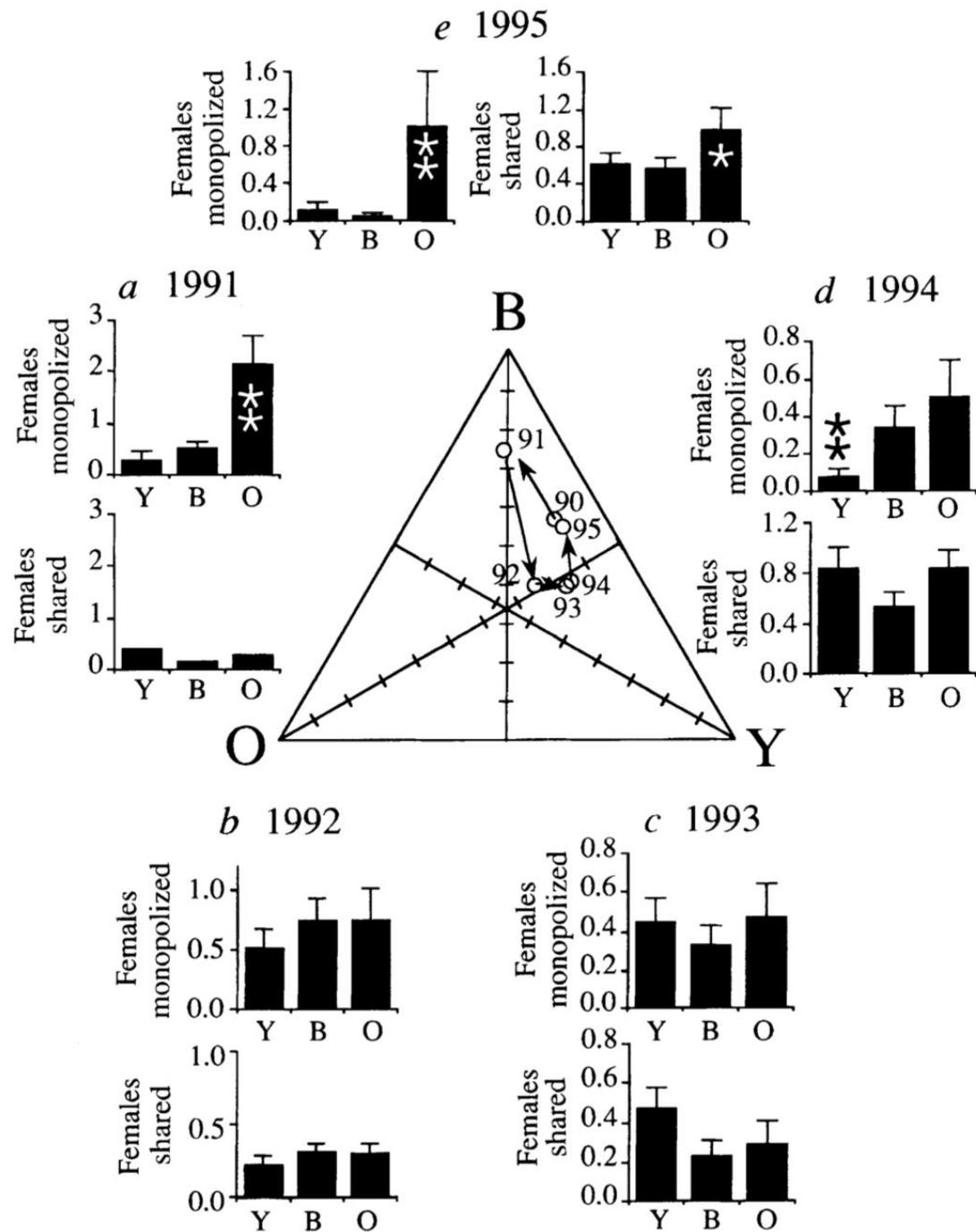
The Rock-Papers-Scissors Game and the Evolution of Sexual Selection

MANY species exhibit colour polymorphisms associated with alternative male reproductive strategies, including territorial males and ‘sneaker males’ that behave and look like females¹⁻³. The prevalence of multiple morphs is a challenge to evolutionary theory because a single strategy should prevail unless morphs have exactly equal fitness^{4,5} or a fitness advantage when rare^{6,7}. We report here the application of an evolutionary stable strategy model to a three-morph mating system in the side-blotched lizard. Using parameter estimates from field data, the model predicted oscillations in morph frequency, and the frequencies of the three male morphs were found to oscillate over a six-year period in the field. The fitnesses of each morph relative to other morphs were non-transitive in that each morph could invade another morph when rare, but was itself invadable by another morph when common. Concordance between frequency-dependent selection and the among-year changes in morph fitnesses suggest that male interactions drive a dynamic ‘rock-paper-scissors’ game⁷.



We have described the first biological example of a cyclical ‘Rock-paper-scissors’ game⁷. As in the game where paper beats rock, scissors beat paper, and rock beats scissors, the wide-ranging ‘ultradominant’ strategy of orange males is defeated by the ‘sneaker’ strategy of yellow males, which is in turn defeated by the mate-guarding strategy of blue males; the orange strategy defeats the blue strategy to complete the dynamic cycle. Frequency-dependent selection maintains substantial genetic variation in alternative male strategies, while at the same time prohibiting a stable equilibrium in morph frequency. □

The Rock-Papers-Scissors Game and the Evolution of Sexual Selection



Elfmeter im Fussball: Übergang von einem (2x2)-Spiel zu einem (2x3)-Spiel

Wolfgang Leininger and Axel Ockenfels*

The Penalty-Duel and Institutional Design: Is there a Neeskens-Effect?

Abstract

We document an increase in the scoring probability from penalties in soccer, which separates the time period before 1974 significantly from that after 1976: the scoring probability increased by 11%. We explain this finding by arguing that the *institution* of penalty-shooting before 1974 is best described as a *standard of behaviour* for striker and goal-keeper, which in game-theoretic terms represents a 2x2-game. In contrast to this, after 1976 the institution of the penalty-duel is best described by a 3x3 game form constrained by certain behavioural rules. Those rules can be parameterized by a *single* parameter, which nevertheless allows the theoretical reproduction (and hence explanation) of all the empirically documented regularities. The scoring probability in equilibrium of the latter institution is higher than in the former one. We present historical evidence to the effect, that this change in the perception of penalty-duels (as two different games), was caused by Johan Neeskens' shrewd and "revolutionary" penalty-taking during World-Cup 1974, when he shot a penalty in the first minute of the final between Germany and the Netherlands right into the *middle* of the goalmouth.

The following application is based on a working paper by W.Leininger and A.Ockenfels (CESIFO WORKING PAPER NO. 2187, 2008). The article focuses on the 'Penalty-Duel' in soccer and describes it as a simultaneous two player game – a game between the goalkeeper and the kicker.

Neeskens Elfmeter:

<https://www.youtube.com/watch?v=44HvFzhV9xI>

Artikel:

<https://www.econstor.eu/bitstream/10419/26769/1/528420186.PDF>

THE PENALTY-DUEL

IS THERE A NEESKENS-EFFECT?

In 1974, J.Neeskens changed the rules of the penalty duel from a two-strategy to a three strategy game, by choosing a new 'middle'-strategy. Neeskens demonstrated that going beyond shared perceptions of how to play the game (i.e. Fulfil the roles of the institutional norm), and devising new, inovative strategies may yield a competitive edge. The article shows that game theory is a powerfull tool analyse and describe the strategic behavior in the penalty duel.

		K	
		y	1-y
G	L	1,0	0,1
	R	0,1	1,0

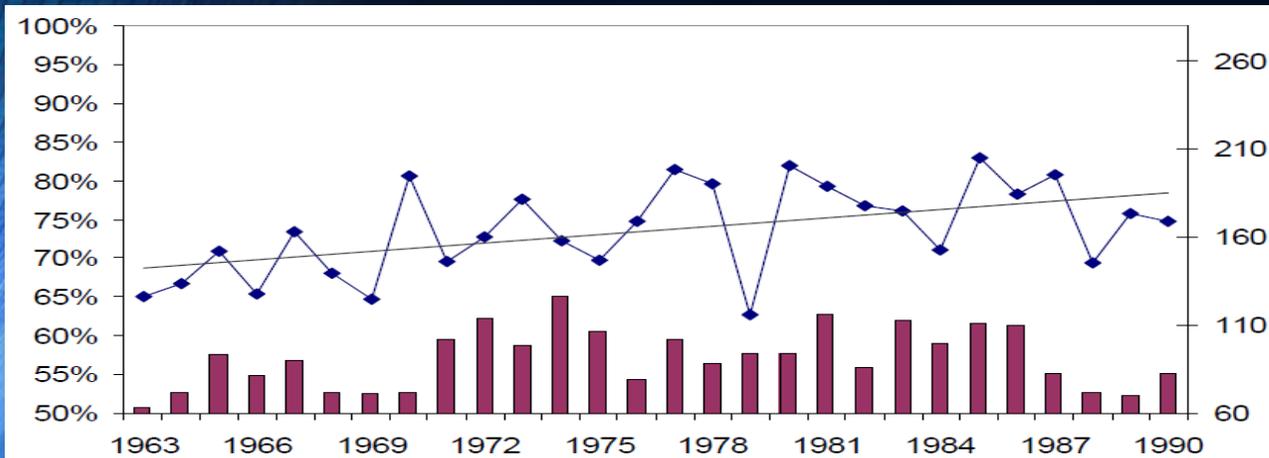
Game I: *A simple penalty game.*



Transition due to behavioral inovation

		K		
		y ₁	y ₂	y ₃
G	L	1,0	0,1	0,1
	M	0,1	1,0	0,1
	R	0,1	0,1	1,0

Game II: *A penalty game, which includes the middle strategy.*



		K		
		y ₁	y ₂	y ₃
G	L	1,0	0,1	0,1
	M	0,1	1+b,-b	0,1
	R	0,1	0,1	1,0

Game III: *A penalty game with modified payoffs.*

		K		
		y ₁	y ₂	y ₃
G	L	1,0	0,b	0,1
	M	0,1	1+b,-b	0,1
	R	0,1	0,b	1,0

Game VI: *A non-constant-sum penalty game.*

THE PENALTY-DUEL

IS THERE A NEESKENS-EFFECT?

Year	Total penalties	Goals in penalties
1990	83	62
1989	70	53
1988	72	50
1987	83	67
1986	110	86
1985	111	92
1984	100	71
1983	113	86
1982	86	66
1981	116	92
1980	94	77
1979	94	59
1978	88	70
1977	102	83
1976	79	59
1975	106	74
1974	126	91
1973	98	76
1972	114	83
1971	102	71
1970	72	58
1969	71	46
1968	72	49
1967	90	66
1966	81	53
1965	93	66
1964	72	48
1963	63	41
Sum	2561	1895

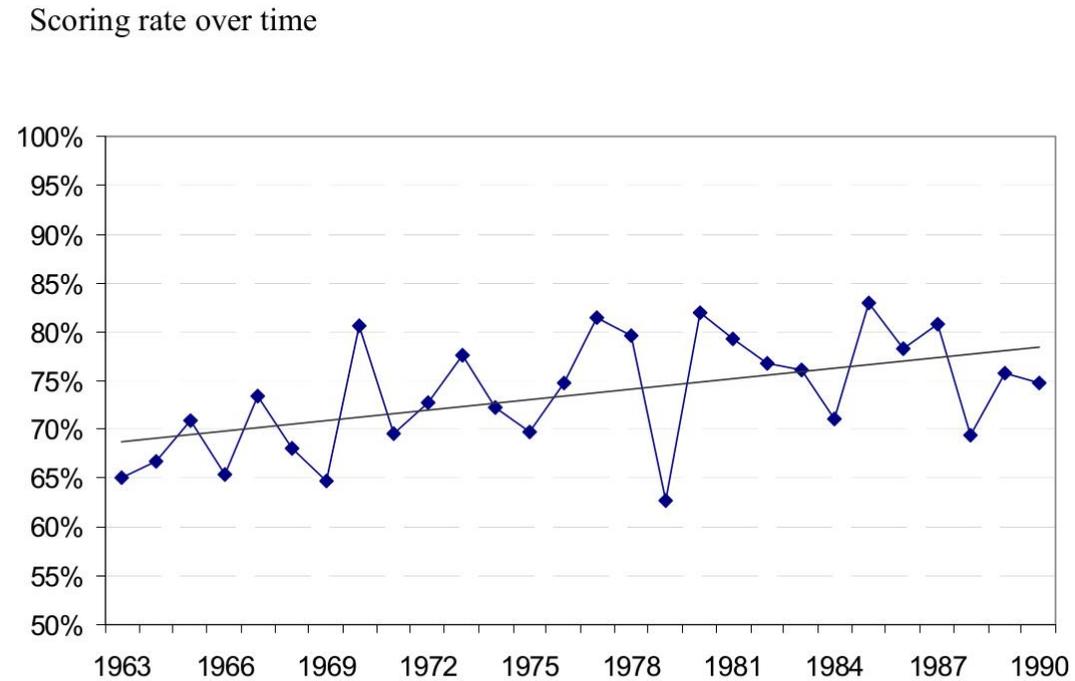


Figure 1: Bundesliga penalties 1963-1990

Zusammenfassung Teil I

Einführung Teil II

Physik der sozio-ökonomischer Systeme mit dem Computer von Dr.phil.nat.Dr.rer.pol. [Matthias Hanauske](#)

[Home](#) [Research](#) [Contact](#)

[Einführung](#)

[Teil I](#)

[Teil II](#)

[Teil III](#)

[E-Learning](#)

II.1 Theorie der sozio-ökonomischen Netzwerke

Eine bedeutende Einschränkung der deterministischen, evolutionären Spieltheorie ist deren zugrundeliegende Netzwerkstruktur (Netzwerktopologie). Die jeweiligen Spieler der betrachteten Population suchen in jeder Spielperiode einen neuen Spielpartner, wobei sie hierbei zufällig vorgehen (zufälliges Netzwerk) und vom Prinzip her mit jedem Spieler innerhalb der Population potentiell das zugrundeliegende Spiel spielen können (vollständig verbundenes Netzwerk). In Bimatrix Spielen suchen sich die Spieler der Teilpopulation A einen zufälligen Spielpartner aus Gruppe B (bzw. umgekehrt). Betrachtet man sich jedoch real existierende sozio-ökonomische Netzwerke, so zeigt sich, dass diese Annahme oft nicht erfüllt ist. Personen kennen oft nur eine Teilmenge von Spielern innerhalb der Population (kein vollständig verbundenes Netzwerk) und die Wahl der potentiellen Spielpartner erfolgt oft auch nicht nach zufälligen Mustern.

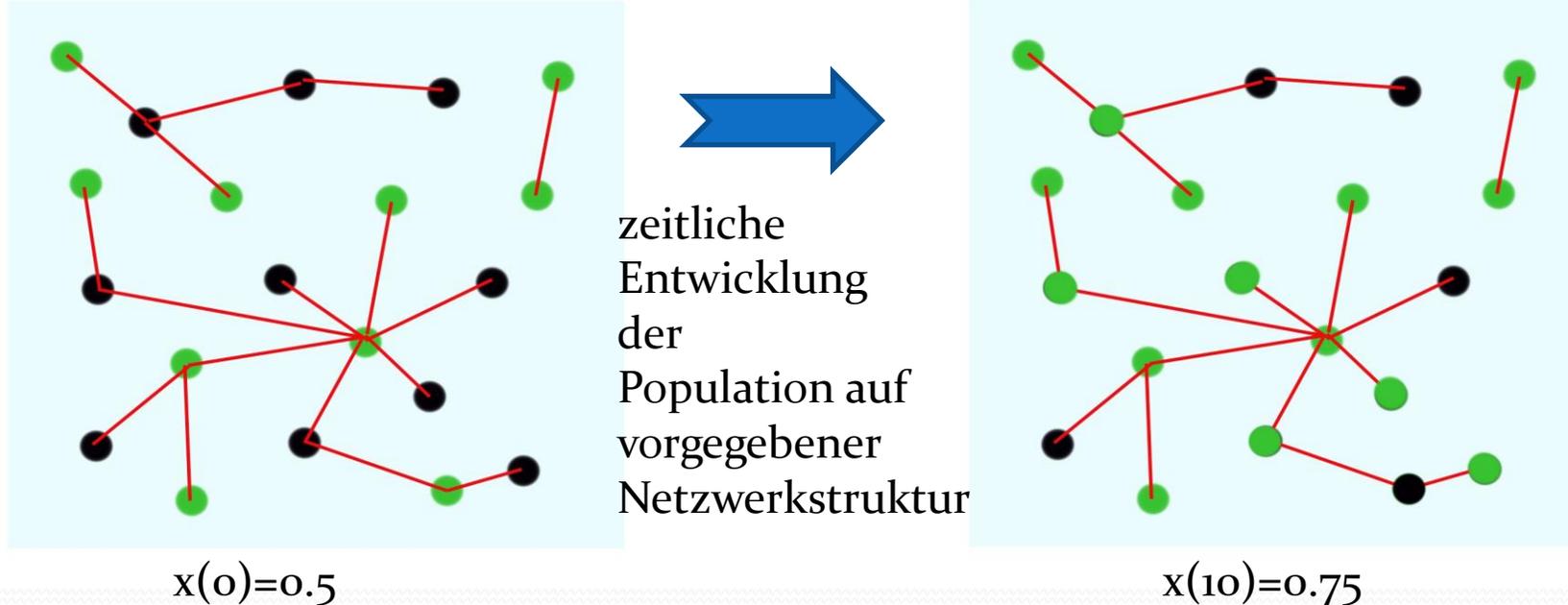
II.2 Einführung in die Theorie der komplexe Netzwerke

Die Theorie der komplexen Netzwerke bildet die Grundlage zur Beschreibung einer Vielzahl von unterschiedlichen biologischen und sozio-ökonomischen Systemen. Die mathematische Beschreibung komplexer Netzwerke ist in mehreren Übersichtsartikel (siehe z.B. <http://barabasi.com/f/103.pdf>, <https://arxiv.org/abs/cond-mat/0106144>, <http://epubs.siam.org/doi/pdf/10.1137/S003614450342480>) zusammengefasst (siehe auch [Claudius Gros, "Complex and Adaptive Dynamical Systems, a Primer"](#)), wobei im besonderen die frei zugängliche Onlineversion des Buches *Network Science* von [Albert-Laszlo Barabasi](#) zu empfehlen ist. In dieser auf graphentheoretischen Grundlagen basierenden mathematischen Beschreibung der komplexe Netzwerke werden physikalische bzw. soziale Interaktionen durch Verbindungskanten zwischen den jeweiligen Netzwerkknoten beschrieben. In der Literatur werden grob vier unterschiedliche Netzwerktypen beschrieben -- die *zufälligen*, die *kleine Welt*, die *exponentiellen* und die *skalenfreien* Netzwerke. Die theoretische Netzwerkforschung befasst sich mit der Entstehung und Beschreibung dieser Netzwerke. Bei einigen Modellnetzwerken können analytische Ergebnisse gewonnen werden. Die Anwendung der Theorie auf real existierende Netzwerkstrukturen ist ebenfalls in den Übersichtsartikeln zusammengefasst. Neben sozialen Netzwerken wie z. B. wissenschaftliche Kollaborationen, Koautorenschaften und Zitationsverflechtungen wissenschaftlicher Artikel, Kommunikationsnetzwerken wie dem Internet und diversen weiteren sozio-ökonomischen Netzwerkstrukturen werden mit Hilfe des mathematischen Modells der komplexen Netzwerke auch biologische Netzwerken wie z.B. neuronale oder Proteinnetzwerke beschrieben und analysiert. Eine kurze Einführung findet sich z.B. auch unter dem folgenden Link: [Neue Entwicklungen in der Evolutionären Spieltheorie: Vorlesungsteil 6](#)

Im folgenden werden die vier unterschiedliche Netzwerktypen im einzelnen beschrieben. Zusätzlich wird die Python Programmierung komplexer Netzwerke vorgestellt. Mittels *Python* und der Programmbibliothek *NetworkX* kann man in relativ einfacher Weise die unterschiedlichen Arten von komplexen Netzwerken grafisch darstellen und analysieren.

Evolutionäre Spieltheorie auf komplexen Netzwerken

Viele in der Realität vorkommende evolutionäre Spiele werden auf einer definierten Netzwerkstruktur (Topologie) gespielt. Die Spieler der betrachteten Population sind hierbei nicht gleichwertig, sondern wählen als Spielpartner nur mit ihnen durch das Netzwerk verlinkte (verbundene) Partner aus.

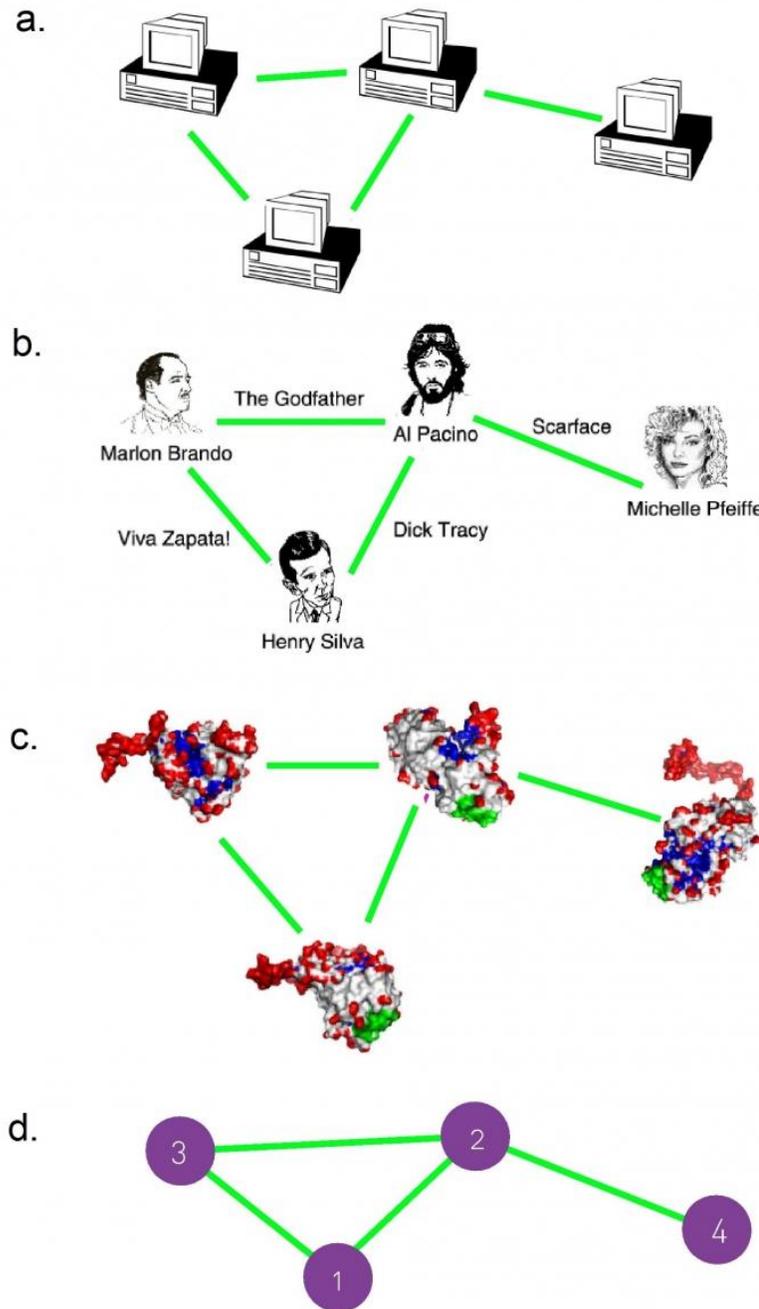


Mögliche Strategien: (grün, schwarz), Parameter t stellt die „Zeit“ dar.
 $x(t)$: Anteil der Spieler, die im Zeitpunkt t die Strategie „grün“ spielen.
Die roten Verbindungslinien beschreiben die möglichen Spielpartner des Spielers

Theorie der komplexen Netzwerke (I)

Da die Theorie der komplexen Netzwerke aus dem mathematischen Zweig der *Graphentheorie* entstanden ist benutzt sie nicht die „mathematischen Vokabeln“ der Spieltheorie. Man spricht z.B. nicht von Spielern, sondern von **Knoten** (bzw. Vertices). Die Verbindungen zwischen den Knoten werden als **Kanten** (bzw. Links) bezeichnet. Während die Spieler eines (klassischen) evolutionären Spiels mit allen anderen Spielern der Population in Kontakt treten können, ist dies bei einem Spiel auf einem komplexen Netzwerk im allgemeinen nicht möglich.

Komplexe Netzwerke Knoten und Kanten



Different Networks, Same Graph

The figure shows a small subset of (a) the Internet, where routers (specialized computers) are connected to each other; (b) the Hollywood actor network, where two actors are connected if they played in the same movie; (c) a protein-protein interaction network, where two proteins are connected if there is experimental evidence that they can bind to each other in the cell. While the nature of the nodes and the links differs, these networks have the same graph representation, consisting of $N = 4$ nodes and $L = 4$ links, shown in (d).

Theorie der komplexen Netzwerke (II)

Komplexe Netzwerke lassen sich wie folgt untergliedern:

- Handelt es sich nur um eine Knotenart (Spielergruppe), oder besteht das Netzwerk aus mehreren Knotenarten (z.B. Bi-Matrix Spiele).
- Sind die Kanten (Verbindungslinien zwischen den Knoten) gerichtet oder ungerichtet.
- Besitzen die Kanten zahlenmäßige Gewichtungen oder geben sie einfach an ob ein Knoten mit einem anderen verbunden oder nicht verbunden ist.
- Gibt es zeitliche Veränderungen des Netzwerks; ist die Anzahl der Knoten konstant oder wächst bzw. schrumpft sie im laufe der Zeit.

Theorie der komplexen Netzwerke (III)

(Beispiele unterschiedlicher komplexer Netzwerke)

- a) Nicht gerichtetes und ungewichtetes Netzwerk einer einzigen Knotenart.
- b) Nicht gerichtetes und ungewichtetes Netzwerk dreier verschiedener Knotenarten, wobei zusätzlich drei verschiedene Kantenarten existieren.
- c) Nicht gerichtetes aber gewichtetes Netzwerk. Sowohl die Knoten als auch die Kanten des Netzwerks besitzen zahlenmäßige Gewichtungen.
- d) Gerichtetes aber nicht gewichtetes Netzwerk. Es existiert nur eine Knoten- und gerichtete Kantenart.

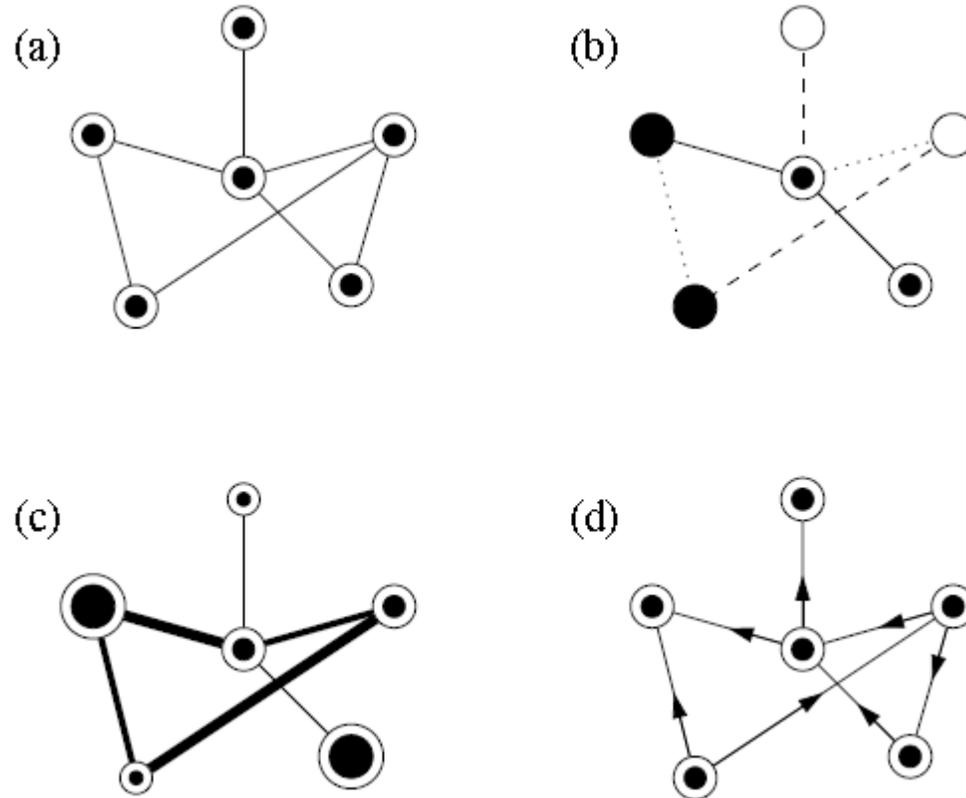


Abbildung: Unterschiedliche Netzwerktypen
Die Abbildung ist dem folgenden Artikel entnommen:
M. E. J. Newman,
„The structure and function of complex networks”

Theorie der komplexen Netzwerke (IV)

(Größen die ein Netzwerk charakterisieren)

- **Der Knotengrad k_i**

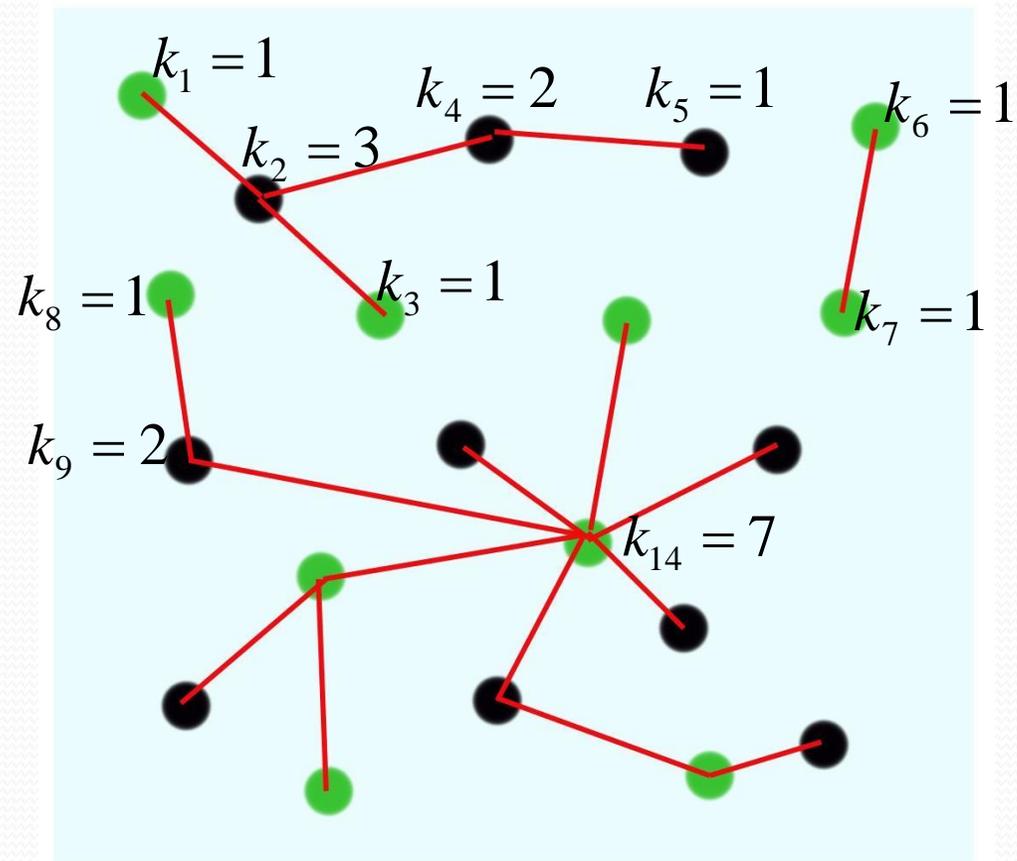
Der Knotengrad des Knotens i ist gleich der Anzahl der Kanten die der Knoten i besitzt. Bei gerichteten Netzwerken unterscheidet man zwischen dem eingehenden und ausgehenden Knotengrad. Bei gewichteten Netzwerken summiert man über die Zahlenfaktoren der gewichteten Kanten.

- **Der Clusterkoeffizient C_i**

Der Clusterkoeffizient gibt die Wahrscheinlichkeit an, dass zwei nächste Nachbarn eines Knotens ebenfalls nächste Nachbarn untereinander sind. Der globale Wert C des Netzwerks stellt demnach eine Art von „Cliques“-Nachbarschafts-Eigenschaft des Netzwerks dar

- **Der Durchmesser des Netzwerks**

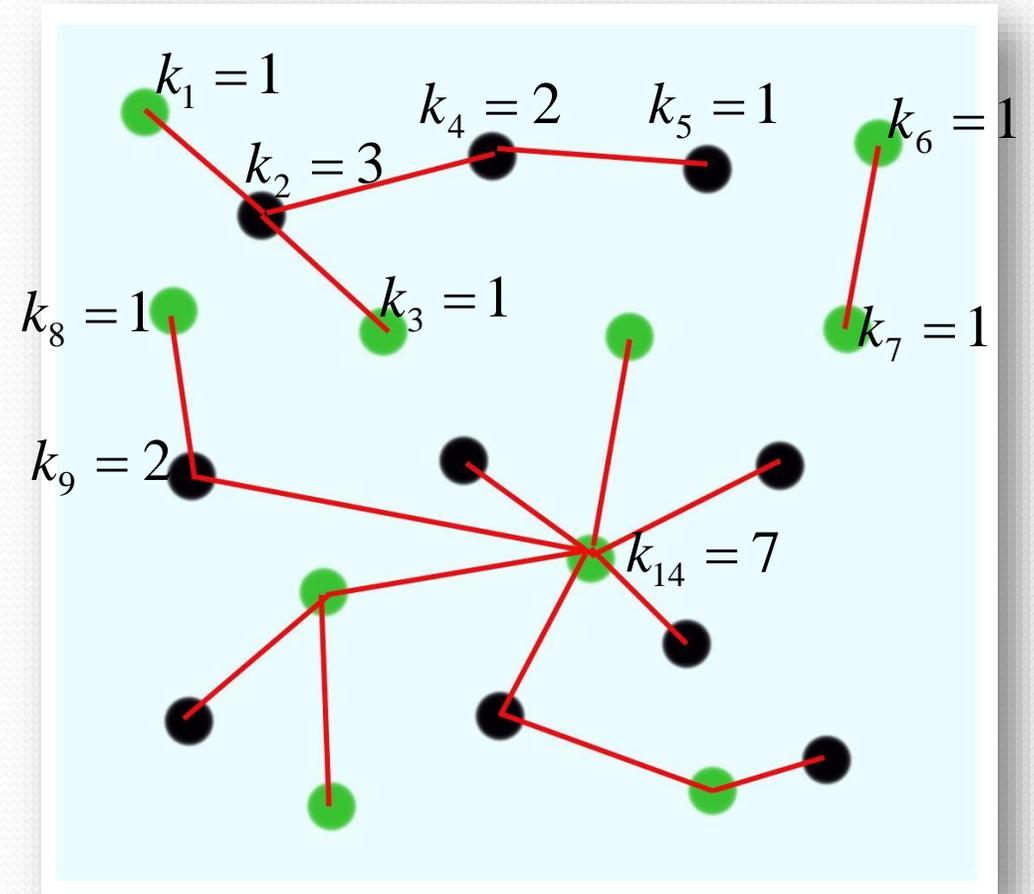
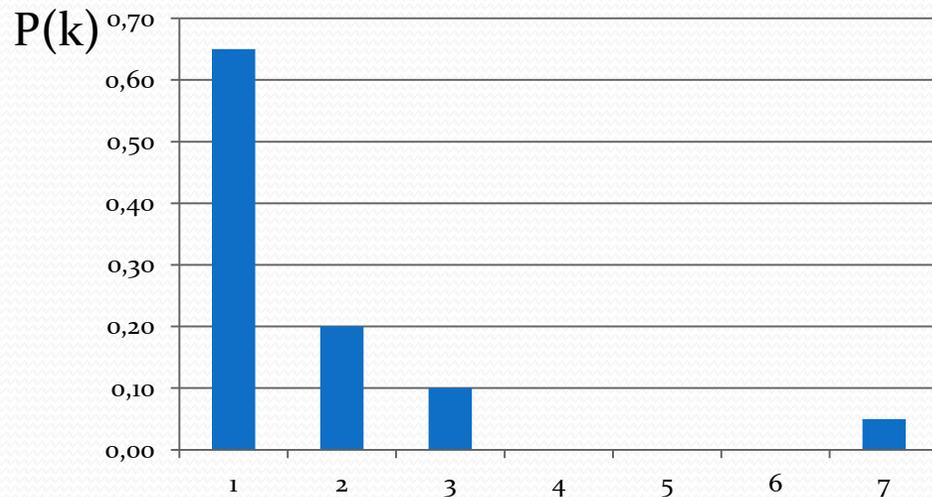
Der Durchmesser des Netzwerks gibt die maximale kürzeste Kantenlänge zwischen zwei beliebigen Knoten des Netzwerkes an.



Theorie der komplexen Netzwerke (IV)

(Die Verteilungsfunktion der Knotengrade)

Die Verteilungsfunktion der Knotengrade $P(k)$ (bzw. $N(k)$) ist eine wichtige das Netzwerk charakterisierende Größe. Sie gibt an, wie groß der Anteil an Netzwerkknoten mit Knotengrad k ist. Bei realen (endlichen) Netzwerken ist diese Funktion keine kontinuierliche, sondern eine diskrete Funktion. In dem rechten Beispiel besitzt die Verteilungsfunktion das folgende Aussehen:



k

Top 80 Internet exchange points

Gbit/s

500
450
400
350
300
250
200
150
100
50
0



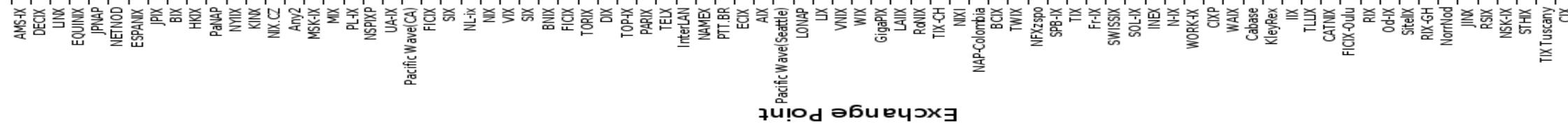
Gbit/s

500
450
400
350
300
250
200
150
100
50
0

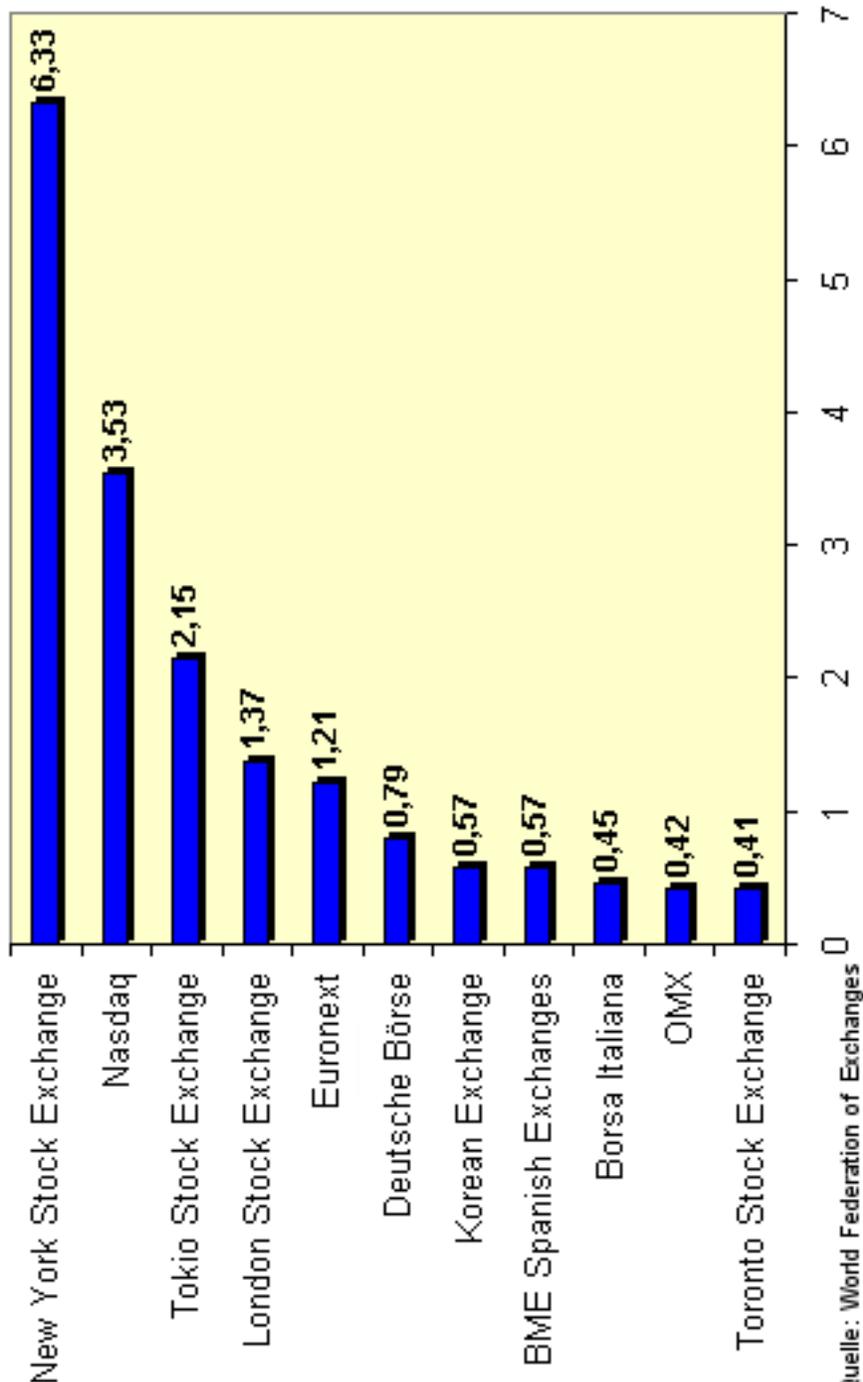
Frankfurt als mächtiger Knoten der Informationsströme Internet-Knoten

Das Internet stellt ein skalenfreies Netzwerk. Trägt man die 80 wichtigsten Internet-Knoten sortiert auf, so erhält man den typischen Verlauf eines skalenfreien Netzwerks. Frankfurt am Main mit seinem Internet-Knoten *DE-CIX* ist in der veralteten Grafik an Stelle 2, laut Wikipedia ist er jetzt sogar auf Rang 1

www.alpro.de



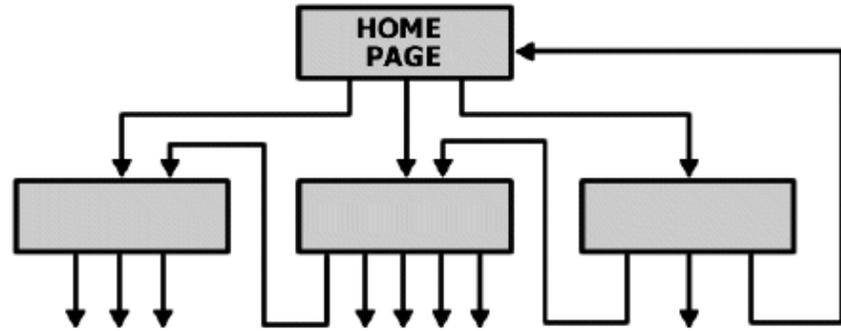
Die weltweit größten Wertpapierbörsen
nach Handelsvolumen (notierte inländische Aktien) in Billionen US-Dollar
Januar bis April 2006



Die Frankfurter Wertpapierbörse (FWB)

ist die bedeutendste deutsche Börse mit Sitz in Frankfurt am Main. Betreiberin und Träger ist die Deutsche Börse AG. Im Jahr 2000 wurde die Neue Börse im Industriehof in Frankfurt am Main in einem neuen Gebäude bezogen. Im Jahr 2005 wurden an den deutschen Börsen rund 3,8 Billionen Euro umgesetzt. Dabei entfielen vom Gesamtumsatz rund 3,2 Billionen Euro auf Aktien, Optionsscheine und börsengehandelte Fonds und rund 615 Milliarden Euro auf Anleihen. Der Aktienumsatz betrug 1,3 Billionen Euro, bei deutschen Aktien entfallen rund 98 % des Handels auf die Frankfurter Wertpapierbörse und Xetra, das elektronische Handelssystem der Deutschen Börse. Im Oktober 2008 entfielen 97 % der Umsätze in deutschen Aktien auf Xetra und die Frankfurter Parkettbörse. Bei ausländischen Aktien liefen über 86 % des Umsatzes über Xetra und den Präsenzhandel.'

WORLD-WIDE WEB



INTERNET

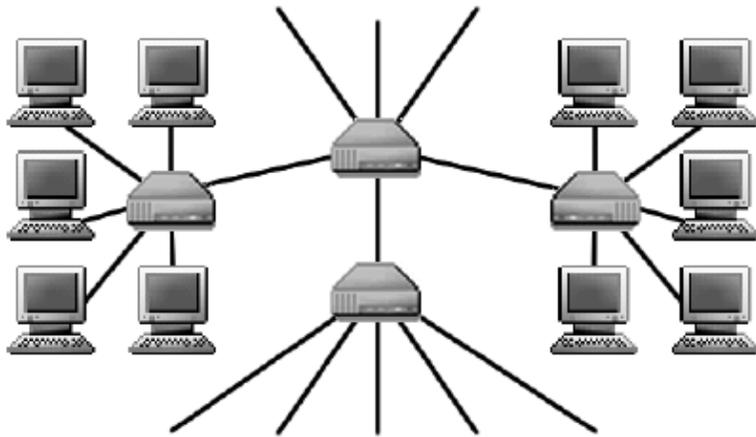
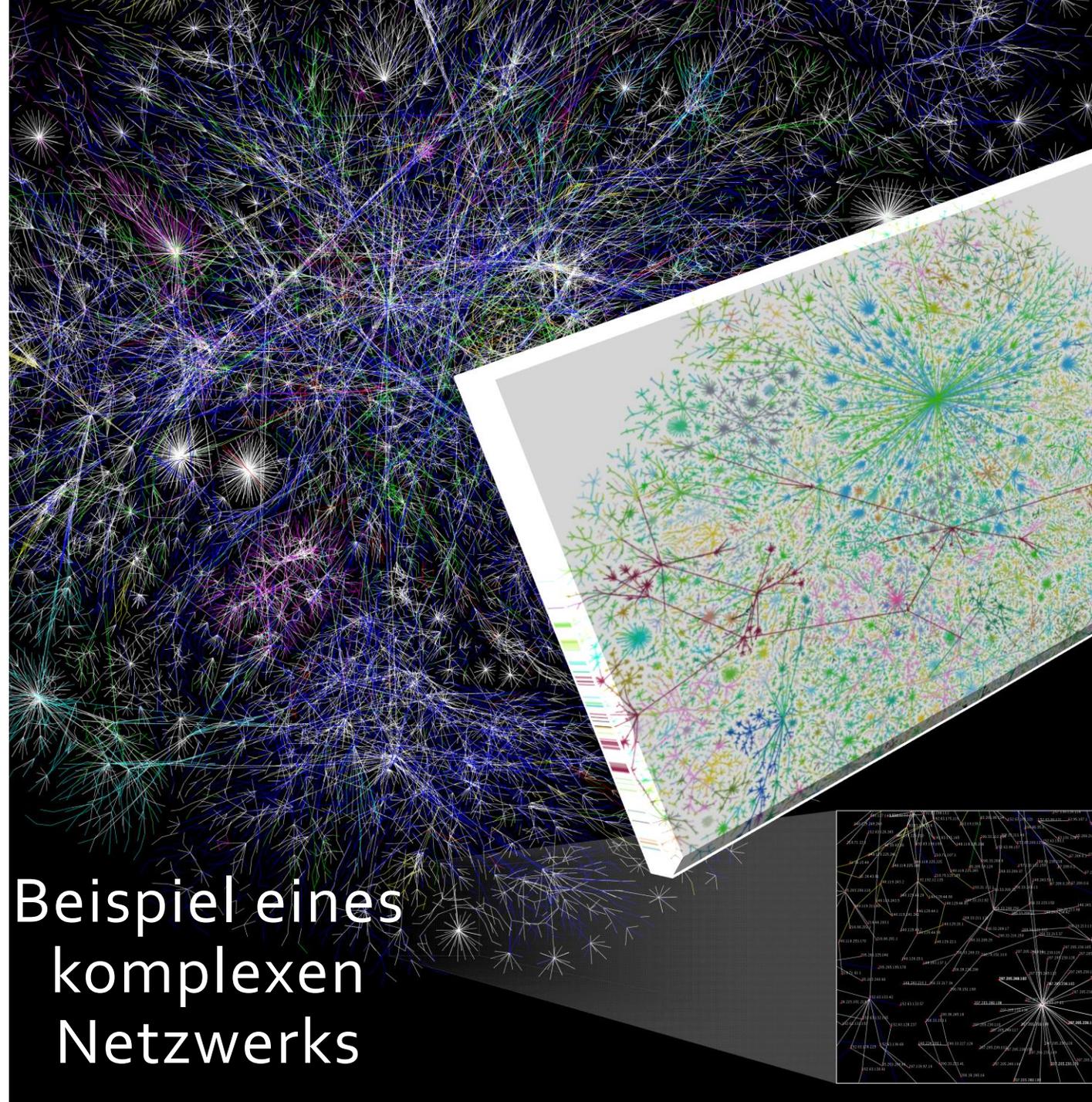


FIG. 1. Network structure of the World-Wide Web and the Internet. Upper panel: the nodes of the World-Wide Web are web documents, connected with directed hyperlinks (URLs). Lower panel: on the Internet the nodes are the routers and computers, the edges are the wires and cables that physically connect them. Figure courtesy of István Albert.

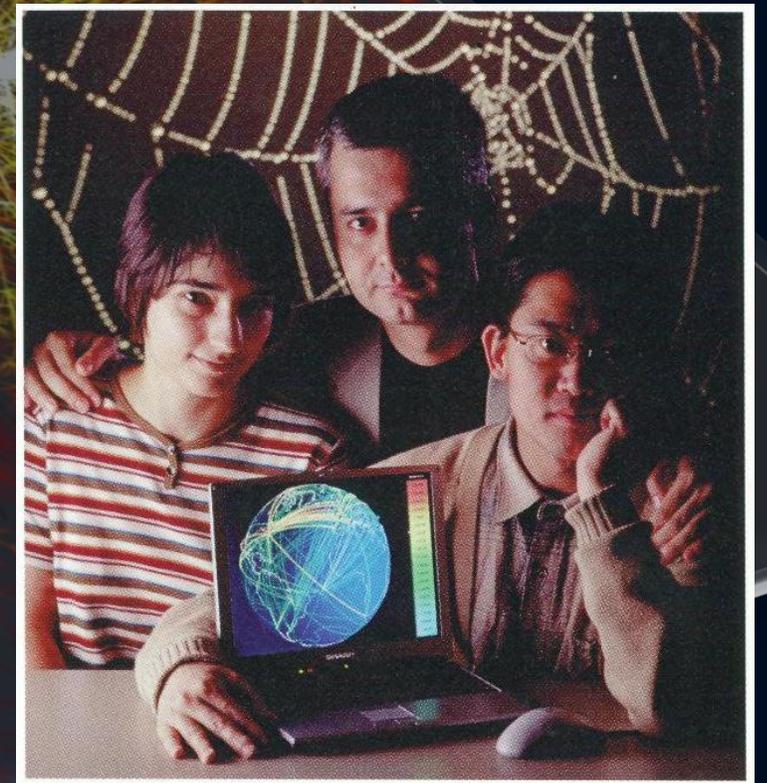
Beispiel eines
komplexen
Netzwerks



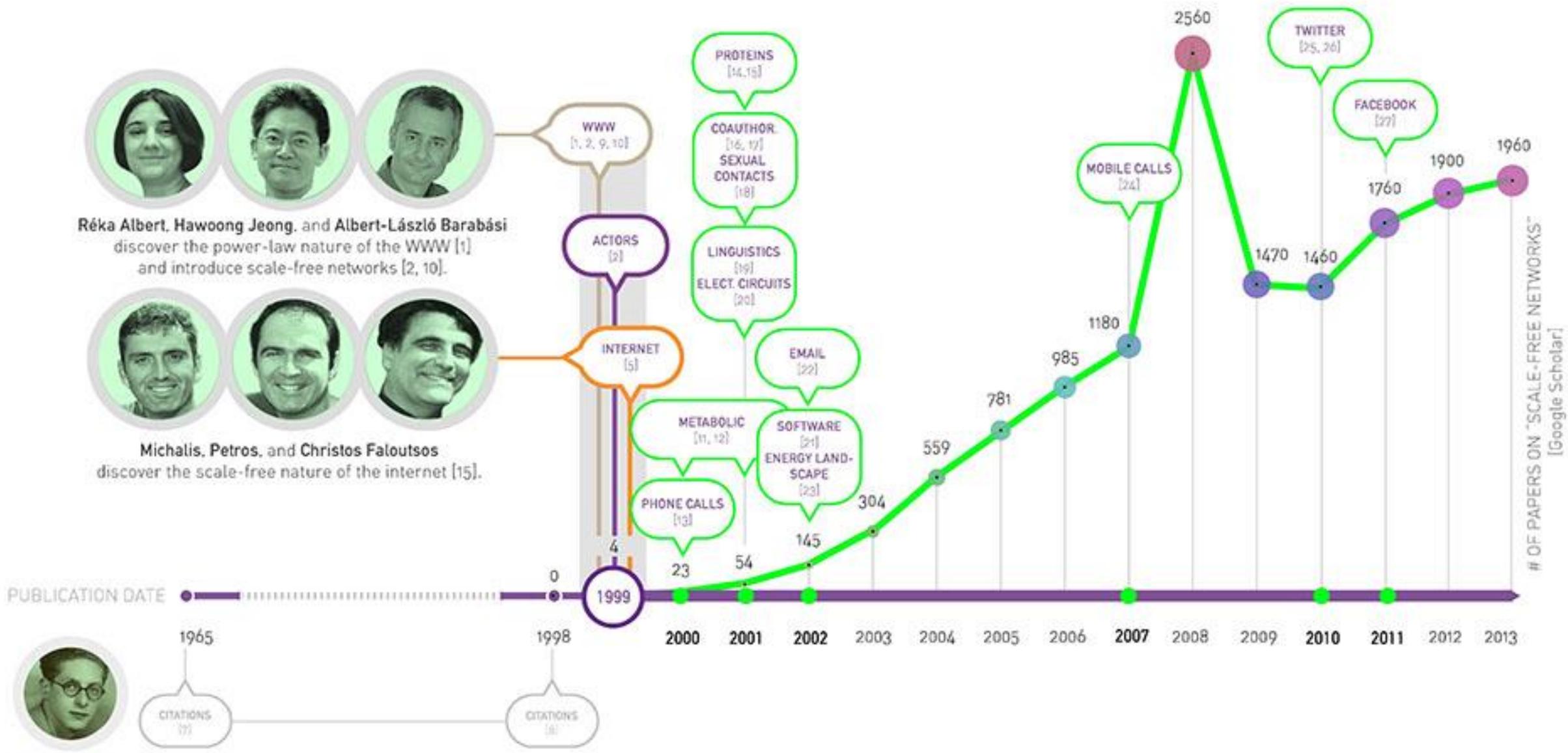
Wechselwirkungen und Struktur im Internet

Im Jahre 1999 untersuchten Albert-Laszlo Barabasi und Mitarbeiter die topologische Struktur des Internets (WWW)

A photo taken for Business 2.0 magazine in 2000, showing Reka Albert, Hawoong Jeong and Albert-Laszlo Barabasi, soon after our publication of the paper on the topology of the WWW.
(see <http://networksciencebook.com/>)



Viele der folgenden Abbildungen sind aus dem frei zugänglichen Buch „Network Science“ von Albert-Laszlo Barabasi entnommen.
<http://networksciencebook.com/>



Derek de Solla Price [1922 - 1983]
 discovers that citations follow a power-law distribution [7], a finding later attributed to the scale-free nature of the citation network [2].

Skalenfreie Netzwerke auch in vielen weiteren sozio-ökonomischen und biologischen Systemen

The Structure and Function of Complex Networks*

M. E. J. Newman[†]

Netzwerkstrukturen in unterschiedlichsten Systemen

	Network	Type	n	m
Social	film actors	undirected	449 913	25 516 482
	company directors	undirected	7 673	55 392
	math coauthorship	undirected	253 339	496 489
	physics coauthorship	undirected	52 909	245 300
	biology coauthorship	undirected	1 520 251	11 803 064
	telephone call graph	undirected	47 000 000	80 000 000
	email messages	directed	59 912	86 300
	email address books	directed	16 881	57 029
	student relationships	undirected	573	477
	sexual contacts	undirected	2 810	
Information	WWW nd.edu	directed	269 504	1 497 135
	WWW Altavista	directed	203 549 046	2 130 000 000
	citation network	directed	783 339	6 716 198
	Roget's Thesaurus	directed	1 022	5 103
	word co-occurrence	undirected	460 902	17 000 000
Technological	Internet	undirected	10 697	31 992
	power grid	undirected	4 941	6 594
	train routes	undirected	587	19 603
	software packages	directed	1 439	1 723
	software classes	directed	1 377	2 213
	electronic circuits	undirected	24 097	53 248
	peer-to-peer network	undirected	880	1 296
Biological	metabolic network	undirected	765	3 686
	protein interactions	undirected	2 115	2 240
	marine food web	directed	135	598
	freshwater food web	directed	92	997
	neural network	directed	307	2 359

Netzwerk-Klassen

Aufgrund ihrer unterschiedlichen Eigenschaften unterscheidet man die folgenden Netzwerk-Klassen:

i. Zufällige Netzwerke

Die einzelnen Kanten bei *zufälligen Netzwerke* werden von den Knoten (Spielern) nach einem rein zufälligen Muster ausgewählt.

ii. „Kleine Welt“-Netzwerke (small-world networks)

- i. „Kleine Welt“-Netzwerke zeichnen sich durch einen kleinen Wert der durchschnittlichen kürzesten Verbindung zwischen den Knoten des Netzwerkes und einem großen Wert des Clusterkoeffizienten aus.

iii. Exponentielle Netzwerke

iv. Skalenfreie Netzwerke

Netzwerke in der Realität

Netzwerke finden sich in den unterschiedlichsten sozialen, physikalischen und biologischen Systemen

- **Biologische Netzwerke**
 - Protein- und Gennetzwerke
- **Soziale Netzwerke**
 - Beziehungs- und Freundschaftsnetzwerke
 - Netzwerke von Geschäftsbeziehungen und Firmenbeteiligungen
 - Internetbasierte, soziale Web2.0 Netzwerke
- **Technologische Netzwerke**
 - Transportnetzwerke (Flug-, Zugrouten)
 - Internetverbindungen zwischen Computerservern
- **Informationsnetzwerke**
 - Wissensnetzwerke, Verlinkungen von Internetseiten
 - Zitationsnetzwerke von wissenschaftlichen Artikeln
 - Linguistische Netzwerke

Wichtige Netzwerk charakterisierende Größen

Im folgenden werden einige der wichtigen Größen die ein Netzwerk charakterisieren aufgelistet. Eine ausführliche Darstellung der wichtigsten graphentheoretischen Größen findet man unter Albert-Laszlo Barabasi, Network Science, Chapter 2 Graph Theory.

- **Der Knotengrad k_i**

Der Knotengrad des Knotens i ist gleich der Anzahl der Kanten die der Knoten i besitzt. Bei gerichteten Netzwerken unterscheidet man zwischen dem eingehenden k_i^{in} und ausgehenden Knotengrad k_i^{out} . Bei gewichteten Netzwerken summiert man über die Zahlenfaktoren der gewichteten Kanten.

- **Die Nachbarschaftsmatrix (Adjazenzmatrix) A_{ij}**

Die Nachbarschaftsmatrix des Netzwerkes beschreibt, welche Knoten des Graphen durch eine Kante verbunden sind. Zeigt eine Kante von Knoten j auf den Knoten i , dann ist der zugehörige Matrixwert $A_{ij} = 1$, wohingegen ein Eintrag $A_{ij} = 0$ bedeutet, dass keine Kante von j nach i zeigt. Bei ungerichteten Netzwerken ist die Nachbarschaftsmatrix symmetrisch. Der Knotengrad k_i des Knotens i (bzw. k_i^{in} und k_i^{out} bei gerichteten Graphen) lässt sich mittels der Nachbarschaftsmatrix wie folgt bestimmen: $k_i = \sum_{j=1}^N A_{ij}$ ($k_i^{\text{in}} = \sum_{j=1}^N A_{ij}$ und $k_i^{\text{out}} = \sum_{j=1}^N A_{ji}$ bei gerichteten Graphen), wobei die Anzahl der Kanten sich wie folgt bestimmen lässt: $L = \sum_{i,j=1}^N A_{ij}/2$ und die Größe N die Anzahl der Knoten des Netzwerkes bezeichnet.

Wichtige Netzwerk charakterisierende Größen

- **Die Verteilungsfunktion der Knotengrade** $P(k) = N(k)/N$

Die Verteilungsfunktion der Knotengrade $P(k)$ (bzw. $N(k)$) ist eine wichtige das Netzwerk charakterisierende Größe. Sie gibt an, wie groß der Anteil an Netzwerkknoten mit Knotengrad k ist. Bei realen (endlichen) Netzwerken ist diese Funktion keine kontinuierliche, sondern eine diskrete Funktion $P(k) \approx P_k$.

- **Der Clusterkoeffizient** C_i bzw. C

Der Clusterkoeffizient gibt die Wahrscheinlichkeit an, dass zwei nächste Nachbarn eines Knotens ebenfalls nächste Nachbarn untereinander sind. Für einen speziellen Knoten i berechnet er sich mittels:

$C_i = 2E_i / (k_i(k_i - 1))$, wobei E_i die Anzahl der Kanten darstellt, die die nächsten Nachbarn des Knoten i miteinander verbinden. Der globale Wert C des Clusterkoeffizienten ist der Mittelwert aller C_i 's und stellt demnach eine Art von der Enge der Nachbarschaftsbeziehungen des Netzwerks dar.

- **Durchschnittliche Anzahl der m -nächsten Nachbarn** z_m

z_1 stellt hierbei den Wert der mittleren Knotenzahl des Netzwerkes dar ($z_1 = \langle k \rangle$) und z_2 die mittlere Anzahl zweiter-nächster Nachbarn ($z_2 = \langle k^2 \rangle - \langle k \rangle$), siehe z.B. Claudius Gros, "Complex and Adaptive Dynamical Systems, a Primer", S:18).

Wichtige Netzwerk charakterisierende Größen

- **Durchmesser des Netzwerks l**

Der Durchmesser des Netzwerks gibt die maximale kürzeste Kantenlänge zwischen zwei beliebigen Knoten des Netzwerkes an: $l = \log(N/z_1)/\log(z_2/z_1) + 1$, wobei N die Anzahl der Knoten des Netzwerkes darstellt (siehe z.B. Claudius Gros, "Complex and Adaptive Dynamical Systems, a Primer", S:20). Der Wert l wird auch in einigen Lehrbüchern als d_{\max} bezeichnet (siehe Albert-Laszlo Barabasi, Network science, Chapter 2 Graph Theory).

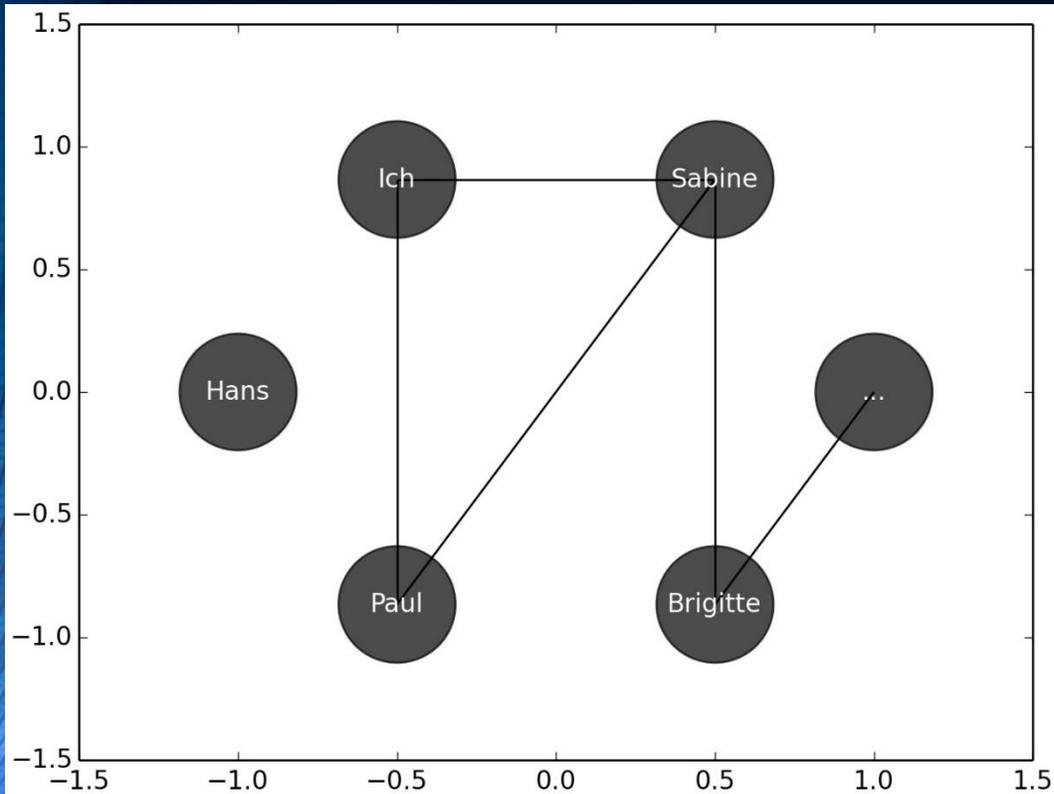
- **Größter verbundener Knotenclusters N_G (Giant component, Hub)**

Die Anzahl der Knoten im größten verbundenen Knotenclusters des Netzwerkes wird mit N_G bezeichnet.

Diese und weitere graphentheoretischen Größen (Number of Shortest Paths Between Two Nodes, Shortest Path, Average Path Length, ...) sind in Albert-Laszlo Barabasi, Network science, Chapter 2 Graph Theory zu finden.

Aufgrund ihrer unterschiedlichen Eigenschaften unterscheidet man die folgenden Netzwerk-Klassen: Zufällige Netzwerke (Random Networks: Die einzelnen Kanten bei zufälligen Netzwerke werden von den Knoten (Spielern) nach einem rein zufälligen Muster ausgewählt), Kleine Welt-Netzwerke (Small World Networks, Kleine Welt-Netzwerke zeichnen sich durch einen kleinen Wert der durchschnittlichen kürzesten Verbindung zwischen den Knoten des Netzwerkes und einem großen Wert des Clusterkoeffizienten aus), Exponentielle Netzwerke (Exponential Networks) und Skalenfreie Netzwerke (Scale-Free Networks).

Simulation und Darstellung von komplexen Netzwerken mit Python (Teil II)



```
import networkx as nx
import matplotlib.pyplot as plt
```

```
G=nx.Graph()
```

```
#Hinzufuegen von Knoten zum Netzwerk
```

```
G.add_nodes_from(["Ich", "Paul", "Brigitte", "Sabine", "Hans", "..."])
```

```
G.add_edge("Ich", "Paul")
```

```
G.add_edge("Ich", "Sabine")
```

```
G.add_edge("Sabine", "Brigitte")
```

```
G.add_edge("Sabine", "Paul")
```

```
G.add_edge("Paul", "Sabine")
```

```
G.add_edge("Brigitte", "...")
```

```
#Erzeugung des Netzwerk-Bildes
```

```
graph_pos=nx.shell_layout(G)
```

```
#graph_pos=nx.shell_layout(G)
```

```
#graph_pos=nx.spring_layout(G)
```

```
nx.draw_networkx_nodes(G, graph_pos, node_size=3000, alpha=0.7, node_color="black")
```

```
nx.draw_networkx_edges(G, graph_pos)
```

```
nx.draw_networkx_labels(G, graph_pos, font_color="white")
```

```
#Speicherung des Bildes als .jpg
```

```
saveFig="./Netzwerk.jpg"
```

```
plt.savefig(saveFig, dpi=200, bbox_inches="tight", pad_inches=0.05, format="jpg")
```

```
plt.show()
```

I.2.6 Mögliche Projekte im Teil I

Projekt I: Spielklassen symmetrischer (2x3)-Spiele

E. C. Zeeman zeigt in seinem im Jahre 1980 veröffentlichten Artikel, dass man evolutionäre, symmetrische (2x3)-Spiele in 19 Klassen einteilen kann. Es gibt Spielklassen, die besitzen lediglich eine evolutionär stabile Strategie und Klassen die sogar drei evolutionär stabile Strategien besitzen. (siehe E.C. Zeeman, POPULATION DYNAMICS FROM GAME THEORY, In: Global Theory of Dynamical Systems, Springer 1980). Stellen Sie Beispiele dieser Spielklassen mittels eines Maple Worksheets oder eines Python Skriptes dar. Das folgende Maple Worksheet kann Ihnen dabei helfen ([View Maple Worksheet](#), [Download Maple Worksheet](#)).

Projekt II: Äquivalenz der Räuber-Beute-Gleichung für 2-Populationen mit der Replikatorodynamik der evolutionären Spieltheorie für 3 Strategien

Stellen Sie die Äquivalenz der Räuber-Beute-Gleichung für 2-Populationen mit einem evolutionären Spiel mit 3 Strategien mittels eines Maple Worksheets oder eines Python Skriptes dar.