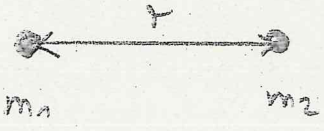
1.) Raum-Zeit und Geometrie

Teil 1

Newtonsche Gravitationsgesetz



$$\vec{F}_1 = -G\,\frac{m_1 m_2}{r^2}\,\vec{e}_r \overset{\text{actio = reactio}}{=} -\vec{F}_2 \quad , \quad G = 6.67\cdot 10^{-11}\, m^3 kg^{-1} s^{-2}$$

- $|\vec{F}_1| \sim m_1$, $|\vec{F}_1| \sim \frac{1}{r^2}$ zwei wichtige, unabhängige Aussagen

(ausreichend $\Rightarrow$ 3. Keplerschen Gesetz)

- additiv : $\vec{F}_{G,1} = \sum_{i=2}^{N} \vec{F}_i = \sum_{i=2}^{N} \frac{G m_1 m_i}{r_i^3}\,\vec{r}_i = G\cdot m_1 \cdot \sum_{i=2}^{N} \frac{m_i \vec{r}_i}{r_i^3}$

$m \hat{=}$ schweren Masse $= m_s$

Bewegungsgleichung : $m_1 \ddot{\vec{r}}_1 = \vec{F}_{G,1} \Rightarrow \ddot{\vec{r}}_1 = G\cdot \sum_{i=2}^{N} \frac{m_i(\vec{r}_i - \vec{r}_1)}{|\vec{r}_i - \vec{r}_1|^3}$

$\to$ träge Masse m_t

Man weiß, durch Erfahrung, daß

$$\boxed{m_s = m_t}$$

(bis auf unwesentliche Proportionalität, die in G steckt).

– Äquivalenz von schwerer und träger Masse

- $m_t = \frac{|\vec{F}|}{|\ddot{\vec{r}}|}$ (äußere beliebige Kraft), träge Masse läßt sich exp. durch erfahrene Kraft und resultierende Beschleunigung messen

- $m_s = \frac{|\vec{F}|}{|\vec{g}|}$, da $\vec{F}_G = m_s \vec{g}$ balanciert man $\vec{F}_G$ durch äußere Kraft $\vec{F}$, sodaß die Masse ruht $\Rightarrow m_s$

Die Äquivalenz ist aber nicht a priori klar!

Anmerkung : Die Gravitationskraft ist die einzige fund. Kraft, die proportional ihrer Masse ist $\Leftrightarrow$ elektrische Kraft ...

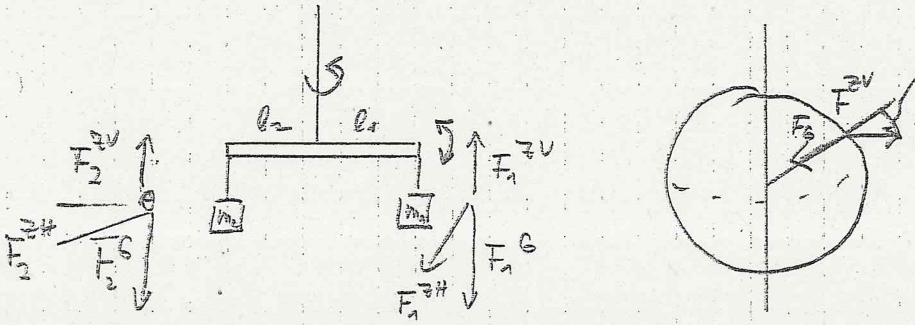
<u>Anmerkung</u>: ... Scheinkräfte, z.B. Zentrifugalkraft $\frac{mv^2}{r}\vec{e}_r$
sind (auch) proportional der Masse (genauer der trägen)..

$\Rightarrow$ ... <u>ist die Gravitationskraft eine Scheinkraft</u> ...???

<u>exp. Tests</u>: 1.) Galileo in Pisa, Turmfallexperiment

$\Rightarrow$ alle Körper fallen gleich schnell unabhängig ihrer Masse

2) Eötvös ("Ötwösch") (1889)



Austarieren in Vertikale: $m_{1t}, m_{1s} \Leftrightarrow m_{2t}, m_{2s}$

" in Horizontale: $m_{1t} \Leftrightarrow m_{2t}$ falls vert. austariert $\Rightarrow |D_H| \sim \left[\frac{m_1^t}{m_1^s} - \frac{m_2^t}{m_2^s}\right]$

heutiger Stand: $\left|\frac{m_s}{m_t} - 1\right| < 10^{-11}$ (R. Dicke et al)

Der absolute Raum

Fernwirkung, instantan

$$m\ddot{\vec{r}} = G\sum_i \frac{m\, m_i}{|(\vec{r}-\vec{r}_i)|^3}(\vec{r}-\vec{r}_i)$$

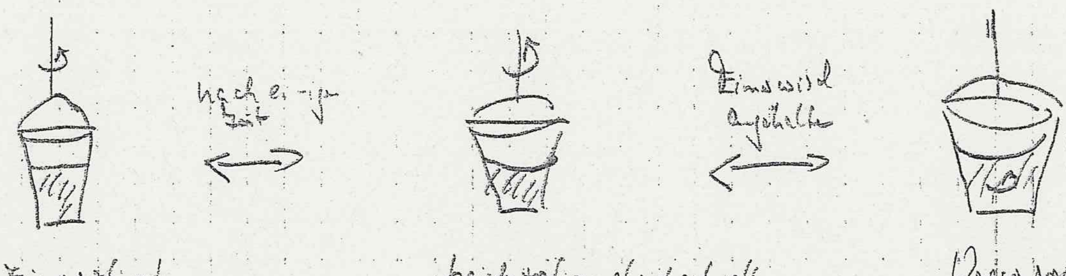
$\Rightarrow$ nicht Lorentzinvariant

behält ihre Form unter Galilei-Transformationen, i.e.

$$\vec{r} \Rightarrow \vec{r}\,' = \hat{R}\vec{r} + \vec{v}t + \vec{r}_0$$
$$t \to t' = t + t_0 \quad ;$$

aber nicht unter Lorentztransformationen.
(Die Elektrodynamik, deren Form sehr ähnlich aussieht, ist dies aber ...
richtige Theorie sollte Felder und Wellencharakter haben, Ausbreitung mit c ...)

Ähnlich wie im Falle von Maxwell (!?) bei seiner Theorie hatte Newton die Existenz eines absoluten Raums postuliert gegenüber dem (Galilei)-Inertialsysteme definiert sind. Scheinkräfte oder auch Trägheitskräfte treten nur in Bezugssysteme auf, die beschleunigt sind ($\vec{v} = \vec{v}(t)$) oder rotierenden ($\hat{R} = \hat{R}(t)$) und damit nicht uniform. Als Beweis führt Newton sein Eimer-Experiment an:



nur Eimer rotiert, Wasser rotiert (noch) nicht, Oberfläche gerade

beide rotieren gleichschnell, Wasserfläche parabolisch

Wasser rotiert weiter, Oberfläche parabolisch

Offenbar kommt es für das Auftreten der Fliehkräfte nicht auf die Rotation zwischen Wasser und Eimer an (sonst hätte Oberfläche selbe Form, man mache sich das klar), sondern auf die "absolute" Rotation des Wassers.

$\Rightarrow$ Rotation gegenüber Fixsternhimmel — lapidar

Was ist Inertialsystem?

Historisch wurde aber die Existenz eines absoluten (wenngleich leeren) Raum schon heftig von Leibnitz kritisiert. Gemäß Newton hätte ja der leere Raum schon eine enorme wichtige physikalische Bedeutung. Tatsächlich scheint aber gemäß dem Gedankenexperiment von Newton der Raum eine maßgebliche Bedeutung zu haben? Es gibt ja auch Zentrifugal-, Corioliskräfte

Aber wieder Zweifel bei Ernst Mach (1880):

Was ein Inertialsystem ist, in dem keine Scheinkräfte auftreten, wird bestimmt durch die Gravitationswirkung aller Massen des Universums. } Machsches Prinzip

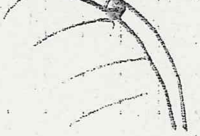
Anmerkung: Das Mach'sche Prinzip ist nicht korrekt. Auch im leeren Raum gibt es ein System mit euklidischer Metrik. Trotzdem kann es als wichtiger Geburtshelfer der AR erachtet werden, da es die Vermutung äussert, daß der Raum selbst durch die Gravitationskräfte der Körper beeinflußt wird.

Gravitation und Geometrie

Wie besprochen hängt die Bewegung eines Probeteilchens nicht von dessen Eigenschaft (Masse) ab. Daher kann die Bahn als eine Eigenschaft des vom Gravitationsfeld

Als Beispiel und Illustration:

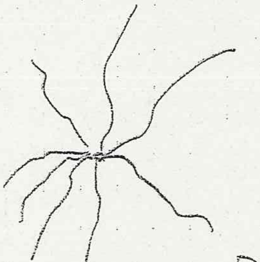
Bewegung eines Teilchens auf einer Kugel



Das Probeteilchen ~~bewegt~~ wird bestrebt sein sich entlang der Linie kürzester Entfernung zwischen zwei Punkten A und B ≙ geodätische Linie! Fahrwege Dies gilt anwendbar ganz allgemein für eine kräftefreie Bewegung eines Teilchens auf einer gekrümmten Fläche (vgl. später).

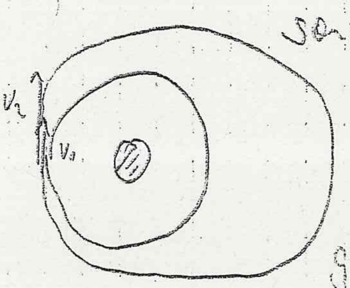
Wenn die Krümmung der Fläche in geeigneter Weise inhomogen, so kann es "Zentren" geben, von denen die Bahn "angezogen" wird.

Die Frage ist, ob es analog vielleicht einen gekrümmten 3-dim Raum die geometrische Beschreibung eines Gravitationsfeldes liefern könnte.
Durch jeden Punkt des Raumes gäbe es dann eine Schar geodätische Linien, die sich durch die Richtung ihrer Tangente in diesem Punkt unterscheiden.



Die Geodäte entspräche den verschiedenen Richtungen laufenden möglichen Bahn durch den vorgegebenen Punkt im Gravitationsfeld.

Die Schwierigkeit (im 3 dim Fall) liegt nun darin, daß auch bei gegebener Richtung die Form noch von dem Betrag der Geschwindigkeit der Bahn abhängt: Die Bahnen sind also so nicht nur durch die Richtung ihrer Tangente, sondern auch durch den Betrag der Geschwindigkeit erst eindeutig festgelegt! Also im 3-dim Raum bewegen sich die Probeteilchen nicht auf der Geodäte (wenn Potential vorhanden ... oder, wie wir später sehen werden, eine geeignete Metrik wäre Energie- oder geschwindigkeitsabhängig).



Die Beschreibung der Wirkung eines Gravitationsfeldes könnte erst mit den Mitteln der Relativitätstheorie gelingen. 3 dim → 4 dim (Raum-Zeit)

$$u^\mu = \frac{dx^\mu}{d\tau} \quad (\text{statt } \vec{v} = \dot{\vec{r}}\,), \quad u^\mu = \gamma(c, \vec{v}), \quad \gamma = (1-\beta^2)^{-\frac{1}{2}}, \quad u^\mu u_\mu = u^{0\,2} - \vec{u}^{\,2} = c^2,$$

d.h. der Vierervektor u^μ hat eine feste Länge, nur seine Richtung im Minkowski-Raum ist frei. Damit haben wir das wesentliche Hindernis, das der Geometrisierung entgegenstand, ausgeräumt: durch jeden Punkt des Minkowski-Raumes gibt es bei vorgegebener Richtung nur eine Weltlinie. Eine auf geometrische Prinzipien basierende Theorie des Gravitationsfeldes muß also notwendigerweise eine relativistische Theorie sein.

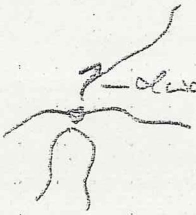
kurze Wiederholung:

$$g_{\mu\nu} \hat{=} \eta_{\mu\nu} = (1,-1,-1,-1)$$

$$(c\,d\tau)^2 = \sum_{\mu,\nu} \eta_{\mu\nu}\, dx^\mu dx^\nu = \eta_{\mu\nu}\, dx^\mu dx^\nu = (c\,dt)^2 - (d\vec{x})^2$$

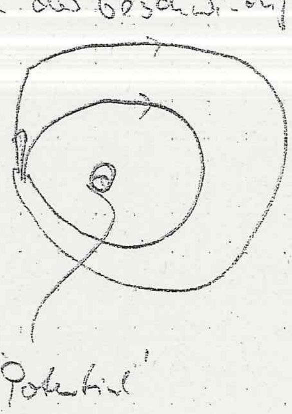
<u>Raum-Zeit und Geometrie</u>

- $m_s = m_t$ – allg. Postulat der AR
  (Eötvös-Experiment)
- Problem mit absolutem Raum
- Geodäte ≙ kürzeste Verbindung auf einer Fläche



durch Anfangsrichtung charakterisiert

aber Bewegung in 3-dim. hängt neben Richtung
auch von der Geschwindigkeit ab



Teilchen o.k., aber noch nicht richtig

⇒ Motivation für 4-dim.

$$u^\mu = \frac{dx^\mu}{d\tau} = \gamma\left(1, \frac{\vec{v}}{c}\right), \quad u^\mu u_\mu = u^{0\,2} - \vec{u}^{\,2} = c^2 = \text{konst}$$

⇒ <u>feste Länge</u>

„Potential"
à la
Gravitation
oder E-Dynamik,

also im Raum mit Krümmung (gekr. Fläche)
folgt Geodäte ... ← Energieerhaltung
<u>da</u> Geschwindigkeit im Betrag konstant ist, i.e.

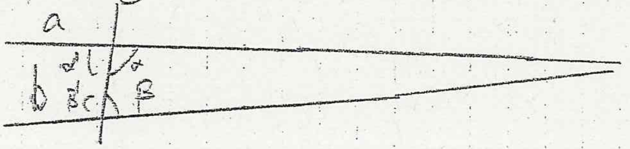
$$|\vec{v}| = \left|\frac{d\vec{s}}{dt}\right| = \text{const} \rightarrow ds \sim dt \ldots$$

Nichteuklidische Geometrie ⟺ Euklidische Geometrie

(3)

Euklid entwickelte in seinen "Elementen" die Geometrie aus 5 Axiomen, in denen die Bausteine, mit welchen sich die Geometrie beschäftigt (Punkte, Geraden, etc.), und ihre grundlegenden Eigenschaften festgelegt sind. Das fünfte Axiom, das sog. "Parallelaxiom", wurde zum Gegenstand einer langewährenden Kontroverse. Es lautet:

<u>Parallelaxiom</u>: Gegeben seien zwei Geraden a und b, die von einer dritten Gerade c geschnitten werden. Die Geraden a und b schneiden sich auf derjenigen Seite von c, auf der die Summe der eingeschlossenen Winkel, $(\alpha+\beta)$, kleiner als 180° ist.



$\alpha+\beta<180°$

$\alpha'+\beta'>180°$

Ist $\alpha+\beta=180°$, so schneiden sich die Geraden a und b nicht, man nennt sie <u>parallel</u>.

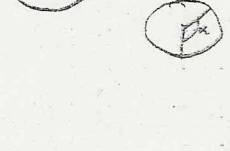
Vielen Mathematikern erschien dieses fünfte Axiom überflüssig, aber es gelang nicht, seinen Inhalt aus den anderen vier Axiomen herzuleiten. Vor 150 Jahren gelang es Bolyai, Lobatschewski und Gauß, eine Geometrie <u>ohne</u> das Parallelaxiom zu konstruieren (ein unendlicher Raum konstanter <u>neg.</u> Krümmung), die sich in wesentlichen Punkten von der euklid. Geometrie unterscheidet, aber die ersten vier Axiome, nicht aber das fünfte erfüllt.

<u>Anmerkung</u>: 1) euklidische Geometrie ≙ rechtwinklige Geometrie, Satz von Pythagoras ...

2) Kugeloberfläche ≙ Fläche konstanter positiver Krümmung

(Winkelsumme im Dreieck immer größer als 180°

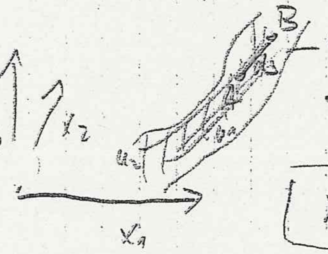
z.B. Σ Winkel = $90°+90°+\alpha$



<u>Aber</u>: Kugeloberfläche endlich, keine parallelen Linien, da nicht "unendlich" viel Platz

3) Lorentz-Metrik (Minkowski-Raum) - Raumzeitlich

Im weiteren entwickelte Gauß eine allgemeine Theorie der gekrümmten Flächen im dreidimensionalen Raum, wobei er ~~a~~ und das war das eigentlich Neue – ausschließlich auf die inneren Eigenschaften der Fläche stützte und nicht auf die Eigenschaften der Einbettung der Fläche im Raum (obwohl dies unserer Anschauung sehr erleichtert und gleichzeitig den Startpunkt unserer weiteren Überlegung bildet). Wenn etwa eine gekrümmte Fläche gedreht wird, ändert sich ihre Einbettung im Raum, nicht aber ihre innere Eigenschaften der Fläche wie z.B. Krümmung.



$$\boxed{x_i = \varphi_i(u_1, u_2)}$$

Der Abstand zwischen Punkt A und B ist eine <u>innere</u> Eigenschaft und hängt nicht von der Einbettung im (euklidischen) Raum ab, und auch nicht von der eigentlichen Wahl des Koordinatennetzes u_1, u_2 ?

$$A = (x_1, x_2, x_3) \quad , \quad B = (x_1 + dx_1 \,,\, x_2 + dx_2 \,,\, x_3 + dx_3) \quad \longrightarrow \quad A(u_1, u_2) \;, B(u_1 + du_1, u_2 + du_2)$$

$$\Rightarrow \quad dx_i = \frac{\partial \varphi_i}{\partial u_1} du_1 + \frac{\partial \varphi_i}{\partial u_2} du_2$$

euklidisch

$$\Rightarrow \quad ds_{A,B} = \sqrt{dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2} = \left(\sum_{\nu=1}^{3} dx_\nu^2 \right)^{\frac{1}{2}} = \left[\sum_{\nu=1}^{3} \left(\sum_{i=1}^{2} \frac{\partial \varphi_\nu}{\partial u_i} du_i \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}} =$$

$$= \left[\sum_{\nu=1}^{3} \sum_{i,k=1}^{2} \frac{\partial \varphi_\nu}{\partial u_i} \frac{\partial \varphi_\nu}{\partial u_k} du_i \, du_k \right]^{\frac{1}{2}}$$

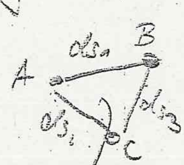
bzw

$$ds^2 = \sum_{i,k=1}^{2} \underbrace{\left(\sum_{\nu=1}^{3} \frac{\partial \varphi_\nu}{\partial u_i} \frac{\partial \varphi_\nu}{\partial u_k} \right)}_{:= g_{ik}(u_i, u_k) \text{ – metrische Tensor}} du_i \, du_k \;\hat{=}\; \sum_{i,k=1}^{2} g_{ik}(u_1, u_2) \, du_i \, du_k$$

$g_{ik} = g_{ki}$

Der Abstand wird allein durch die inneren Koordinaten u_i, u_k und der Abstandsfunktion $g_{ik}(u_i, u_k)$ berechnet, die eigentliche Einbettung spielt keine Rolle.

<u>Anmerkung</u>: Man mache sich <u>klar</u>, daß die Spezifikation $g_{ik}(u_1,u_2)$ für alle u_1,u_2 eindeutig schon die (Konstruktion der) gesamte Fläche beinhaltet. Benachbarte Punkte wird eindeutig ein Abstand zugeordnet und damit eindeutig die Stellung im Raum, sobald 3 Punkte im Raum justiert sind.



(Drehung + Verschiebung der Fläche im Raum bei der willkürlichen Lage von A → Verschiebung, und Drehung B+C).

+ eine Raumspiegelung für nächsten Punkt D

~~3.11.2000.~~

Natürlich gibt es viele verschiedene Sätze innerer Parameter, weil man ja die Fläche auf <u>mannigfaltige</u> Weise mit einem Koordinatennetz überziehen kann (Mannigfaltigkeit). Die Funktionen $g_{ik}(u_1,u_2)$ selbst drücken also noch nicht die <u>invarianten</u> inneren Eigenschaften der Fläche aus (obwohl sie sie beinhalten). Man kann aber leicht von einem inneren Koordinatensystem u_1,u_2 zu einem anderen v_1,v_2 übergehen, wenn der Zusammenhang

$$u_i = u_i(v_1,v_2) \Leftrightarrow v_i = v_i(u_1,u_2)$$ bekannt ist.

Nach der Kettenregel ist nämlich

$$ds^2 = \sum_{i,k=1}^{2} g_{ik}\, du_i\, du_k = \sum_{i,k=1}^{2}\sum_{l,m}^{2} g_{ik} \frac{du_i}{dv_l} dv_l \frac{du_k}{dv_m} dv_m$$

$$= \sum_{l,m}^{2} \tilde{g}_{lm}\, dv_l\, dv_m$$

mit $$\tilde{g}_{lm} = \sum_{i,k=1}^{2} \frac{\partial u_i}{\partial v_l}\frac{\partial u_k}{\partial v_m} g_{ik}$$ (– Tensortransformation)

bzw. $$g_{ik} = \sum_{l,m=1}^{2} \frac{\partial v_l}{\partial u_i}\frac{\partial v_m}{\partial u_k}\tilde{g}_{lm}$$

$$\boxed{g_{ik} = g_{ki}}$$ – symmetrisch

Eine invariante Eigenschaft: Gaußsche Krümmung

$$
\begin{aligned}
K(u_1,u_2) = {} & \frac{1}{2g}\left[2\frac{\partial^2 g_{12}}{\partial u_1 \partial u_2} - \frac{\partial^2 g_{11}}{\partial u_2^2} - \frac{\partial^2 g_{22}}{\partial u_1^2}\right] \\
& - \frac{g_{22}}{4g^2}\left[\frac{\partial g_{11}}{\partial u_1}\left(2\frac{\partial g_{12}}{\partial u_2} - \frac{\partial g_{22}}{\partial u_1}\right) - \left(\frac{\partial g_{11}}{\partial u_2}\right)^2\right] \\
& + \frac{g_{12}}{4g^2}\left[\frac{\partial g_{11}}{\partial u_1}\frac{\partial g_{22}}{\partial u_2} - 2\frac{\partial g_{11}}{\partial u_2}\frac{\partial g_{22}}{\partial u_1} + \left(2\frac{\partial g_{12}}{\partial u_1} - \frac{\partial g_{11}}{\partial u_2}\right)\left(2\frac{\partial g_{12}}{\partial u_2} - \frac{\partial g_{22}}{\partial u_1}\right)\right] \\
& - \frac{g_{11}}{4g^2}\left[\frac{\partial g_{22}}{\partial u_2}\left(2\frac{\partial g_{12}}{\partial u_1} - \frac{\partial g_{11}}{\partial u_2}\right) - \left(\frac{\partial g_{22}}{\partial u_1}\right)^2\right]
\end{aligned}
$$

– invariant gegenüber Koordinatentransformation

$$\hookrightarrow g = \det g_{ik} = g_{11} g_{22} - g_{12}^2 = g(u_1, u_2)$$

Beispiel: Kugeloberfläche

$$x_1 = R\sin\theta\cos\varphi$$
$$x_2 = R\sin\theta\sin\varphi \quad , \quad \theta = u_1,\ \varphi = u_2$$
$$x_3 = R\cos\theta$$

$$
\Rightarrow \left.\begin{aligned}
g_{11} &= \sum_{\nu=1}^{3}\left(\frac{\partial x_\nu}{\partial u_1}\right)^2 = \sum_{\nu=1}^{3}\left(\frac{\partial x_\nu}{\partial \theta}\right)^2 = \ldots = R^2 \\
g_{22} &= \sum_{\nu=1}^{3}\left(\frac{\partial x_\nu}{\partial \varphi}\right)^2 = R^2\sin^2\theta \\
g_{12} &= \sum_{\nu=1}^{3}\frac{\partial x_\nu}{\partial \varphi}\frac{\partial x_\nu}{\partial \theta} = 0
\end{aligned}\right\} \text{ i.e. } ds^2 = R^2 d\theta^2 + R^2\sin^2\theta\, d\varphi^2 \mathrel{\hat{=}} \sum_{ik} g_{ik}\, du_i\, du_k
$$

($g_{12}=0$, also das Fehlen von Mischterm $d\theta\, d\varphi$, da die Linien des Koordinatennetzes sich im rechten Winkel schneiden, i.e. orthogonales Koordinatensystem)

$$g = R^4\sin^2\theta, \quad \frac{\partial g_{22}}{\partial u_1} = \frac{\partial g_{22}}{\partial \theta} = 2R^2\sin\theta\cos\theta = R^2\sin 2\theta$$

, alle anderen Ableitungen verschwinden?

$$
\begin{aligned}
\Rightarrow K(\theta,\varphi) &= \frac{1}{2g}\left[-2R^2\cos 2\theta\right] - \frac{\overset{g_{11}}{R^2}}{4g^2}\left[-\left(R^2\sin 2\theta\right)^2\right] \\
&= -\frac{1}{R^2}\frac{\cos 2\theta}{\sin^2\theta} + \frac{1}{4R^2}\frac{\sin^2 2\theta}{\sin^4\theta} = \frac{1}{R^2}\left(-\frac{\cos^2\theta - \sin^2\theta}{\sin^2\theta} + \frac{1}{4}\,\frac{4\sin^2\theta\cos^2\theta}{\sin^4\theta}\right) = \underline{\underline{\frac{1}{R^2}}}
\end{aligned}
$$

In drei Dimensionen

$$ds^2 = \sum_{i,k}^{3} g_{ik}\, du_i\, du_k \quad , \quad x_i = f_i(u_1, u_2, u_3)$$

Einbettung einer 3-dim "Fläche" in 3-Dimensionen, i.e. z.B. Koordinatenumbenennung

Beispiel: Kugelkoordinaten

$$ds^2 = dr^2 + r^2 d\vartheta^2 + r^2 \sin^2\vartheta\, d\varphi^2$$

Christoffel-Symbole in der klassischen Mechanik

hochgestellt

$$v^2 = \left(\frac{ds}{dt}\right)^2 = g_{ik} \frac{dx^i}{dt} \frac{dx^k}{dt}$$

(x^i - allg. Koordinaten)

($g_{ik} = g_{ik}(x^i) - g_{ki}(x^i)$)

↳ nicht zeitabhängig

Kräftefreie Bewegung

stationär

$$L = \frac{1}{2} m v^2 = \frac{1}{2} m g_{ik} \dot{x}^i \dot{x}^k$$

innere Ableitung

$$\Rightarrow \frac{\partial L}{\partial \dot{x}^l} = \frac{1}{2} m \left(g_{ik} \dot{x}_i \delta^k_l + g_{ik} \dot{x}^k \delta^i_l\right) = m g_{lk} \dot{x}^k \quad , \quad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_l}\right) = m g_{lk} \ddot{x}^k + m\left(\frac{\partial g_{lk}}{\partial x_i} \dot{x}_i\right) \dot{x}_k$$

$$\frac{\partial L}{\partial x^l} = \frac{1}{2} m \frac{\partial g_{ik}}{\partial x^l} \dot{x}^i \dot{x}^k = \frac{1}{2} m g_{ik|l} \dot{x}^i \dot{x}^k \quad , \text{ wobei } g_{ik|l} = \frac{\partial g_{ik}}{\partial x^l}$$

⇒ Euler-Lagrange-Gleichungen

$$g_{lk} \ddot{x}^k + \underbrace{g_{lk|i} \dot{x}^k \dot{x}^i}_{\frac{1}{2} g_{lk|i} \dot{x}^k \dot{x}^i + \frac{1}{2} g_{li|k} \dot{x}^i \dot{x}^k} - \frac{1}{2} g_{ik|l} \dot{x}^i \dot{x}^k = 0$$

$$\Rightarrow g_{lk} \ddot{x}^k - \frac{1}{2}\left(g_{lk|i} + g_{li|k} - g_{ik|l}\right) \dot{x}^i \dot{x}^k = 0$$

Definieren den inversen (existiert) Tensor g^{hl} mit

$$g^{hl} g_{lk} = \delta^h_k$$

Damit definiere wir die Koeffizienten (Christoffel-Symbole)

$$\Gamma^h_{ki} = \frac{1}{2} g^{hl} \left(g_{lk,i} + g_{il,k} - g_{ki,l} \right) \qquad \left\{ \hat{=} \left\{ {h \atop k\,i} \right\} \right\}$$

(Achtung definiert hier bei den Γ's ein (-)-Zeichen)

(Aufgrund $g_{ik} = g_{ki}$ folgt auch $\Gamma^h_{ki} = \Gamma^h_{ik}$)

Und es ist

$$\boxed{\ddot{x}^h + \underbrace{\Gamma^h_{ki} \, \dot{x}^i \dot{x}^k}_{} = 0}$$

Zwangskräfte, "Scheinkräfte, geschwindigkeitsabhängig"
(wenn eigentlich eigentlich keine Gravitation sein, denn bis Dim $\dot{x}^0 \approx c$, $v/c \ll 1$
$\Rightarrow \Gamma^h_{00}$ könnte Gravitation enthalten)

(Zur Vertiefung: Geodätengleichung

$$ds = \sqrt{g_{ik}\, dx^i dx^k}, \qquad \delta \int_A^B ds \stackrel{!}{=} 0, \quad s \hat{=} \text{Bogenlänge}$$

$$\Rightarrow \delta \int_A^B \frac{ds}{ds} ds = \delta \int_A^B \sqrt{g_{ik} \frac{dx^i}{ds} \frac{dx^k}{ds}}\, ds \stackrel{!}{=} 0$$

...

$$\Rightarrow \frac{d^2 x^h}{ds^2} + \Gamma^h_{ki} \frac{dx^i}{ds} \frac{dx^k}{ds} = 0$$

Sieht ähnlich aus, ist es aber nicht, da hier nun $|v| = \sqrt{\left(\frac{dx^k}{ds}\right)^2} \stackrel{!}{=} 1$ und nicht beliebig $\Rightarrow$ altes Problem mit Gravitation, Geodäte und 3-Dimensionen.
Aber: In 4 Dimensionen wird die Bogenlänge $ds \to d\tau$ die Eigenzeit.)

geändert 1.11.2000
[illegible]

<u>Beispiel:</u> Berechnung der Christoffel-Symbole am Beispiel der Kugelkoordinaten (r, ϑ, φ)

$$L = \frac{1}{2} m \left(\dot{r}^2 + r^2 \dot{\vartheta}^2 + r^2 \sin^2\vartheta \, \dot{\varphi}^2 \right)$$

$\Rightarrow$ Euler-Lagrange-Gleichungen

$$\left.\begin{aligned} \ddot{r} - r\dot{\vartheta}^2 - r\sin^2\vartheta \, \dot{\varphi}^2 &= 0 \\ \ddot{\vartheta} + \frac{2}{r}\dot{r}\dot{\vartheta} - \sin\vartheta\cos\vartheta \, \dot{\varphi}^2 &= 0 \\ \ddot{\varphi} + \frac{2}{r}\dot{r}\dot{\varphi} + 2\cot\vartheta \, \dot{\varphi}\dot{\vartheta} &= 0 \end{aligned}\right\} \text{Koeffizientenvergleich} \Rightarrow$$

$$\Gamma^1_{22} = -r, \quad \Gamma^1_{33} = -r\sin^2\vartheta$$

$$\Gamma^2_{12} = \Gamma^2_{21} = \frac{1}{r}, \quad \Gamma^2_{33} = -\sin\vartheta\cos\vartheta$$

$$\Gamma^3_{13} = \Gamma^3_{31} = \frac{1}{r}, \quad \Gamma^3_{23} = \Gamma^3_{32} = \cot\vartheta$$

— alle anderen sind 0. —

- richtige Lösungen würden aber gerade Bahn ergeben, insofern etwas unglückliche Wahl der Koordinaten
- Man hätte die Christoffelsymbole auch direkt ableiten können, was aber langwieriger gewesen wäre. Praktisches Konzept daher direkt über Bewegungsgleichungen

Riemann-Geometrie – Ursprung der Differentialgeometrie

(1826–1866)

Verallgemeinerung von Gauß's Ideen von 2 auf n-Dimensionen (Riemann, 1854)
(Habilitationsvortrag, Über die Hypothesen, welche der Geometrie zu Grunde liegen).

← (Welt-)Punkt ← obere Indizierung (Begründungsgeschichte)

$$A = \{x^1, \dots, x^n\}$$

Definiere Metrik (Abstands-quadrat) – Riemannsche Mannigfaltigkeit

Einsteinsche Summenkonvention (über obere und untere gleiche Indizierung wird summiert)

$$ds^2 = \sum_{i,k=1}^{n} g_{ik}(x^i)\, dx^i dx^k = g_{ik}\, dx^i dx^k \quad ; \quad g_{ik} = g_{ki}$$

– verallg. Pythagoras-Formel

Koordinatentransformation: $x^i \to u^i$, fordere daß Abstandsquadrat (als skalare Größe) invariant bleibt (Kettenregel)

$$\Rightarrow \quad \tilde{g}_{ik}(u) = \left(\sum_{l,m}\right) \frac{dx^l}{du^i} \frac{dx^m}{du^k}\, g_{lm}(x(u))$$

– Tensortransformation

Die Koeffizienten g_{ik} beschreiben die geometrischen Eigenschaften in einem "krummlinigen" Koordinatensystem. Im Rahmen der Allg. Relativitätstheorie spielen die Koeffizienten g_{ik} eine fundamentale Rolle. ("Masseverteilung bestimmt g_{ik}").

- Klassische euklidische Geometrie ist Spezialfall

$$ds^2 = \sum_{i=1}^{3} dx_i^2 \quad , \quad g_{ik} \mathrel{\hat{=}} \delta_{ik}$$

- Warum ist unser gewöhnlicher Raum euklidisch?

"Riemann schlug bereits vor, daß die spez. Wahl einer Geometrie in Natur von der Realität, die den Raum kreiert oder bestimmt, abhängt, das heißt, die Verteilung von Materie und Kräfte, die im Raum wirken, sollten die Geometrie bestimmen.
Er beendet seine Schrift mit der Bemerkung, daß wir an dieser Stelle das Feld der Geometrie verlassen und in das Feld der Physik übergehen."

⇒ Riemann war Vorreiter des Wegbereiters der AR

- $g^{ik} \equiv (g_{ik})^{-1}$ – inverse Metrik

- $g_{ik} g^{kl} = \delta_i^{\,l} \mathrel{\hat{=}} g_i^{\,l}$

- $g^{ik} = g^{ki}$

- <u>Minkowski-Raum</u>

$$ds^2 = dx^{0\,2} - \left[dx^{1\,2} + dx^{2\,2} + dx^{3\,2}\right] \quad , dx^0 \mathrel{\hat{=}} c\,dt$$

$$\eta_{ik} = g_{ik} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -\mathbb{1}_3 \end{pmatrix}$$ – pseudoeuklidisch, hyperbolische Metrik

- <u>lokaler euklidischer Raum</u> – geodätisches Bezugssystem

Es läßt sich Koordinaten u^i finden, so daß in einer "kleinen" Umgebung (pseudo) euklidische Metrik gilt

$$\tilde{g}_{ik}(A) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & (\pm)\mathbb{1}_{n-1} \end{pmatrix}$$, also hier der Pythagoraische Satz gilt.

↑ transformiertes g_{ik} in den u-Koordinaten

Das wird ein <u>Hauptpostulat</u> der AR sein, i.e. daß in jedem Raum-Zeit-Punkt ein lokales Koordinatensystem eingeführt werden kann, in dem die Gravitation nicht wirksam ist und in dem der Raum lokal ein Minkowski-Raum ist.