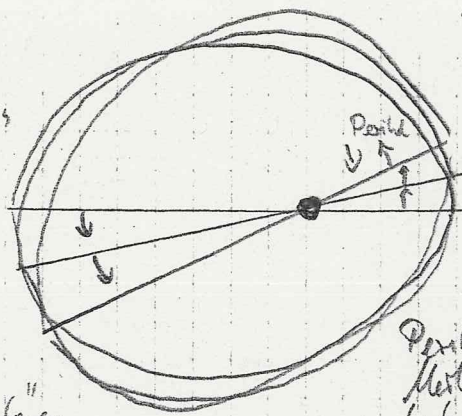


Periheliondrehung der Merkurbahn

"Rosettenbahnen"



Wir wenden uns nun der Kepler-Bewegung im Rahmen der allg. Rel.-theorie zu. Bzw. wir explizit die Bewegung eines massiven Körpers (ich überlasse).

Punktteilchen mit fast verschwindender Masse, das nicht die Metrik des Körpers (ich überlasse) im Schwarzschildfeld lösen,

rekapitulieren wir zunächst einige bekannte Resultate der klassischen Newtonschen Mechanik:

1.) 1. Keplersches Gesetz: Planeten bewegen sich auf geschlossenen elliptischen Bahnen in denen einem Brennpunkt die Sonne steht.

Aufgrund der Störungen, die die Planeten aufeinander ausüben, ist dieses Gesetz nicht exakt erfüllt, d.h. die Planetenbahnen sind nicht genau elliptisch.

Mittels der himmlischen Störungsrechnung lässt sich aber die Bahn näherungsweise berechnen. Man findet, daß die (ungefähr) Bewegung der Planeten tatsächlich selbigen dem Keplerschen Gesetz folgt, mit Ausnahme der Bewegung des inneren Planeten Merkur,

bei dem eine unerklärte Drehung der Bahnachse um ca. 43 Bogensekunden je Jahrhundert (gegeben:  $\frac{1}{360} \text{ Grad} = 1000 \text{ Bogensekunden}$ ) übrig bleibt. Dieses Resultat wurde von Le Verrier 1859 gefunden.

→ man spricht von der sog. Periheliondrehung.

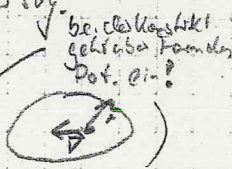
2.) Bereits Newton wusste, daß eine kleine Abweichung vom  $\frac{1}{r^2}$ -Gesetz der Gravitationskraft (vgl. Dicke: Applikation der Sonne liefert Quadrupolterm  $V(r) = -\frac{GM}{r} [1 + D \frac{3\cos^2\theta - 1}{r^2}] + O(\frac{1}{r^4})$ )

$\approx -\frac{GM}{r} - \frac{B}{r^3} \rightarrow$  mögl. alternative Erklärung (siehe Kap 6.6), die sich aber als nicht akzeptabel erweist)

dazu führt wurde, daß die Planetenbahnen nicht geschlossen wären, sondern rosettenförmige Gestalt haben (Aufg. 28.4, Mechanik 1, W. Greiner, S. 359)

Die Ursache für die Geschlossenheit liegt am spez.  $\frac{1}{r^2}$ -Gesetz (!), oder anders ausgedrückt, es existiert dann neben dem Drehimpulsvektor noch ein weiterer erhaltene Vektor, der sog.

Lenz-Runge-Vektor (Aufg. 26.11, Mechanik 1, W. Greiner, S. 301):  $\vec{V} = \frac{1}{kMm} [\vec{L} \times \vec{p}] + \frac{\vec{r}}{r}$  (er zeigt vom Brennpunkt zum Mittelpunkt und sein Betrag ist gleich der Exzentrizität der Bahn)



bei der Konstruktion geht es um Formeln Pot. ein?



Wenden wir uns nun dem AR Kepler-Dreikörper zu. Als erstes nehmen wir an, daß die Sonne kugelförmig ist, so daß die Geometrie des Raumes, in dem sich die Planeten bewegen, durch die S.M. beschrieben werden:

$$c^2 dt^2 = \left(1 - \frac{2m}{r}\right) c^2 dt^2 - \frac{dr^2}{1 - \frac{2m}{r}} - r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2), \quad m = \frac{GM_\odot}{c^2}$$

Für die Bewegung der Planeten idealisieren wir sie als Punktteilchen, die dann entsprechend der Geodätengleichung folgt. Man kann nun explizit (wie bereits getan) die Christoffel-Symbole  $\Gamma_{\mu\nu}^\lambda$  berechnen, man muß nur das Ergebnis für  $r, \theta$  einsetzen. Wir können aber wesentlich eleganter die Dgl der geodätischen Linie aus einer Extremalbedingung für die (4-dim) Kurvenlänge gewinnen

$$\delta \int d\tau = 0, \quad d\tau = \frac{1}{c} (g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu)^{\frac{1}{2}}$$

Dies werde ich einen kleinen Trick, indem wir in den Integral eine  $\lambda$  einschreiben, die wir mittels obiger Gleichung durch Division mit  $d\tau$  erhalten, i.e.

$$c^2 = \left(1 - \frac{2m}{r}\right) c^2 \dot{t}^2 - \frac{\dot{r}^2}{\left(1 - \frac{2m}{r}\right)} - r^2 (\dot{\theta}^2 + \sin^2 \theta \dot{\phi}^2) \quad (1)$$

← Punkt bedeutet Ableitung nach der Eigenzeit

Damit wird

$$\delta \left( \int d\tau \left[ \left(1 - \frac{2m}{r}\right) c^2 \dot{t}^2 - \frac{\dot{r}^2}{\left(1 - \frac{2m}{r}\right)} - r^2 (\dot{\theta}^2 + \sin^2 \theta \dot{\phi}^2) \right] \right) = 0$$

← Maximierung der Eigenzeit

(man überzeugt sich, daß dieser Trick nichts anderes liefert als die Variation nach  $\frac{1}{c} (g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu)^{\frac{1}{2}}$ , wie wir es früher abgeleitet haben). Als Kurvenparameter verwenden wir die Eigenzeit selbst.

Die Variation nach  $t(\tau), \theta(\tau), \phi(\tau)$  ergibt die folgenden drei Euler-Gleichungen:

$$\frac{d}{d\tau} \left[ \left(1 - \frac{2m}{r}\right) \dot{t} \right] = 0 \quad (2a)$$

$$\frac{d}{d\tau} (r^2 \dot{\theta}) - r^2 \sin \theta \cos \theta \dot{\phi}^2 = 0 \quad (2b)$$

$$\frac{d}{d\tau} (r^2 \sin^2 \theta \dot{\phi}) = 0 \quad (2c)$$

Beachte, daß wir nicht auch die vierte Euler-Gleichung für  $r(\tau)$  aufgestellt haben. Dies können wir. Diese läßt sich aber mittels der anderen 3 sofort integrieren und gebe genau die obige Beziehung (1):  $c^2 = \left(1 - \frac{2m}{r}\right) \dot{t}^2 - \frac{\dot{r}^2}{\left(1 - \frac{2m}{r}\right)} - r^2 (\dot{\theta}^2 + \sin^2 \theta \dot{\phi}^2)$ . Unsere 4 Gleichungen sind also (1) und (2).



Von der klassischen Mechanik wissen wir, daß die Bahn eines Körpers in einem Zentralkraftfeld in einer Ebene liegt, i.e. o.B.d.A.  $\Theta = \frac{\pi}{2}$ . Dies gilt auch hier, wie man leicht sieht, i.e. eine spez. Lsg. von (2b) ist gerade  $\Theta(t) = \frac{\pi}{2}$ . Aufgrund der Radialsymmetrie des SS ist das aber sofort klar, daß jede Bahn in einer Ebene liegt, und wir wählen das Koordinatensystem für  $\theta, \phi$  frei wählen dürfen. Aus (2a) (2c) wird nun

$$(1 - \frac{2m}{r}) \dot{t} = a = \text{const} \tag{3a}$$

und für  $\theta(t) = \frac{\pi}{2}$ :

$$r^2 \dot{\phi} = h = \text{const} \tag{3b}$$

↳ einsetzen in Gg. (1) ergibt eine Bestimmungsgleichung für  $\dot{r}$ :

$$c^2 = \frac{c^2 a^2 - \dot{r}^2}{1 - \frac{2m}{r}} - \frac{h^2}{r^2} \tag{4}$$

Analog dem klassischen Kepler-Problem überführt sich diese Differentialgleichung, wenn wir von  $r(t)$  auf die Variable  $u(\phi) = \frac{1}{r(\phi)}$  übertragen:

$$r' \equiv \frac{dr}{dt} = \frac{dr}{uT} \left( \frac{d\phi}{dt} \right)^{-1} = \frac{r}{\phi} = \frac{r^2 \dot{r}}{h} \xrightarrow{(4)} c^2 = \frac{c^2 a^2 - h^2 \frac{r'^2}{r^2}}{1 - \frac{2m}{r}} - \frac{h^2}{r^2}$$

$$u'(y) = -\frac{1}{r^2} r'(y)$$

$$\Rightarrow c^2 (1 - 2mu) = c^2 a^2 - h^2 u'^2 - h^2 u^2 (1 - 2mu) \tag{5}$$

bzw.  $u' = \frac{du}{d\phi} = \left( \frac{c^2 a^2}{h^2} - (c^2 + u^2)(1 - 2mu) \right)^{\frac{1}{2}}$

mit dem Integral

a wird im Sext mit der Energie  $a = \sqrt{1 + \frac{E}{mc^2}}$  (S. 108 u. 4) identifiziert.

$$\phi = h \int \frac{du}{[c^2 a^2 - (c^2 + u^2)(1 - 2mu)]^{\frac{1}{2}}} + \text{const.}$$

Dieses Integral läßt sich nicht analytisch lösen. Tatsächlich läßt es sich aber störungstheoretisch entwickeln und man kann so direkt, wenig leistungsaufwendend, zur Periheliondrift gelangen (vgl. Sext/Verbanke, Kap. 4.3, S. 111-112). Wünschenswert wäre ein anderer Vorgehensweg.



In diesem Zweck differenzieren wir (5) nach  $\phi$ , mit dem Ergebnis

$$-2mc^2 u' = -2h^2 u' u'' - 2h^2 u u' (1 - 3mu) \quad (6)$$

Wenn wir die mögliche Lösung  $u' = 0$ , die einen Kreis mit feste Radius  $r$  darstellt (man könnte da auch Perihelionbewegung geschwindig feststellen), außer Acht lassen erhalten wir also eine aus nicht verstrahlte DGL 2-ter Ordnung:

$$u'' + u = \frac{mc^2}{h^2} + 3mu^2 = \frac{GM_0}{h^2} + \frac{3GM_0}{c^2} u^2 \quad (7)$$

In der kl. Newtonschen Mechanik (analoge entsprechende Bewegungsgleichung für ein beliebiges Zentralpotential  $V(r)$ ):

$$u'' + u = \frac{1}{h^2 u^2} \frac{dV}{dr} = -\frac{1}{h^2} \frac{dV}{du} \quad )$$

wobei  $h = r^2 \frac{d\phi}{dt}$  eine Konstante der Bewegung ist (Flächensatz!) Speziell für das Newtonsche Potential  $V(r) = -\frac{GM}{r} = -GMu$  ist also

$$u'' + u = \frac{GM}{h^2} \quad (8)$$

Die Konstanten  $h$  und  $H$  unterscheiden sich geringfügig. Es ist nämlich

$$h = r^2 \frac{d\phi}{dt} = r^2 \frac{d\phi}{dt} \frac{dt}{dr} = H \frac{a}{1-2mu}$$

Wir stellen also fest, daß die nat. Gleichung (7) und die nichtrel. Gleichung (8) sich in zwei Punkten unterscheiden: Zum einen ist die Konstante verschieden ( $H = \frac{h}{a} (1 - \frac{2m}{r})$  ist nicht mehr zeitl. konstant... könnte man das nicht messen???) , zum anderen fehlt ( $h$  in (8)) das in (7) quadratische Term. Formal können wir die Gl. (7) aus der allgemeineren Form der nichtrel. Gleichung gewinnen, wenn wir ein vom  $\frac{1}{r}$ -Verhalten abweichendes Potential annehmen. Wir setzen einfach fest

$$\frac{1}{H^2} \frac{dV}{du} \rightarrow \frac{1}{h^2} \frac{dV}{du}, \text{ da } H \text{ bzw. } h \text{ jeweils eine Konstante der Bewegung (natl. oder rel.)}$$

$$\frac{1}{h^2} \frac{dV}{du} \stackrel{!}{=} -\frac{GM}{h^2} + \frac{3GM}{c^2} u^2 \Rightarrow V(u) = -GMu + \frac{GMh^2}{c^2} u^3$$

$$\Rightarrow \left[ V_{\text{eff}}(r) = -\frac{GM}{r} + \frac{GM}{c^2} \frac{h^2}{r^3} \right]$$

einem effektiven, abstimpabhängigen ( $h \hat{=} \frac{L}{m_{\text{planet}}}$ ) Potential.

(Dies erklärt warum die Sonnenabplattungs Theorie nicht ich nicht dasselbe liefern kann, da dort das Potential

nicht abh. von Drehimpuls abh. ist



Führen wir nun fort mit Gl. (17). Aufgrund des zusätzlichen  $u^2$ -Terms dürfen wir die Perihelgleichung erwarten, da dieses  $\gamma$ -eff. ein  $\frac{1}{c^2}$ -Pot. suggeriert und dies zu Perihelgleichung führt. Wir dürfen allerdings theoretisch vorgehen, wenn wir zeigen können, daß dieses sehr viel kleiner als der erste Term auf der rechten Seite ist? :  
Wir bezeichnen mit  $A$  die Konstante

$$A \equiv \frac{mc^2}{h^2} = \frac{GM}{h^2}$$

und setzen

$$\epsilon = 3m A = \frac{3GM}{c^2}$$

$$\left. \begin{array}{l} \dim[E] = \text{Meter}, \text{ da } \frac{2m}{r} \text{ dimensionslos} \\ \dim[\frac{GM}{c^2}] = \text{Meter} \end{array} \right\} \Rightarrow \dim[A] = \frac{1}{\text{Meter}}$$

$\epsilon$  ist dimensionslos

Führen wir nun die Variable  $v(\phi) \equiv \frac{1}{A} u(\phi)$  ein, so lautet Gl. (17):

$$v'' + v = 1 + \epsilon v^2 \quad (9)$$

Wir überzeugen uns zunächst davon, daß  $\epsilon$  eine kleine Zahl ist

(Wir wählen als Beispiel die Erde mit  $r \approx 1.5 \cdot 10^8 \text{ km}$ , Umlaufzeit  $T \approx 1 \text{ Jahr}$ )  
 $\frac{r}{c} \approx 1.5 \cdot 10^8 \text{ km} / 3 \cdot 10^5 \text{ km/s} \approx 500 \text{ s}$  - Schwarzschildradius der Sonne  $\approx 3 \text{ km}$

$$\epsilon_{\text{Erde}} = 3m A = 3 \left( \frac{mc}{h} \right)^2 \approx 3 \cdot \left( \frac{mc}{h^2 \frac{dr}{dt}} \right)^2 \approx 3 \left[ \frac{1.5 \text{ km} \cdot 3 \cdot 10^5 \text{ km/s}}{(1.5 \cdot 10^8 \text{ km})^2 \cdot \frac{2\pi}{3 \cdot 10^7 \text{ s}}} \right]^2 \approx 3 \cdot 10^{-8} \ll 1$$

Da gemäß (9) für Kreisbahnen ( $v''=0$ )  $v=1$  ohne den Zusatzterm gilt, können wir bedenkenlos annehmen, daß

$$\underline{\epsilon \cdot v^2} \approx \underline{\epsilon} \ll 1$$

und wir den Zusatzterm in (9) als (winzige) Störung behandeln dürfen.

Es empfiehlt sich deshalb, die Lösung der Glg. (9) nach Potenzen von  $\epsilon$  zu entwickeln:

$$v(\phi) = v_0(\phi) + \epsilon v_1(\phi) + \dots \quad O(\epsilon^2)$$

Es folgt

$$v_0'' + v_0 = 1 \quad (10a)$$

$$v_1'' + v_1 = v_0^2 \quad (10b)$$

Die Lösung der Glg. (10a) ist offenbar

$$v_0(\phi) = 1 + \eta \cos(\phi - \phi_0) \Rightarrow$$

$$v_0(\phi) = \frac{1}{A(1 + \eta \cos(\phi - \phi_0))} \quad ; \quad \phi_0, \eta \equiv \text{Integrationskonstante} \quad (11)$$

die offensichtlich eine Ellipse mit Exzentrizität  $\eta$  beschreibt mit dem Koordinatenursprung als einem Brennpunkt (o.B.d.A.  $\phi_0=0$ )



Mit dieser Lösung für  $v_0$  erhalten wir aus (10b) die bestimmende Dgl. für  $v_1$ :

$$\begin{aligned}v_1'' + v_1 &= (1 + \eta \cos \phi)^2 = (1 + 2\eta \cos \phi + \eta^2 \cos^2 \phi) \\ &= \left(1 + \frac{1}{2}\eta^2\right) + (2\eta \cos \phi) + \left(\frac{1}{2}\eta^2 \cos 2\phi\right)\end{aligned}$$

Aufgrund der Linearität können wir die Lösung in drei Anteile zerlegen

$$v_1 = v_{1a} + v_{1b} + v_{1c}$$

mit den Gleichungen

$$v_{1a}'' + v_{1a} = 1 + \frac{1}{2}\eta^2$$

$$v_{1b}'' + v_{1b} = 2\eta \cos \phi$$

$$v_{1c}'' + v_{1c} = \frac{1}{2}\eta^2 \cos 2\phi$$

( $1'$ ) benötigen nur spez. Lösungen, da der homogene Anteil (und damit die Wahl des Integrationsbereichs) bereits in der Dgl für  $v_0$  mit derselben homogenen Dgl vom Typ  $v'' + v = 0$  verarbeitet sind.

Spez. Lösungen findet man z.B.

$$v_{1a}(\phi) = 1 + \frac{1}{2}\eta^2$$

$$v_{1b}(\phi) = \eta \phi \sin \phi$$

$$v_{1c}(\phi) = -\frac{1}{6}\eta^2 \cos 2\phi, \quad \text{wie man leicht nachrechnet.}$$

Damit lautet die Lösung zu (9) exakt bis zur Ordnung  $\epsilon$

$$v(\phi) = 1 + \underline{\epsilon} \left(1 + \frac{\eta^2}{2}\right) + \eta \cos \phi - \underline{\epsilon} \frac{\eta^2}{6} \cos 2\phi + \underline{\epsilon} \eta \phi \sin \phi \quad (12)$$

Der letzte Term  $\epsilon \eta \phi \sin \phi$  muß für die Periheldrehung verantwortlich sein, da er der einzige in  $2\pi = \Delta\phi$  nicht periodische Term ist. Das Perihel ist definiert als der kürzeste Abstand zur Sonne, also das Minimum von  $r(\phi)$  oder Maximum von  $v(\phi)$ .

Die Lage des Perihels  $\phi_n$  erhalten wir also als Nullstelle der Ableitung von  $v(\phi)$ :

$$v'(\phi_n) = -\eta \sin \phi_n + \epsilon \frac{\eta^2}{3} \sin 2\phi_n + \epsilon \eta \phi_n \cos \phi_n + \epsilon \eta \sin \phi_n \stackrel{!}{=} 0$$

Das erste Perihel liegt offenbar bei

$$\phi_0 = 0$$

Für die Lage des  $n$ -ten Perihels setzen wir ein

$$\phi_n = n \cdot (2\pi) + \eta \cdot \delta_n$$



(Es kann sein, daß  $\delta_n$  von  $n$  abhängt. Es stellt sich aber sofort heraus, daß das nicht so ist).

Wir dürfen annehmen, daß  $\delta_n \in \mathbb{R}$ , also sehr klein ist. Daher entwickeln wir  $\cos$  in  $\delta_n \in \mathbb{R}$ :

$$-\eta n \delta_n + \frac{O(\epsilon \cdot \delta_n)}{=0} + \frac{O(\epsilon \cdot \delta_n)}{=0} + \epsilon \eta (2n\pi) \stackrel{!}{=} 0$$

$$\Rightarrow \boxed{\delta_n = \delta = 2\pi \epsilon}$$

(Man hätte dieses Ergebnis auch unmittelbar erhalten können, indem wir den nicht-period. Term in dem Term  $\eta \cos \phi$  absorbiert - u. k. der Annahme, daß  $|\epsilon - \phi| \ll 1$ , was durch Reihenentwicklung wenn  $\phi_0 | \phi \rightarrow \phi - \phi_0$ , möglich ist:  $\eta \cos \phi + \epsilon \eta \sin \phi \approx \eta \cos \phi \cos \epsilon \phi + \eta \sin \phi \sin \epsilon \phi \approx \eta \cos(\phi - \epsilon \phi) = \eta \cos((1-\epsilon)\phi)$ )

Damit finden wir für die Drehung des Lages des Perihels pro Bahnlauf das kompakte Ergebnis

$$\delta = 2\pi \epsilon = 6\pi m A = 6\pi \left(\frac{m c}{h}\right)^2 \quad (13)$$

$\approx 6\pi \frac{G \cdot M_\odot}{c^2} \cdot \frac{1}{R}$  gemäß (11) ist je  $A$  für kleine  $\eta$  gerade das Inverse Bahnradius  
Sonne-Planet

$\approx \frac{1}{R_{\text{Sonne-Planet}}}$

Damit ist klar, daß der Effekt am dominantesten beim der Sonne nächsten Planeten, dem Merkur ist.

Astronomisch gibt man meist nicht die Periheldrehung je Bahnlauf, sondern je Jahrhundert an. Dabei mißt man die Drehung in Bogensekunden, i.e.  $1^\circ \cong 3600''$  (Bogenminuten).

Für die Merkurbahn ergeben sich  $43''$  je Jahrhundert, für die Erde gerade einmal  $4''$ .

Trotz der gesamten Perihelverschiebung des Merkurs ( $5600,73''$ ) hat sich diese fehlende Wert von  $43''$  schon seit fast hundert Jahren etabliert und die Genauigkeiten haben sich je nach Beobachtungsdauer verbessert.

Planet	$R_\odot$ -Planet ( $10^6$ km)	$\eta$	Umlauf (Jahre)	AR-Vorhersage	Beobachtung $\Delta\phi$ in 100 Jahren
Merkur	57.91	0.2056	4.15	43.03''	43.11 ± 0.45
Venus	108.21	0.0068	149	8.6''	8.4 ± 4.8
Erde	149.6	0.0167	100	3.8''	5.0 ± 1.2
Jowis	161.0	0.8774 ?	85	10.3''	9.8 ± 0.8

↑ starke Einwirkung

Perihel  
Weg-  
kleiner  
Erde  
klar  
schwer  
zu  
ermitteln.

# Radiale Bewegung ("Fallen") zum Schwarzschildradius

(7a)

(3c)  $(1 - \frac{2m}{r}) \frac{dt}{dt} = a \leftarrow$  Konstante der Bewegung aus A/ys Bedingung

(4)  $c^2 \stackrel{h=0}{=} \frac{c^2 a^2 - \dot{r}^2}{1 - \frac{2m}{r}} = c^2 \frac{1}{1 - \frac{2m}{r}} \left[ c^2 (1 - \frac{2m}{r})^2 \left( \frac{dt}{dt} \right)^2 \right] \frac{a^2}{(1 - \frac{2m}{r})^2}$

Auf/ys Bedingung: Zu Zeit  $t=0$  sei Testteilchen bei  $r=r_0$  und es sei  $\dot{r}(t=0) = 0$

(1)  $\Rightarrow c^2 = (1 - \frac{2m}{r_0}) c^2 t^{\cdot 2} \Rightarrow \left( \frac{dt}{dt} \right)^2 (1 - \frac{2m}{r_0}) = 1 \Rightarrow$  Def. konst. (3c)

$\sqrt{1 - \frac{2m}{r_0}} \triangleq a = \sqrt{1 - \frac{r_s}{r_0}}$

Damit wird

$(1 - \frac{2m}{r})^3 \frac{1}{a^2} c^2 = c^2 (1 - \frac{2m}{r})^2 - \left( \frac{dr}{dt} \right)^2$

$\Rightarrow \frac{dr}{dt} = \pm \sqrt{1 - \frac{(1 - \frac{2m}{r})}{(1 - \frac{2m}{r_0})}} \cdot c \cdot (1 - \frac{2m}{r})$

$\Rightarrow \left| \frac{dr}{dt} \right| \leq c \cdot (1 - \frac{2m}{r})$

(Für Licht gilt ja  $dt^2 = 0 = (1 - \frac{2m}{r}) c^2 dt^2 - \frac{1}{(1 - \frac{2m}{r})} dr^2$   
 $\Rightarrow \frac{dr}{dt} = c (1 - \frac{2m}{r})$ )

Damit ist durch Integrieren

$c(t-t_0) \geq - \int_{r_0}^r \frac{dr}{1 - \frac{r_s}{r}} = + \int_{x_0}^x \frac{dx}{x^2(1-x)}$

divergiert für  $x \rightarrow x_s = 1$  logarithmisch, i.e.  $-\ln(1-x)$

$\Rightarrow$  Licht braucht in Koordinatenzeit unendlich lang um an den Schwarzschildradius zu kommen, "äußere Beobachter (mit  $r_B \gg r_s$ )" sehen dies aber nicht.



Die ~~restliche~~ Eigenzeit des fallenden OS jetzt  $t_0$  hier gegeben

(4)

$$\Rightarrow c^2 \left(1 - \frac{2M}{r}\right) = c^2 a^2 - \left(\frac{dr}{dt}\right)^2$$

$$\Rightarrow \frac{dr}{dt} = \pm \sqrt{c^2 a^2 - c^2 \left(1 - \frac{2M}{r}\right)}$$
$$= \pm c \sqrt{\frac{r_0}{r} - \frac{r_0}{r_0}} = \pm c \sqrt{r_0} \sqrt{\frac{1}{r} - \frac{1}{r_0}}$$

$$\Rightarrow c dt = \pm \frac{1}{\sqrt{r_0}} \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{r} - \frac{1}{r_0}}} dr$$

$$\Rightarrow \underline{c(t - t_0)} = - \frac{1}{\sqrt{r_0}} \int_{r_0}^r \frac{dr}{\sqrt{\frac{1}{r} - \frac{1}{r_0}}} = + \frac{1}{\sqrt{r_0}} \int_{x_0}^x \frac{dx}{x^2 \sqrt{x - x_0}}$$

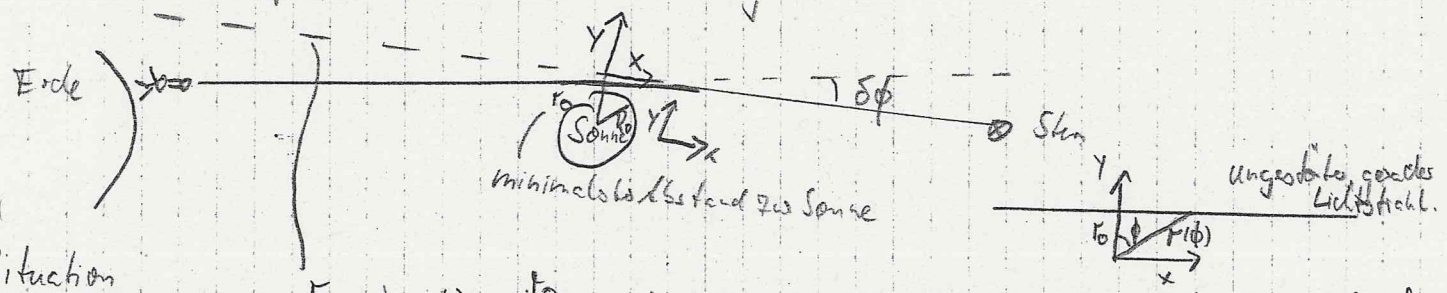
←  
dies ist nicht für  $x \rightarrow x_0$ ,  
sondern bleibt endlich.

Der mit fallende Beobachter erlebt dem nach dieses Ereignis



# Lichtablenkung am Sonnenrand

Das zweite wichtige, klassische Test der Allgemeinen Relativitätstheorie ist die Ablenkung eines Lichtstrahls, der nahe am Rand der Sonne vorbeigeht. Dies folgt zum einen aus dem Äquivalenzprinzip ("Fahnenstabsgedankenexperiment" Äquivalenz von beschleunigtem Bezugssystem und Gravitation), zum anderen, da die Gravitationskräfte nicht mit den Ruhemassen des Körpers, sondern mit ihrer Energie und ihrem Impuls verknüpft sind. Da elm. Wellen Energie transportieren, müsse sie also dem Einfluß der Gravitation unterliegen.



Situation

$$r_{\text{ungestört}}(\phi) = \frac{r_0}{\cos \phi}, \quad \phi \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \Leftrightarrow x = r \sin \phi, \quad y = r_0 = \text{const} = \frac{r}{\cos \phi}, \quad r = \frac{r_0}{\cos \phi}$$

Im Prinzip müßte man im Hintergrundfeld der Schwarzschild-Metrik "nur" die Ausbreitung von elm. Wellen und deren Strahlrichtung (also Energiefluß) untersuchen, i.e.  $\overline{T^{\mu\nu}}_{; \nu} = 0$  genau studieren.

Da wir aber  $T^{\mu\nu}$  nicht genauer spezifiziert haben, wolle wir einen anderen Weg einschlagen.

Man kann nun zeigen, daß für den Fall kleiner Wellenlängen beim Übergang von der Wellen- zur Strahlenoptik der Lichtweg durch geodätische Linien beschrieben wird, auf denen sich die Eigenzeit nicht ändert (sog. "Nullgeodäten"):

$$c^2 d\tau^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu = 0 \tag{1}$$

Für solche Kurven ist aber natürlich die Eigenzeit  $\tau$  nicht als Kurvenparameter verwendbar.

Die Geodätengleichung ändert sich aber nicht, wenn wir den Parameter  $\tau$  durch einen linear verwandten Parameter

$$\varphi = \alpha \cdot \tau + \beta; \quad \alpha, \beta = \text{const}$$

ersetzen:

$$\frac{d^2 x^\mu}{d\tau^2} + \Gamma^{\alpha}_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{d\tau} \frac{dx^\nu}{d\tau} = 0 \rightarrow \frac{d^2 x^\alpha}{d\varphi^2} + \Gamma^{\alpha}_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{d\varphi} \frac{dx^\nu}{d\varphi} = 0 \tag{2}$$

und aus (1)

$$g_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{d\varphi} \frac{dx^\nu}{d\varphi} = c^2 \left( \frac{d\tau}{d\varphi} \right)^2 = c^2 / \alpha^2 \tag{3a}$$



Wir argumentieren nun wie folgt:

Der Übergang zur Nullgeodäten mit  $d\tau \rightarrow 0$  vollzieht sich dann mühelos, wenn wir für endliche Parameter  $q$  gleichzeitig die Konstante  $\alpha \rightarrow \infty$  machen, da dann  $d\tau = \frac{dq}{\alpha} \xrightarrow{dq \text{ endlich}} 0$  geht.

Wir können also an der veränderten Geodätengleichung (2):

$$\frac{d^2 x^\mu}{dq^2} + \Gamma_{\nu\sigma}^\mu \frac{dx^\nu}{dq} \frac{dx^\sigma}{dq} = 0 \quad (2)$$

festhalten mit der aus (1) und (3) folgende Randbedingung

$$g_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{dq} \frac{dx^\nu}{dq} = 0 \quad (3)$$

für einen unbestimmten, aber endlichen Kurvenparameter  $q$ .

Die Bewegungsgleichungen für einen Lichtstrahl sind demnach vollkommen äquivalent zu (1) und (2a-2c) auf Seite 2 derjenigen von Planetenbahnen, nur daß nun überall der Kurvenparameter  $q$  (deswiesels bereinigt Parametrisierung  $r(\phi)$  herausfällt) anstelle Eigenzeit  $\tau$  auftritt und die linke Seite von Glg (1) nun verschwindet (vgl. (3)):

$$\Rightarrow \left(1 - \frac{2m}{r}\right) c^2 \left(\frac{dt}{dq}\right)^2 - \frac{1}{1 - \frac{2m}{r}} \left(\frac{dr}{dq}\right)^2 - r^2 \left( \left(\frac{d\theta}{dq}\right)^2 + \sin^2 \theta \left(\frac{d\phi}{dq}\right)^2 \right) = 0 \quad (4)$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dq} \left[ \left(1 - \frac{2m}{r}\right) \frac{dt}{dq} \right] = 0 \quad (5a)$$

$$\frac{d}{dq} \left( r^2 \frac{d\theta}{dq} \right) = r^2 \sin^2 \theta \left( \frac{d\phi}{dq} \right)^2 \quad (5b)$$

$$\frac{d}{dq} \left( r^2 \sin^2 \theta \frac{d\phi}{dq} \right) = 0 \quad (5c)$$

Wähle wir wieder  $\theta(q) = \frac{\pi}{2}$  (auch der Lichtstrahl bleibt in einer Ebene) erhalten wir wie früher

$$\Rightarrow \left(1 - \frac{2m}{r}\right) \frac{dt}{dq} = \tilde{\alpha} = \text{const} \quad (5a')$$

$$\Rightarrow r^2 \frac{d\phi}{dq} = \tilde{h} = \text{const} \quad (5b')$$

$$\Rightarrow 0 = \frac{c^2 \tilde{\alpha}^2 - \left(\frac{dr}{dq}\right)^2}{\left(1 - \frac{2m}{r}\right)} - \frac{\tilde{h}^2}{r^2} \quad - \text{DGL für } r(q) \quad (4')$$

Ersetzt analoge Substitution  $r(q) \rightarrow r(\phi)$ ,  $q \rightarrow u = \frac{1}{r}$  ergibt das zu (5) Seite 2 analoge Beziehung

$$0 = c^2 \tilde{\alpha}^2 - \tilde{h}^2 u'^2 - \tilde{h}^2 u^2 (1 - 2mu) \quad (6)$$



Differentiation von  $\phi$  liefert dann analog

$$u'' + u = 3mu^2 \quad (17)$$

Wir können sofort (17) als Grenzfall von (17) auf Seite 9 für Planetenbahnen erwarten, dass der dortige dominante Term, i.e.  $\frac{mc^2}{h^2}$  (beachte Kundlich  $\tilde{h}$ ), lautet ja explizit

$$\frac{mc^2}{h^2} = \frac{mc^2}{h^4} \left(\frac{d\phi}{dt}\right)^2 = \frac{mc^2}{h^4} \cdot \left(\frac{dr}{dt}\right)^2 \rightarrow 0 \text{ für } dr \equiv 0$$

Beweis von (17) nun gemäß unserer schemat. Situationskritische Analyse sei folgende Annahme gegeben: Gleichung (6) läßt zunächst beliebige Lösungen  $u = \text{const}$  durch geeignete Wahl von  $\tilde{h}$  und  $\tilde{a}$  zu (ausbl. d. Def. von  $\tilde{h}, \tilde{a}$  folgt sofort  $c^2 = \frac{1}{(1-2mu)} (r\dot{\phi})^2$ ,  $u = \frac{1}{r} = \text{const}$ ).

Sind also beliebige Kreisbahnen zu jedem Radius möglich?  $\frac{D}{dt} \frac{1}{r}$

Sicherlich nicht. Der Grund ist, diese sind in der Regel alle nicht stabil und damit unphysikalisch. Für kleine Oszillationen ( $u' \neq 0$ ) folgt dem neutral auch die Gültigkeit von (17), die dann für  $u'' = u' = 0$  auf  $u = 3mu^2$  bzw.  $r = 3m = \frac{3}{2} r_s$  führt. Schwarzschildradius der Sonne

Dies ist die einzig mögliche stabile Kreisbahn. Diese ist aber uninteressant bei schwarzen Löchern, da ja der Schwarzschild Radius bei der Sonne etc. ja physikalisch nicht angenommen wird.

→ quadratische Term in Glg. (17) stellt wieder eine kleine Störung dar, denn es ist für  $r > R_0$ , der Sonnenradius,

$$\frac{3mu^2}{u} = \frac{3m}{r} = \frac{3}{2} \frac{r_s}{r} < \frac{3}{2} \frac{r_s}{R_0} \sim 2 \cdot 10^{-5}$$

Schreiben wir daher

$$v(\phi) = r_0 u(\phi),$$

wobei  $r_0$  der (ungefähr) sonnennähe Abstand gegeben soll (vgl. Skizze auf Seite 9), so ist aus (17)

$$v'' + v = \frac{3m}{r_0} v^2 \equiv \epsilon \cdot v^2 \quad (18)$$

Mit  $v(\phi) = v_0(\phi) + \epsilon \cdot v_1(\phi) + O(\epsilon^2)$  folgt

$$v_0'' + v_0 = 0 \quad (19a)$$

$$v_1'' + v_1 = \epsilon v_0^2 \quad (19b)$$



Die Lösung  $r(\phi)$  (siehe unter geeignetes Wahl von  $\phi_0 = 0$ )

$$r(\phi) = \frac{1}{u_0(\phi)} = \frac{r_0}{\omega(\phi - \phi_0)} \xrightarrow{\phi_0=0} \frac{r_0}{\omega \phi}, \quad \text{i.e. } v_0(\phi) = \omega \phi$$

also genau die Beschreibung einer Geraden ( $x = r \sin \phi$ ,  $y = r_0 = \omega \cdot r$   $\rightarrow r = \frac{r_0}{\omega \phi}$ ).

Damit folgt aus (9b)

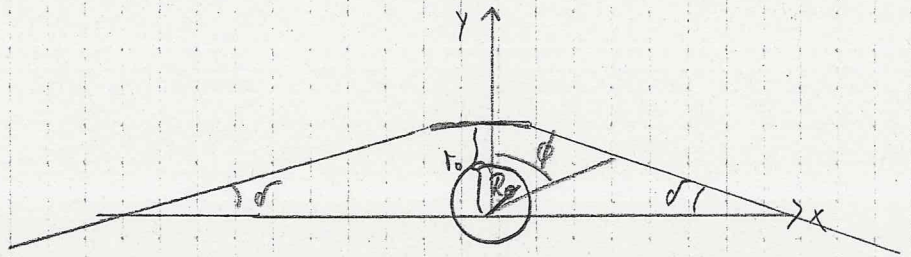
$$v_1'' + v_1 = \omega^2 \phi = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos 2\phi$$

mit der spez. Lösung (vgl. Seite 6)

$$v_1(\phi) = \frac{1}{2} - \frac{1}{6} \cos 2\phi = \frac{2}{3} - \frac{1}{3} \cos^2 \phi$$

und somit

$$v(\phi) = \cos \phi + \frac{\epsilon}{3} (2 - \cos^2 \phi) + \mathcal{O}(\epsilon^2) \quad (10)$$



Um die Ablenkung des Lichtstrahls zu finden, müssen wir den Linsen großer Entfernung betrachten, d.h.  $r \rightarrow \infty$ , bzw.  $u, v \rightarrow 0$ :

$$v(\phi_\infty) = 0 : \quad \omega \phi_\infty + \frac{m}{r_0} (2 - \cos^2 \phi_\infty) = 0 ; \quad \frac{m}{r_0} \ll 1$$

$$\rightarrow 1) \quad \frac{m}{r_0} = 0, \quad \omega \phi_\infty = 0 \rightarrow \phi_\infty = \pm \frac{\pi}{2}$$

$$\Rightarrow 2) \quad \frac{m}{r_0} \ll 1, \quad \phi_\infty = \pm \left( \frac{\pi}{2} + \delta \right) \xrightarrow{\delta \ll 1} \omega \phi_\infty = \omega \left( \pm \left( \frac{\pi}{2} + \delta \right) \right) = \omega \left( \pm \frac{\pi}{2} \pm \delta \right) = \omega \left( \pm \frac{\pi}{2} \right) \cos(\pm \delta) - \sin \left( \pm \frac{\pi}{2} \right) \sin(\pm \delta) \xrightarrow{\delta \ll 1} = - (\pm 1) / \sin(\pm \delta) \approx -\delta$$

$$\stackrel{(10)}{\Rightarrow} -\delta + \frac{m}{r_0} (2 - \delta^2) \approx -\delta + 2 \frac{m}{r_0} \stackrel{!}{=} 0 \Rightarrow \boxed{\delta = \frac{2m}{r_0}} = \frac{2GM}{c^2 r_0} = \frac{r_s}{r_0} \quad \leftarrow \text{SSR des Sonnensystems}$$

Die gesamte Ablenkung beträgt  $2\delta$ , woraus sich für einen scharfen Sonnenrand ( $r_0 \approx R_0$ ) vorbeigehenden Lichtstrahl die Abweichung von

$$\Delta_0 = 2\delta (r_0 \approx R_0) = 1.75'' \quad \leftarrow \text{Bogensekunden}$$

ergibt ( $R_0 = 695.000 \text{ km}$ ,  $r_s = 2.95 \text{ km}$ ).



Für Sternenlicht kann die experimentelle Bestimmung des Ablenkungswinkels  $\Delta$  nur bei einer totalen Sonnenfinsternis erfolgen, da sonst das Streulicht der Sonne in der Atmosphäre jeden Stern in Sonnennähe (am Horizont) bei weitem überstrahlt. Mangelte es so, daß man die Scheitelpunkte der Himmelsregion einmal vor der Sonnenfinsternis und einmal während der Sonnenfinsternis fotografieren und dann nach Ausrichtung in dem scheinbaren Abstand der Sterne untereinander sucht.

May 29, 1919	$\Delta = 1.98 \pm 0.16''$ , $1.61 \pm 0.9$
Sept 21, 1922	$1.77 \pm 0.9''$ ; $1.42 - 2.16$ , $1.72 \pm 0.15$ , $1.82 \pm 0.2$
May 9, 1929	$2.24 \pm 0.1''$
...	
Feb. 25, 1952	$1.7 \pm 0.1''$

bestehende Ort:  $1.76 \pm 0.02''$  (P)

- neue Möglichkeit mittels quasistabiler Radiogalaxien (Quasare) (Quasar 3C279)   
 (vgl. Seel, Liberman)   
 (Quasar 3C279)   
 einziges Galaxie der von Sonne aus sichtbar



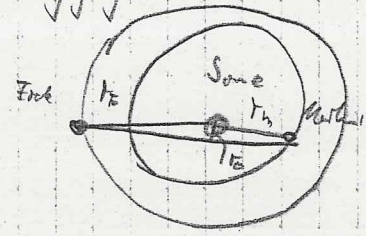
Laufzeitverzögerung von Radarstrahlen

Von I. I. Shapiro wurde angeregt, die Bahnbeugung von Planeten im Sonnensystem durch Radarortung als Funktion der Zeit präzise zu vermessen, und Abweichungen zwischen der ohne Einfluß der Gravitation erwarteten Laufzeit der Radarsignale zum Planeten und zurück und der tatsächlich gemessenen Laufzeit zum Test der GR zu verwenden. Wir wollen zunächst sehen, auf welche Weise das Gravitationsfeld die Laufzeit elektromagnetischer Signale beeinflusst. Wir gehen hier von der Gleichung des letzten Kapitels aus, die die Ausbreitung von Lichtwellen ergibt:

$$\frac{dt}{d\sigma} = \frac{dt}{d\sigma} \frac{d\sigma}{dt} = \frac{a}{1 - \frac{2m}{r}} \frac{dr}{dt}$$

$$\Rightarrow \left(\frac{dr}{dt}\right)^2 = \left(1 - \frac{2m}{r}\right)^2 \left(c^2 - \frac{h^2}{a^2 r^2} \left(1 - \frac{2m}{r}\right)\right) \tag{1}$$

Nehmen wir an, Erde und Merkur befinden sich annähernd auf entgegengesetzten Seiten der Sonne, so daß das Radarstrahl auf dem Weg zum Beobachter zum Merkur in einem nahe dem Abstand  $r_0$  an der Sonne vorbeigehet. Bei Abstand  $r_0$  ist ja dann  $\frac{dr}{dt} = 0$ , so daß



$$h^2 = \frac{c^2 a^2 r_0^2}{1 - \frac{2m}{r_0}}$$

(2)

Dann können wir das Verhältnis  $\frac{h}{a}$  aus (1) durch (2) ausdrücken und erhalten so

$$\frac{dr}{dt} = \pm c \left(1 - \frac{2m}{r}\right) \sqrt{1 - \frac{r_0^2}{r^2} \frac{\left(1 - \frac{2m}{r}\right)}{\left(1 - \frac{2m}{r_0}\right)}} \tag{3}$$

Entwicklung in  $\frac{m}{r}, \frac{m}{r_0} \ll 1$

$$\approx \pm c \sqrt{1 - \frac{r_0^2}{r^2}} \left(1 - \frac{m r_0}{r(r+r_0)} - \frac{2m}{r} + O\left(\frac{m^2}{r^2}\right)\right)$$

Für die Ausbreitung von  $r_0$  nach  $r$  (oder umgekehrt) benötigt die Radarstrahl folglich die Koordinatenzeit  $(P)$ :  
 Achtung, Uhr laufe bei konstantem  $r$  nicht mit der Koordinatenzeit, sondern mit der Eigenzeit  $\tau$ , die das spezifische Konstante  $r$  hat. B. a. f. die Erdoberfläche ist  $r$  konstant.

$$c t(r, r_0) = \int_{r_0}^r d\sigma \left(1 - \frac{r_0^2}{r^2}\right)^{-\frac{1}{2}} \left(1 + \frac{m}{r} \frac{(2r+3r_0)}{r(r+r_0)} + \dots\right)$$

$$= \underbrace{\sqrt{r^2 - r_0^2}}_{\substack{\text{Pythagoras} \\ \sqrt{r^2 - r_0^2} \\ \text{eff} = \sqrt{r^2 - r_0^2}}} + 2m \ln \left(\frac{r}{r_0} + \sqrt{\frac{r^2}{r_0^2} - 1}\right) + m \sqrt{\frac{r-r_0}{r+r_0}} + \dots \tag{4}$$



Das führende Term beschreibt die ohne den Einfluß des Schwerefeldes erwartete Laufzeit auf der geraden Linie mit Betrag  $\tau_0$  von  $t$  nach  $t_0$ ; die weiteren Terme geben die Verzögerung des Gravitationsfeldes an. Ihr Beitrag ist umso größer je näher der Beobachter der Sonne kommt; ein Maximum wird bei der oberen Konjunktion des Merkurs erreicht, wenn der Stahl kreuzschiff an der Sonne vorbeiflägt vorübergehen muß ( $r_0 \approx R_0$ , was wir nun annehmen wollen). Die gesamte Verzögerung auf der Weg zum Merkur und zurück ist dann

$$\Delta t_{\text{max}} = \frac{2}{c} \left( t(r_E, R_0) + t(r_M, R_0) - \sqrt{r_E^2 - R_0^2} - \sqrt{r_M^2 - R_0^2} \right)$$

$$\approx \frac{2m}{c} \left( \sqrt{\frac{r_E - R_0}{r_E + R_0}} + \sqrt{\frac{r_M - R_0}{r_M + R_0}} + 2 \ln \left( \frac{r_E}{R_0} + \sqrt{\frac{r_E^2}{R_0^2} - 1} \right) + 2 \ln \left( \frac{r_M}{R_0} + \sqrt{\frac{r_M^2}{R_0^2} - 1} \right) + \dots \right)$$

Da  $r_E, r_M \gg R_0$ , können wir Terme des Ordnung  $\left[ \frac{r_E, r_M}{R_0} \right]^{-1}$  gegenüber  $\ln \frac{r_E, r_M}{R_0}$  vernachlässigen und erhalten

$$\Delta t_{\text{max}} \approx \frac{4m}{c} \left( 1 + \ln \frac{4r_E r_M}{R_0^2} \right) \approx \frac{73 \mu\text{s}}{c} \approx \underline{\underline{293 \mu\text{s}}}$$

$r_E = 150 \cdot 10^6 \text{ km}$ ,  $r_M = 58 \cdot 10^6 \text{ km}$ ,  $R_0 = 0.7 \cdot 10^6 \text{ km}$ ,  $2m = r_s = 3 \text{ km}$

bei einer gesamten Laufzeit von ca. 20 Minuten.

Die zur Auflösung benötigte, extrem genaue ermittelnde Abstandsmessung ist auch mit Hilfe des Radarortung wiederum möglich. Hierzu muß mittels Gg. (4) die Position von Erde und Merkur genau an mehrere Positionen vermessen werden. Auf diese Weise hatte die Gruppe um Shapiro die Laufzeit gemessen und mit der theoretisch vorhergesagte Verzögerung verglichen mit dem Ergebnis (I.I. Shapiro et al, PRL 26 (1971) 1132)

$$\frac{\Delta t_{\text{exp}}}{\Delta t_{\text{theo}}} = 1.015 \pm 0.05,$$

eine glänzende Bestätigung der AR.

Mit der auf der Merkurbesuche stationären Viking-Sonde ließ sich eine noch genauere Wert bestimmen (R.D. Basberg, I.I. Shapiro et al, ApJ 234 (1975) L215)

$$\frac{\Delta t_{\text{exp}}}{\Delta t_{\text{theo}}} = 1 \pm 10^{-3}$$



# Gravitative Rotverschiebung

Die drei in den vorangegangenen Abschnitten beschriebenen Experimente stellen echte Tests der AR (in erster Ordnung im Gravitationsfeld  $\phi(\vec{r})$ ) dar, denn sie beruhen allesamt auf der Vermessung der geodetischen Bewegung im Schwarzschildfeld  $c^2 dt^2 = e^{2\psi} c^2 dt^2 - e^{2\chi} dr^2 - r^2 (d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2)$ .

Im Newtonschen Grenzfall geht das Gravitationspotential in  $g_{00} = e^{2\psi} \approx (1 + \frac{2\phi}{c^2})$  ein. Es gibt keine ähnliche Bedingung für  $g_{ii} = e^{2\chi}$ , außer dass  $e^{2\chi} \rightarrow 1$ . Wenn wir in 1. Ordnung schreiben

$$e^{2\chi} \approx 1 + 2\phi \frac{1}{c^2},$$

so ist  $\phi$  im Newtonschen Grenzfall nicht festgelegt. Die AR sagt also im Newtonschen Grenzfall  $\beta=1$  was?

Alternative Theorien (z.B. die Skalar-Tensor-Theorie von Brans und Dicke) sagen einen anderen Wert für  $\beta$  vor.

Auch Einstein hatte ursprünglich bei der Vorhersage der Ablenkung von Lichtstrahlen an der Sonne kein den Newtonschen Fall mit  $\beta=0$  diskutierte, sodass sein Ergebnis im Vergleich zu erdachten experimentellen AR um eine Faktor  $\frac{1}{2}$  zu klein war. Man findet heute  $\beta_{exp} = 1 \pm 10^{-3}$ , was gerade die Notwendigkeit bespricht.

Das folgende, vierte Exp. macht keine Gebrauch von  $e^{2\chi}$  und testet "nur" den Wert von  $g_{00}$ .

Es kann von daher nicht als richtiger Test der AR angesehen werden (vgl. auch die extensive Diskussion in Heller)

$g_{00}$  ist ja bereits richtig im Newton-Grenzfall vorhergesagt.

Wir betrachten einen Oszillator der Eigenfrequenz  $\nu_0$ , der sich in einem stat. Gravitationsfeld in Ruhe befindet. Die Eigenzeit des Senders hängt dann wie folgt mit der Koordinatenzeit  $t$  zusammen:

$$d\tau_0 = \sqrt{g_{00}(\vec{r}_0)} dt \quad (\text{da der Sender ja in Ruhe in dem gegebenen Koordinatensystem ist}) \quad (1)$$

Wenn ein entfernter Beobachter am Ort  $\vec{r}_B$  die ausgesendeten Wellen beobachtet, so misst er die empfangene Frequenz in seiner Eigenzeit  $\tau_B$ .

$$d\tau_B = \sqrt{g_{00}(\vec{r}_B)} dt \quad (2)$$

Eine feste Zahl von Oszillationen, etwa  $n$ , wird von Sender in der Zeit

$$\Delta\tau_0 = \frac{n}{\nu_0}$$

ausgesendet, der Beobachter benötigt die (Eigen-)Zeitdauer

$$\Delta\tau_B = \frac{n}{\nu_B}$$

um sie zu empfangen



Die Frequenz der Welle, die der Beobachter misst, ist also

$$v_B = \frac{v}{\Delta T_B} = v_0 \frac{\Delta T_0 \rightarrow \Delta T_0}{\Delta T_B} \quad (3)$$

Man ist (aufgrund der Kontinuität der Wellenausbreitung) die zum Senden und Empfang benötigte Koordinatenzeit  $\Delta t$  für  $n$ -Oszillationen dieselbe (man mache sich das klar!).

Ergo folgt aus (1) und (2) dann für (3)

$$v_B = v_0 \sqrt{\frac{g_{00}(\vec{r}_0)}{g_{00}(\vec{r}_B)}}$$

dies liess sich auch  
leicht aus dem Energiesatz  $E = \text{const} = h\nu + \phi(\vec{r})$  (4)  
ableiten.  
(AR ist da konstant)

im Newtonschen  
Näherung

$$\approx v_0 \left( \frac{1 + 2 \cdot \frac{\phi(\vec{r}_0)}{c^2}}{1 + 2 \cdot \frac{\phi(\vec{r}_B)}{c^2}} \right)^{\frac{1}{2}} \approx v_0 \left( 1 + \frac{\phi(\vec{r}_0) - \phi(\vec{r}_B)}{c^2} \right) \stackrel{\text{in SSM}}{\approx} v_0 \left( 1 - \frac{m}{r_0} + \frac{m}{r_B} \right)$$

$$\Rightarrow \frac{\Delta \nu}{\nu_0} \approx - \frac{\Delta \phi}{c^2}$$

Die Erde sieht daher die von der Sonne oberhalb der mittleren Spektrallinie rotverschoben.

Die rot. Verschiebung beträgt  $2.1 \times 10^{-6}$ . Wegen anderer Einflüsse auf die Lage der Spektrallinie (die man je auf der Erde besten kennt) ist die präzise Verschiebung nicht leicht, nach Braut und Dicke stimmt der Wert auf etwa 5% mit der Vorhersage überein.

Auf der Erde liess sich die "Rotverschiebung" mittels des Mößbauer effektes (nicht stoßfreie Kernresonanz) trotz der Winzigkeit überprüfen.

$$\frac{\Delta \nu}{\nu_0} = - \frac{m}{R_E^2} (r_B - r_0) \approx - \frac{r_B - r_0}{4.5 \cdot 10^{12} \text{ km}} \stackrel{r_B - r_0 = 10 \text{ m}}{\sim} 10^{-15}$$

Pound und Rebka (PRL 3 (1959) 439, PRL 4 (1960) 397) gelang es, die gravitative Rotverschiebung mittels des 14.4 keV Gammastrahl einer  $^{57}\text{Fe}$ -Quelle in einer etwa 22m hohen Turm nachzuweisen. Der Betrag  $\frac{\Delta \nu}{\nu_0} \approx 4.92 \cdot 10^{-15}$ . Dieser kleinen Betrag hatte die Frequenz bereits deutlich aus dem Absorptionsmaximum des Detektors ( $^{57}\text{Fe}$ -Kernfall) herausgeschoben. Mittels der Dopplerverschiebung eines sich bewegenden Detektors konnte dann die Rotverschiebung wieder eingestellt werden und die Verschiebung für  $\left( \frac{\Delta \nu}{\nu_0} \right)_{\text{exp}} = (5.13 \pm 0.51) \cdot 10^{-15}$  angegeben werden.