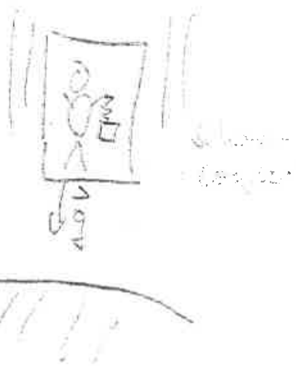
Bewegung im Gravitationsfeld

Das Äquivalenzprinzip (oder auch das Axiom der Unterscheidbarkeit zwischen Gravitation und Trägheit)

Das Prinzip der Äquivalenz besagt: Schwermasse und Trägheit [illegible] von Galilei, Eötvös und Dicke experimentell bewiesene Gleichheit zwischen schwerer und träger Masse, $m_s = m_t$. Einstein macht das Äquivalenzprinzip zur Grundlage seiner Allgemeinen Relativitätstheorie, indem er [illegible] die Wirkung des Gravitationsfeldes auf ein beliebiges physikalisches System zu bestimmen. Wir machen uns zunächst die Bedeutung des Äquivalenzprinzips am Einsteinschen Aufzug-Gedankenexperiment klar. Dazu nehmen wir an, ein Experimentator befinde sich in einem abgeschlossenen Raum (dem „Fahrstuhl") der in einem (quasi-) homogenen Gravitationsfeld frei fällt. Da das Schwerefeld auf alle Körper innerhalb des Fahrstuhls, auch auf den Experimentator, dieselbe Beschleunigung ausübt wie auf den Fahrstuhl selbst, merkt der Experimentator nichts von der Anwesenheit des Gravitationsfeldes (Schwerelosigkeit, [illegible] – [illegible] in einem lokalen Inertialsystem). Dies kann man leicht beweisen für ein System von im Fahrstuhl [illegible] Körpern, die untereinander z.B. über Zwei-Körper-Kräfte $\vec{F}(\vec{r}_i-\vec{r}_k)$ wechselwirken.

$$m_i \frac{d^2\vec{r}_i}{dt^2} = m_i\vec{g} + \sum_{k\neq i} \vec{F}_i(\vec{r}_i-\vec{r}_k)$$



Koordinatentransformation: $\vec{r}\,' = \vec{r} - \frac{1}{2}\vec{g}t^2$ (mitbewegtes Bezugssystem – i.e. Fahrstuhl)

$$\Rightarrow m_i \frac{d^2\vec{r}_i\,'}{dt^2} = \sum_{k\neq i} \vec{F}_i(\vec{r}_i-\vec{r}_k)$$

– i.e. kein (globaler) Einfluß des Schwerefeldes

Der Unterschied in den Erfahrungen [illegible] des mitfallenden und eines ruhenden Beobachters [illegible] [illegible] Beobachtung [illegible] [illegible] nicht. Das Äquivalenzprinzip besagt, daß für alle physikalischen Systeme [illegible] gleiche [illegible]

Aber: In der Regel ist das Gravitationsfeld nicht überall ganz homogen und konstant (oder zeitunabhängig). $\vec{g} \Rightarrow \vec{g}(\vec{r}, t)$
Siehe Erde im Umlauf um die Sonne. Erde ist im freien Fall, aber auch [illegible] könnten kleine Differenz $g(d_{Sonne} \pm r_E) - g(d_{Sonne})$ als für die [illegible] wirklichen Gezeitenkräfte verantwortlich sind.
(Diese würde ein genügend großer Experimentator [illegible] r_E ebenfalls im Fahrstuhl bemerken.) $\Rightarrow \Delta t_{Fahrstuhl} \ll \Delta t_{\vec{g} \text{ ändert sich}}$, dann $\vec{g}$ quasi-homogen

[illegible]

⇒ <u>(starkes) Äquivalenzprinzip:</u>
An jedem Raum-Zeit-Punkt in einem beliebigen Gravitationsfeld ist es möglich, ein "<u>lokales Inertialsystem</u>" einzuführen, in dem <u>alle</u> physikalischen Gesetze für eine <u>genügend kleine Umgebung</u> dieses Punktes dieselbe Form haben wie in Abwesenheit eines Schwerefeldes.

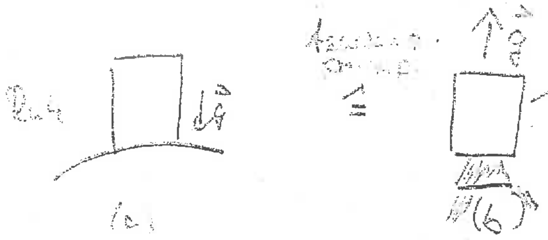
<u>Anmerkung</u>: Die Gesetze in anderen Systemen (Koordinatentrafo) folgen dann aus Kovarianzpostulat der Gleichungen als Tensor-Gleichungen.

• <u>Für $m_T = m_S$</u>: Hier sollte eigentlich auch die elektrostatische Energie stehen, also soviel wie $\boxed{\frac{\text{Ges. Energie (des Atoms)}}{c^2}}$

$$m = m_0 / (1-\beta^2)^{\frac{1}{2}}, \quad \text{e.m.-Energie}, \quad \text{SWW-Energie}$$

^{56}Fe: Summe der Bind. Energie der Elektronen ≈ 50 keV / Gesamtmasse ≈ 52 GeV ≈ 10^{-6}

Ablenkung von Lichtstrahlen im Gravitationsfeld — Weiteres Gedankenexperiment von Einstein.



Fahrstuhl, welcher konstant beschleunigt ist (Raketenantrieb)

(b)

$\Delta t = \frac{a}{c}$

$\Delta x_{Fahrstuhl} = \frac{1}{2} g (\Delta t)^2$ im ruhenden (außerhalb) befindlichen Inertialsystem, wo die Lichtstrahlen sich auf geraden Trajektorien bewegen sollen

$\Rightarrow \Delta x_{\text{im Fahrstuhl}} = -\frac{ga^2}{2c^2}$ nach unten abgelenkt,

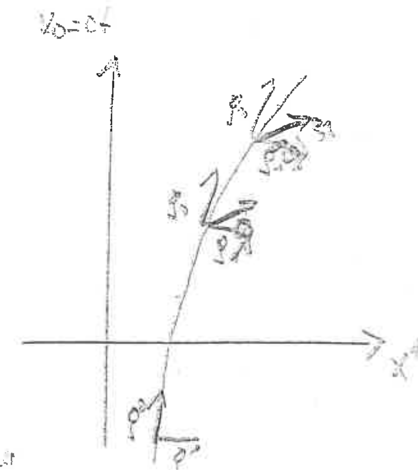
der Lichtstrahl erscheint also für den Beobachter im Fahrstuhl um $|\Delta x|$ nach unten von einer geraden Bahn abgelenkt.

(a) Aufgrund des Äquivalenzprinzips können wir daraus schließen, daß der Lichtstrahl im Gravitationsfeld ebenfalls um $\Delta x = -\frac{ga^2}{2c^2}$ nach unten abgelenkt wird. (Die Ablenkung des Lichtes an der Sonne wurde 1916 von Eddington verifiziert!)

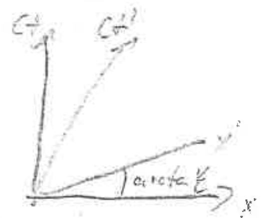
Wir erhalten damit das Resultat, daß die Gravitation auch auf Teilchen der Ruhemasse 0, wie das Licht wirkt.

Der freie Fall

- erste wichtige Anwendung des Äquivalenzprinzips
- Nach dem Äquivalenzprinzip können wir dann in der unmittelbaren Umgebung eines jeden Punktes des Raumes frei fallende Koordinaten ($\vec{\xi} = \vec{x} - \frac{1}{2}\vec{g}(\vec{x},t)\,t^2$) einführen, in dem die physikalischen Vorgänge so ablaufen, als sei überhaupt kein Gravitationsfeld vorhanden.



Mit zunehmender Geschwindigkeit würde dieses Koordinatensystem immer mehr vom ursprünglichen abweichen, wobei eine Lorentztransformation einer Drehung der Achse (gleichzeitig) entspricht. (Eine Lorentztransformation ist meines Erachtens aber nicht relevant, da dabei nur von einem Inertialsystem in ein anderes Inertialsystem übergeht. Das Teilchen würde dann nur [illegible] ergeben)



Die Bewegung für unser frei fallendes (massives) Teilchen ist also nach dem Äquivalenzprinzip identisch mit der Bewegung eines freien Teilchens in der (speziellen) Relativitätstheorie — wohlgemerkt, in diesem Koordinatensystem $\xi^\alpha = (\xi^0, \vec{\xi})$ $\left(x^\alpha = (x^0, \vec{x}) \to \xi^\alpha \right)$

Es ist

$$c^2 d\tau^2 = (d\xi^0)^2 - (d\vec{\xi})^2$$

, die lokal Minkowski-Raum-Metrik in [illegible] Umgebung gültig.

und die Bewegungsgleichung (am leichtesten) findet (für [illegible] kleines Zeitintervall $\Delta\xi^0$)

$$\ddot{\xi}^\alpha = \frac{d^2\xi^\alpha}{d\tau^2} = 0$$

d.h. das Teilchen bewegt sich mit konstanter Geschwindigkeit $\dot{\xi}^\alpha = \frac{d\xi^\alpha}{d\tau} = \text{const}$

Wir können nun diese Bewegungsgleichung auf irgend ein anderes Koordinaten- (Bezugs-)System x^μ, z.B. das ursprüngliche, im Gravitationsfeld ruhende Bezugssystem, (kovariant) transformieren, wenn wir den Zusammenhang zwischen den Koordinaten x^μ und ξ^α kennen.

$$0 = \frac{d^2\xi^\alpha}{d\tau^2} = \frac{d}{d\tau}\left(\sum_\mu \frac{\partial \xi^\alpha}{\partial x^\mu}\frac{dx^\mu}{d\tau} \right) = \sum_\mu \frac{\partial \xi^\alpha}{\partial x^\mu}\frac{d^2x^\mu}{d\tau^2} + \sum_{\mu,\nu} \frac{\partial^2 \xi^\alpha}{\partial x^\mu \partial x^\nu}\frac{dx^\mu}{d\tau}\frac{dx^\nu}{d\tau}$$

Summenkonvention

$$= \frac{\partial \xi^\alpha}{\partial x^\mu}\ddot{x}^\mu + \frac{\partial^2 \xi^\alpha}{\partial x^\mu \partial x^\nu}\dot{x}^\mu\dot{x}^\nu$$

Multiplizieren mit $\frac{\partial x^\lambda}{\partial \xi^\alpha}$ (der "Inversen") liefert wegen $\frac{\partial x^\lambda}{\partial \xi^\alpha}\frac{\partial \xi^\alpha}{\partial x^\mu} = \delta^\lambda_\mu$

$$\ddot{x}^\lambda + \Gamma^\lambda_{\mu\nu}\,\dot{x}^\mu \dot{x}^\nu = 0 \;;$$

— Bewegung in einem beliebigen Koordinatensystem.

wobei

$$\Gamma^\lambda_{\mu\nu} = \frac{\partial x^\lambda}{\partial \xi^\alpha}\,\frac{\partial^2 \xi^\alpha}{\partial x^\mu \partial x^\nu}$$

(symm. in unteren Indizes)

die affine Verbindung (oder auch später Christoffel-Symbol) bezeichnet.
Zur Charakterisierung des Koordinatensystems ist es zweckmäßig, auch die Eigenzeit τ durch die x^μ auszudrücken

$$c^2 d\tau^2 = (d\xi^0)^2 - (d\vec{\xi})^2 \hat{=} \eta_{\alpha\beta}\, d\xi^\alpha d\xi^\beta \quad \text{mit} \quad \eta_{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1_3 \end{pmatrix}$$

– Minkowski-Metrik

$$\rightarrow \quad = \eta_{\alpha\beta}\frac{d\xi^\alpha}{dx^\mu}dx^\mu \frac{d\xi^\beta}{dx^\nu}dx^\nu = \underbrace{\left(\frac{d\xi^\alpha}{dx^\mu}\frac{d\xi^\beta}{dx^\nu}\eta_{\alpha\beta}\right)}_{\hat{=}\, g_{\mu\nu}} dx^\mu dx^\nu \equiv \underline{g_{\mu\nu}\, dx^\mu dx^\nu}$$

Hierbei wird $g_{\mu\nu}$ als metrischer Tensor bezeichnet.
Dies stellt die Verallgemeinerung der bereits besprochenen metrischen Form zur Definition eines Abstandes auf gekrümmten Flächen dar:

$$\overset{\text{euklidisch}}{ds^2 = dx_1^2 + \dots dx_n^2} \quad \longrightarrow \quad \overset{\text{pseudoeuklidisch}}{c^2 d\tau^2 = ds^2 = dx_0^2 - (dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2)}.$$

(Ereignis Weltpunkt)

Der Abstand ist also nun als Eigenzeitabstand zweier infinitesimal benachbarter Raum-Zeit-Punkte zu verstehen!

Das frei mitfallende Koordinatensystem ξ^α ist dadurch gekennzeichnet, daß in ihm lokal (in unmittelbarer Umgebung des sich bewegenden Teilchens) keine Gravitationskräfte sind. In einem anderen Koordinatensystem machen sie sich zum (Teil) in der Form der $\Gamma^\lambda_{\mu\nu}$ bemerkbar.

Anmerkung: Man sieht wieder die Identifikation von Gravitationskräften und Scheinkräften.

Die $\Gamma^\lambda_{\mu\nu}$ enthalten [illegible] als Ausgangs[illegible]

Überlegen wir uns, wie sich die Bewegungsgleichung im Schwerefeld vereinfacht [illegible]
[illegible]: Dabei müssen wir [illegible] (die [illegible] anschließend) Rücktransformation
auf die ursprünglichen Koordinaten berücksichtigen. Diese seien die x^μ.
Nehmen wir an, daß [illegible] schwach (nahezu [illegible])
[illegible] die 3-dim. Geschwindigkeitskomponenten klein gegen c, dann ist die
Eigenzeit $d\tau$ in etwa auch die Systemzeit dt (bis auf $O(\frac{v}{c})$).

$$d\tau \approx dt$$

$$|\dot{x}^i| \equiv \left|\frac{dx^i}{d\tau}\right| \approx \left|\frac{dx^i}{dt}\right| \ll c = \frac{dx^0}{dt} \approx \frac{dx^0}{d\tau} = \dot{x}^0$$ — nichtrel. Grenzfall

Für die räumlichen Komponenten gilt dann näherungsweise (unter der Annahme, alle Γ seien etwa gleich groß).

$$\frac{d^2x^i}{dt^2} + \Gamma^i_{00}\, c^2 = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \text{Newton} \quad \frac{d^2\vec{x}}{dt^2} = \vec{g} \mathrel{\hat{=}} \frac{\vec{F}_{ext}}{m}$$

$\Rightarrow$ $-\Gamma^i_{00}\, c^2$ entspricht der i-ten Komponente der im Bezugssystem gemessenen Schwerebeschleunigung.

Zusammenhang: Affine Übertragung und Metrik ... und Gravitation

Um die physikalische Bedeutung der Komponenten des metrischen Tensors $g_{\mu\nu}$ zu verstehen, müssen wir den Zusammenhang zwischen den $g_{\mu\nu}$ und den affinen Übertragungen $\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu}$ herleiten. Eine solche Beziehung muß bestehen, da beide Größen mit den partiellen Ableitungen der lokalen Koordinaten ξ^{α} nach den Koordinaten x^{μ} verknüpft.

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\alpha\beta} \frac{\partial \xi^{\alpha}}{\partial x^{\mu}} \frac{\partial \xi^{\beta}}{\partial x^{\nu}} \Rightarrow \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^{\lambda}} = \eta_{\alpha\beta} \frac{\partial^2 \xi^{\alpha}}{\partial x^{\lambda}\partial x^{\mu}} \frac{\partial \xi^{\beta}}{\partial x^{\nu}} + \eta_{\alpha\beta} \frac{\partial \xi^{\alpha}}{\partial x^{\mu}} \frac{\partial^2 \xi^{\beta}}{\partial x^{\lambda}\partial x^{\nu}} \qquad (1)$$

$$\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu} = \frac{\partial x^{\lambda}}{\partial \xi^{\alpha}} \frac{\partial^2 \xi^{\alpha}}{\partial x^{\mu}\partial x^{\nu}} \Rightarrow \frac{\partial^2 \xi^{\sigma}}{\partial x^{\mu}\partial x^{\nu}} = \delta_{\sigma\alpha} \frac{\partial^2 \xi^{\alpha}}{\partial x^{\mu}\partial x^{\nu}} = \frac{\partial \xi^{\sigma}}{\partial x^{\lambda}} \frac{\partial x^{\lambda}}{\partial \xi^{\alpha}} \frac{\partial^2 \xi^{\alpha}}{\partial x^{\mu}\partial x^{\nu}} = \frac{\partial \xi^{\sigma}}{\partial x^{\lambda}} \Gamma^{\lambda}_{\mu\nu} \qquad (2)$$

Die 2-ten Ableitungen $\frac{\partial^2 \xi^{\sigma}}{\partial x^{\mu}\partial x^{\nu}}$ [illegible] eliminieren

$$\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^{\lambda}} = \eta_{\alpha\beta} \Gamma^{\sigma}_{\lambda\mu} \frac{\partial \xi^{\alpha}}{\partial x^{\sigma}} \frac{\partial \xi^{\beta}}{\partial x^{\nu}} + \eta_{\alpha\beta} \Gamma^{\sigma}_{\lambda\nu} \frac{\partial \xi^{\beta}}{\partial x^{\sigma}} \frac{\partial \xi^{\alpha}}{\partial x^{\mu}} = \Gamma^{\sigma}_{\lambda\mu} g_{\sigma\nu} + \Gamma^{\sigma}_{\lambda\nu} g_{\sigma\mu} \qquad (3)$$

Dies ist ein erstes Teilresultat.

Umbenennen der Indizes liefert

$$\frac{\partial g_{\lambda\nu}}{\partial x^{\mu}} = \Gamma^{\sigma}_{\mu\lambda} g_{\sigma\nu} + \Gamma^{\sigma}_{\mu\nu} g_{\sigma\lambda} \qquad (3')$$

$$\frac{\partial g_{\mu\lambda}}{\partial x^{\nu}} = \Gamma^{\sigma}_{\nu\mu} g_{\sigma\lambda} + \Gamma^{\sigma}_{\nu\lambda} g_{\sigma\mu} \qquad (3'')$$

Beachte $\Gamma^{\sigma}_{\lambda\mu} = \Gamma^{\sigma}_{\mu\lambda}$

$$\Rightarrow (3)+(3')-(3''): \quad \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^{\lambda}} + \frac{\partial g_{\lambda\nu}}{\partial x^{\mu}} - \frac{\partial g_{\mu\lambda}}{\partial x^{\nu}} = 2\,\Gamma^{\sigma}_{\lambda\mu} g_{\sigma\nu}$$

Bezeichne $g^{\mu\nu} = (g^{-1})_{\mu\nu}$ $\left(= \eta^{\alpha\beta} \frac{\partial x^{\mu}}{\partial \xi^{\alpha}} \frac{\partial x^{\nu}}{\partial \xi^{\beta}}\right)$, d.h. $g^{\mu\sigma} g_{\sigma\nu} = \delta_{\mu\nu}$ die inverse Matrix der $g_{\mu\nu}$, so wird schließlich

als kombinierte Ableitung der $g_{\mu\nu}$ — Christoffel-Symbol (zweiter Art)

$$\Gamma^{\sigma}_{\lambda\mu} = \frac{1}{2} g^{\nu\sigma} \left[\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^{\lambda}} + \frac{\partial g_{\lambda\nu}}{\partial x^{\mu}} - \frac{\partial g_{\mu\lambda}}{\partial x^{\nu}} \right] \equiv \left\{ {\sigma \atop \lambda\mu} \right\}$$

Das ist schon ein bekanntes Resultat

Kehren wir nun wieder zurück zur nichtrelativistischen Betrachtung zurück: 8

$-\Gamma^i_{00} c^2$ war ein Maß für die [illegible] Schwerebeschleunigung, insbesondere im ursprünglichen [illegible] Bezugssystem

$$\Gamma^i_{00} = \frac{1}{2} g^{i\nu}\left[\frac{1}{c}\frac{\partial g_{0\nu}}{\partial t} + \frac{1}{c}\frac{\partial g_{\nu 0}}{\partial t} - \frac{\partial g_{00}}{\partial x^\nu}\right] \approx -\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{3} g^{ik}\frac{\partial g_{00}}{\partial x^k},$$

wobei wir Terme proportional $\frac{1}{c}$ systematisch weggelassen haben (z.B. stationäre Metrik)

Wenn die Bewegung im freien Fall langsam und die Schwerebeschleunigung gering ist, dürfen die mitfallenden Koordinaten von einem stationären [illegible] nur wenig abweichen, also können

$$\frac{\partial \xi^\alpha}{\partial x^\mu} = \delta_{\alpha\mu} + \epsilon^\alpha_\mu \text{ mit } |\epsilon^\alpha_\mu| \ll 1 \text{ und const}$$

unsere Metrik sollte genähert fast „Lorentzform" sein, kleine [illegible] von den [illegible] Gravitationseffekte

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\alpha\beta}\frac{\partial \xi^\alpha}{\partial x^\mu}\frac{\partial \xi^\beta}{\partial x^\nu} = \eta_{\alpha\beta}(\delta_{\alpha\mu} + \epsilon^\alpha_\mu)(\delta_{\beta\nu} + \epsilon^\beta_\nu) \stackrel{!}{=} \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu} \text{ mit } |h_{\mu\nu}| \ll 1$$

$$g^{\mu\nu} = \underbrace{\eta^{\mu\nu}}_{=\eta_{\mu\nu}} - O(h)$$

$$\boxed{\begin{aligned}\Gamma^0_{00} &= -\frac{1}{2} g^{\nu 0}\left[\frac{1}{c}\frac{\partial g_{0\nu}}{\partial t} + \frac{1}{c}\frac{\partial g_{\nu 0}}{\partial t} - \frac{\partial g_{00}}{\partial x^\nu}\right] \quad \text{stationär}\\ &\approx -\frac{1}{2} g^{00}\left[\frac{1}{c}\frac{\partial g_{00}}{\partial t}\right] \approx -\frac{1}{2} g^{00}\left[\frac{1}{c}\frac{\partial g_{00}}{\partial t}\right] \approx 0\\ &\Rightarrow \frac{d^2 x^0}{d\tau^2} \approx 0 \Rightarrow x^0 \propto \tau \stackrel{!}{=} ct \Rightarrow \tau \approx t\end{aligned}}$$

$$\Rightarrow \Gamma^i_{00} = -\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{3}\eta_{ik}\frac{\partial h_{00}}{\partial x^k} = \frac{1}{2}\frac{\partial h_{00}}{\partial x^i}$$

Damit lautet die Bewegungsgleichung

Newton-Fall

$$\frac{\partial^2 x^i}{\partial t^2} \approx -\frac{c^2}{2}\frac{\partial h_{00}}{\partial x^i} \quad \text{bzw.} \quad \frac{\partial^2 \vec{r}}{\partial t^2} \approx -\frac{c^2}{2}\vec{\nabla} h_{00} \stackrel{!}{=} -\nabla\phi$$

$$\Rightarrow h_{00}(\vec{r}) \stackrel{!}{=} g_{00}(\vec{r}) - 1 \approx +\frac{2\phi(\vec{r})}{c^2} \stackrel{\wedge}{=} \frac{2G}{c^2}\sum_{i=1}^{N}\frac{M_i}{|\vec{r}-\vec{r}_i|}, \quad \sum_i \frac{\partial^2\phi}{\partial x^{i2}} = 4\pi G \cdot \rho$$

In der Metrik steckt also das Gravitationspotential (messbare, genähert Metrik)

Massen haben an anderer Stelle gespeichert. Ziel ist es eine Gravitationstheorie aufzustellen, die eine Bestimmung der Metrik durch Massen (Energie) im Raum erlaubt.

Check: Erdoberfläche

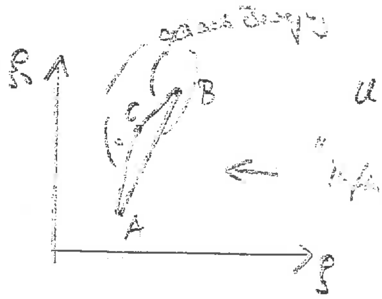
$$h_{00}(R_E) = \frac{2GM_E}{c^2 R_E} = 1{,}4 \cdot 10^{-9} \ll 1$$

$$v_\infty = \sqrt{2GM_E / R_E} \ll c$$

Geodätische Linien

- Zusammenhang zw. der affinen Verbindung $\Gamma^{\nu}_{\mu\lambda}$ und der Metrik $g_{\mu\nu}$ hergestellt
- Im spez. lokalen (pseudo-) euklidischen Inertialsystem bewegen sich Teilchen ohne äußeren Einfluss auf geraden Bahnen im Ortsraum, sodass sie die "kürzeste" Verbindung zweier Punkte. Dies gilt auch im 4-dimensionalen Raum, wobei kürzeste der Eigenzeitabstand entspricht, allerdings ist hier die Eigenzeitdifferenz maximal.

kurze Überlegung zum Beweis der Maximalität



$u^\mu = \frac{dx^\mu}{d\tau}$, $u^\mu u_\mu = 1$

$$\Rightarrow u^\mu_{AC}\,\Delta\tau_{AC} + u^\mu_{CB}\,\Delta\tau_{CB} = u^\mu_{AB}\,\Delta\tau_{AB} \qquad \Big| \cdot \big[(\ )_\mu = (\ )_\mu\big]$$

$$\Rightarrow \Delta\tau_{AC}^2 + \Delta\tau_{CB}^2 + 2\,u^\mu_{AC}\,u_{\mu,CB}\,\Delta\tau_{AC}\,\Delta\tau_{CB} = \Delta\tau_{AB}^2$$

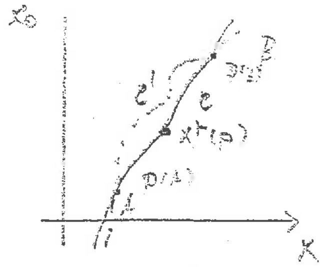
z.z.: $u^\mu_{AC}\,u_{\mu CB} \geq 1$, denn dann ist $\Delta\tau_{AB}^2 \geq \Delta\tau_{AC}^2 + \Delta\tau_{CB}^2 + 2\,\Delta\tau_{AC}\Delta\tau_{CB} = (\Delta\tau_{AC}+\Delta\tau_{CB})^2$

$\Leftrightarrow \Delta\tau_{AB} \geq (\Delta\tau_{AC}+\Delta\tau_{CB})$ (was wir zeigen wollten)

$$u^\mu_{AC} = \gamma_1\left(1, \frac{\vec{v}_1}{c}\right), \quad u_{\mu CB} = \gamma_2\left(1, -\frac{\vec{v}_2}{c}\right)$$

$$u^\mu_{AC}\,u_{\mu CB} = \gamma_1\gamma_2\left(1 - \frac{\vec{v}_1\cdot\vec{v}_2}{c^2}\right) \geq \gamma_1\gamma_2\left(1-\frac{v_1 v_2}{c^2}\right) \overset{?}{\geq} 1$$

$$\Rightarrow \left(1-\frac{v_1v_2}{c^2}\right)^2 \geq \left(1-\frac{v_1^2}{c^2}\right)\left(1-\frac{v_2^2}{c^2}\right) \Leftrightarrow \frac{v_1^2}{c^2}+\frac{v_2^2}{c^2}-2\frac{v_1v_2}{c^2} \geq 0 \Leftrightarrow \frac{1}{c^2}(v_1-v_2)^2 \geq 0 \quad \text{q.e.d.}$$



Wir parametrisieren die Kurve zwischen A und B mit Hilfe eines Parameters p: $x^\mu(p)$

Die (Eigenzeit-)Länge ergibt sich entlang der Kurve $\mathcal{C}$ zu:

$$\tau_{AB} = \int_{p_A}^{p_B} dp \, \frac{d\tau}{dp} = \int_{p_A}^{p_B} dp \left(g_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{dp} \frac{dx^\nu}{dp} \right)^{\frac{1}{2}}$$

<u>Extremalitätsbedingung</u>: Bei kleinen Änderungen $x^\mu(p) \to x'^\mu(p)$, $\mathcal{C} \to \mathcal{C}'$ soll τ_{AB} extremal (am „größten") sein, i.e. $\delta \tau_{AB} \overset{!}{=} 0$; $\delta x^\mu(p_A) \overset{!}{=} \delta x^\mu(p_B) = 0$

$$0 = \delta \tau_{AB} = \tau_{AB}(\mathcal{C}') - \tau_{AB}(\mathcal{C})$$

$$= \int_{p_A}^{p_B} dp \left\{ \left[g_{\mu\nu}(x^\alpha + \delta x^\alpha) \frac{d(x^\mu + \delta x^\mu)}{dp} \frac{d(x^\nu + \delta x^\nu)}{dp} \right]^{\frac{1}{2}} - \left[g_{\mu\nu}(x^\alpha) \frac{dx^\mu}{dp} \frac{dx^\nu}{dp} \right]^{\frac{1}{2}} \right\}$$

Taylor-Entwicklung, $g_{\mu\nu} = g_{\nu\mu}$:

$$\simeq \int_{p_A}^{p_B} dp \, \frac{1}{2} \frac{1}{\underbrace{\left(g_{\mu\nu}(x^\alpha(p)) \frac{dx^\mu}{dp} \frac{dx^\nu}{dp} \right)^{\frac{1}{2}}}_{= \frac{d\tau}{dp}}} \left\{ \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\alpha} \delta x^\alpha \frac{dx^\mu}{dp} \frac{dx^\nu}{dp} + 2 g_{\mu\nu}(x) \frac{d(\delta x^\mu)}{dp} \frac{dx^\nu}{dp} \right\}$$

← die Eigenzeit der parametrisierten Kurve, die dann als Parameter aller Trajektorien dienen darf.

$$= \int_{\tau_A}^{\tau_B} d\tau \left\{ \frac{1}{2} \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\alpha} \delta x^\alpha \frac{dx^\mu}{d\tau} \frac{dx^\nu}{d\tau} + \underbrace{g_{\mu\nu} \frac{d(\delta x^\mu)}{d\tau} \frac{dx^\nu}{d\tau}}_{g_{\alpha\nu} \frac{dx^\nu}{d\tau} \frac{d(\delta x^\alpha)}{d\tau}} \right\} \quad \xrightarrow{\text{part. Int.}} -\frac{d}{d\tau}\left(g_{\alpha\nu} \frac{dx^\nu}{d\tau} \right) \delta x^\alpha$$

part. Integration

$$= \int_{\tau_A}^{\tau_B} d\tau \, \delta x^\alpha \left\{ \frac{1}{2} \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\alpha} \dot{x}^\mu \dot{x}^\nu - \frac{\partial g_{\alpha\nu}}{\partial x^\mu} \dot{x}^\mu \dot{x}^\nu - g_{\alpha\nu} \ddot{x}^\nu \right\} \qquad \forall \, \delta x_\alpha$$

$$\Rightarrow \quad \frac{1}{2} \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\alpha} \dot{x}^\mu \dot{x}^\nu - \underbrace{\frac{\partial g_{\alpha\nu}}{\partial x^\mu} \dot{x}^\mu \dot{x}^\nu}_{\frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{\alpha\nu}}{\partial x^\mu} + \frac{\partial g_{\alpha\mu}}{\partial x^\nu} \right) \dot{x}^\mu \dot{x}^\nu} - g_{\alpha\nu} \ddot{x}^\nu = 0 \quad \Big| \cdot g^{\lambda\alpha} \leftarrow \text{Inverse}$$

$$g^{\lambda\alpha} g_{\alpha\nu} \ddot{x}^\nu = \ddot{x}^\lambda = \frac{1}{2} g^{\lambda\alpha} \left(\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\alpha} - \frac{\partial g_{\alpha\nu}}{\partial x^\mu} - \frac{\partial g_{\alpha\mu}}{\partial x^\nu} \right) \dot{x}^\mu \dot{x}^\nu \equiv - \underbrace{\left\{ \begin{matrix} \lambda \\ \mu\nu \end{matrix} \right\}}_{\equiv \Gamma^\lambda_{\mu\nu}} \dot{x}^\mu \dot{x}^\nu$$

Dies ist die Bewegungsgleichung für <u>Bestimmung</u> der (Raum-Zeit) <u>Geodäten</u>.

Dies ist also auch gerade die Bewegungsgleichung eines Massenpunktes, d.h. die Teilchenbewegung ist so, dass ... [illegible]

Aufgabe Zeigen Sie, daß die geodätischen Linien Großkreise auf einer Kugel sind. (11)

$$ds^2 = R^2(d\vartheta^2 + \sin^2\vartheta\, d\varphi^2)\,, \quad g_{11} = R^2,\; g_{12} = g_{21} = 0,\; g_{22} = R^2\sin^2\vartheta$$

$$\underset{u_1}{\uparrow} \qquad \underset{u_2}{\uparrow} \qquad g^{11} = \frac{1}{R^2},\; g^{12} = g^{21} = 0,\; g^{22} = \frac{1}{R^2\sin^2\vartheta}$$

Die affinen Übertragungen lauten:

$$\left\{ {1 \atop 11} \right\} = \frac{1}{2} g^{11} \left\{ \frac{\partial g_{11}}{\partial u_1} + \frac{\partial g_{11}}{\partial u_1} - \frac{\partial g_{11}}{\partial u_1} \right\} = \frac{1}{2} g^{11} \frac{\partial g_{11}}{\partial u_1} = 0$$

$$\left\{ {2 \atop 11} \right\} = \left\{ {1 \atop 12} \right\} = \left\{ {1 \atop 21} \right\} = \left\{ {2 \atop 22} \right\} = 0$$

$$\left\{ {2 \atop 12} \right\} = \left\{ {2 \atop 21} \right\} = \frac{1}{2} g^{22} \left(\frac{\partial g_{22}}{\partial u_1} + \frac{\partial g_{12}}{\partial u_2} - \frac{\partial g_{12}}{\partial u_2} \right) = \frac{1}{2} g^{22} \frac{\partial g_{22}}{\partial u_1} = \frac{\cos\vartheta}{\sin\vartheta} = \underline{\cot\vartheta}$$

$$\left\{ {1 \atop 22} \right\} = \frac{1}{2} g^{11} \left(\frac{\partial g_{21}}{\partial u_2} + \frac{\partial g_{21}}{\partial u_2} - \frac{\partial g_{22}}{\partial u_1} \right) = -\frac{1}{2} g^{11} \frac{\partial g_{22}}{\partial u_1} = \underline{-\sin\vartheta\cos\vartheta}$$

$\Rightarrow$ $i = 1,\ u_1 = \vartheta$

$$\frac{d^2\vartheta}{ds^2} + \left\{ {1 \atop ik} \right\} \frac{du_i}{ds} \frac{du_k}{ds} = \frac{d^2\vartheta}{ds^2} + \left\{ {1 \atop 22} \right\} \left(\frac{d\varphi}{ds} \right)^2 = \frac{d^2\vartheta}{ds^2} - \sin\vartheta\cos\vartheta \left(\frac{d\varphi}{ds} \right)^2 = 0 \qquad (1a)$$

s: Bogenlänge

$i = 2,\ u_2 = \varphi$

$$\frac{d^2\varphi}{ds^2} + \left\{ {2 \atop ik} \right\} \frac{du_i}{ds} \frac{du_k}{ds} = \frac{d^2\varphi}{ds^2} + \left\{ {2 \atop 12} \right\} \frac{d\vartheta}{ds} \frac{d\varphi}{ds} + \left\{ {2 \atop 21} \right\} \frac{d\varphi}{ds} \frac{d\vartheta}{ds} = \frac{d^2\varphi}{ds^2} + 2\cot\vartheta \frac{d\varphi}{ds} \frac{d\vartheta}{ds} \qquad (1b)$$

$$(1b)\cdot\sin^2\vartheta : \quad \frac{d}{ds}\left(\sin^2\vartheta \frac{d\varphi}{ds} \right) = 0 \quad \text{bzw.} \quad \underline{\sin^2\vartheta \frac{d\varphi}{ds} = h = \text{const}} \qquad (2)$$

$$\text{In } (1a) : \quad \frac{d^2\vartheta}{ds^2} - \frac{h^2\cos\vartheta}{\sin^3\vartheta} = 0 \qquad \Big|\; 2\frac{d\vartheta}{ds}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{d}{ds}\left[\left(\frac{d\vartheta}{ds} \right)^2 + \frac{h^2}{\sin\vartheta} \right] = 0 \Rightarrow \underline{\left(\frac{d\vartheta}{ds} \right)^2 + \frac{h^2}{\sin^2\vartheta} = \text{const} = \frac{h^2}{\sin^2\vartheta_0}} \quad \left(0 \le \vartheta_0 \le \frac{\pi}{2} \right) \qquad (3)$$

Übergang zur $\vartheta(\varphi)$-Darstellung: $\frac{d\vartheta}{ds} = \frac{d\vartheta}{d\varphi} \cdot \frac{d\varphi}{ds} = \frac{h}{\sin^2\vartheta} \frac{d\vartheta}{d\varphi}$

$$\overset{(3)}{\Rightarrow} \quad \frac{d\vartheta}{d\varphi} = \pm \frac{1}{\sin\vartheta} \left(\frac{\sin^2\vartheta}{\sin^2\vartheta_0} - 1 \right)^{-\frac{1}{2}} \qquad (4)$$

Hier ist die Integrationskonstante h wieder verschwunden ([illegible] $s \to s/h$ in (2), [illegible] $\vartheta(\varphi)$)

Aufgrund von Gl. (3) bilden ϑ_0 und $\pi-\vartheta_0$ die Grenzen des zulässigen Bereichs der Variable ϑ. Aus (4) folgt dann (Gradshteyn-Ryzhik, Formel (2.599.6))

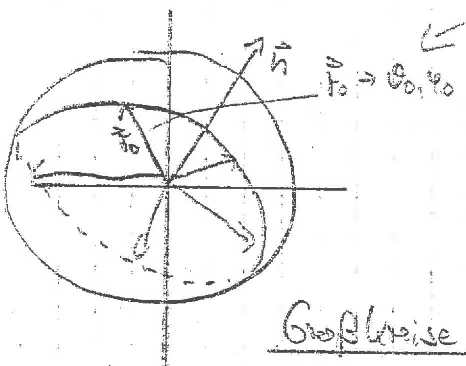
$$\varphi = \varphi_0 \pm \int_{\vartheta_0}^{\vartheta} \frac{d\vartheta}{\sin\vartheta}\left(\frac{\sin^2\vartheta}{\sin^2\vartheta_0}-1\right)^{-\frac12} = \varphi_0 \mp \arctan \frac{\cos\vartheta}{\sqrt{\frac{\sin^2\vartheta}{\sin^2\vartheta_0}-1}}\Bigg|_{\vartheta_0}^{\vartheta}$$

$$= \varphi_0 \mp \arctan\frac{\cos\vartheta}{\sqrt{\frac{\sin^2\vartheta}{\sin^2\vartheta_0}-1}} \pm \frac{\pi}{2} \qquad (5)$$

$$\Rightarrow \tan\left(\varphi-\varphi_0\mp\frac{\pi}{2}\right) = -\cot(\varphi-\varphi_0) = \frac{\mp\cos\vartheta}{\sqrt{\frac{\sin^2\vartheta}{\sin^2\vartheta_0}-1}} = \frac{\mp\cot\vartheta}{\sqrt{\cot^2\vartheta_0-\cot^2\vartheta}}$$

$$\Rightarrow \cot\vartheta = \cot\vartheta_0 \cdot \frac{\cot(\varphi-\varphi_0)}{\sqrt{1+\cot^2(\varphi-\varphi_0)}} = \underline{\cot\vartheta_0\cos(\varphi-\varphi_0)} \qquad (6)$$

ϑ_0 ist kleinster Winkel $D \in [\vartheta_0, \pi-\vartheta_0]$



Hierbei sind ϑ_0, φ_0 die Koordinaten des Scheitelpunkts der geodätischen Linie (siehe Figur).

<u>Großkreise</u>: Einen Großkreis durch den Punkt

soll höchster Punkt sein. $\vec r_0 = R(\sin\vartheta_0\cos\varphi_0, \sin\vartheta_0\sin\varphi_0, \cos\vartheta_0) = (\vartheta_0, \varphi_0)$ erhalten wir, indem + den Vektor $\vec r_0$ um eine auf ihm senkrecht stehende Kugelachse, deren Richtung wir mit $\vec n$ bezeichnen, rotieren lassen. Da der Großkreis bzgl. dieser Achse gerade den Äquator darstellt, und $\vec r_0$ der höchste Punkt darstellt, <u>muß</u> $\vec n$ in Richtung des <u>Meridians</u>, d.h. in Richtung e_ϑ am Punkte $\vec r_0$ liegen.

$$\vec n = \vec e_\vartheta(\vec r_0) = \frac{\partial}{\partial\vartheta}\begin{pmatrix}\sin\vartheta\cos\varphi\\ \sin\vartheta\sin\varphi\\ \cos\vartheta\end{pmatrix}\Bigg|_{\vartheta_0,\varphi_0} = \begin{pmatrix}\cos\vartheta_0\cos\varphi_0\\ \cos\vartheta_0\sin\varphi_0\\ -\sin\vartheta_0\end{pmatrix}$$

Der zu suchende Großkreis ergibt sich aus der offensichtlichen Forderung

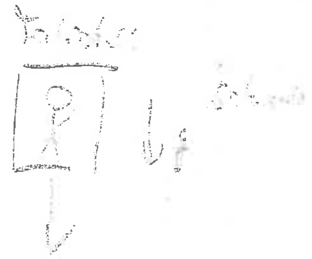
$$\vec n\cdot\vec r(\vartheta,\varphi) \stackrel{!}{=} 0 = R(\cos\vartheta_0\cos\varphi_0\sin\vartheta\cos\varphi + \cos\vartheta_0\sin\varphi_0\sin\vartheta\sin\varphi - \sin\vartheta_0\cos\vartheta)$$

$$= R(\cos\vartheta_0\sin\vartheta\cos(\varphi-\varphi_0) - \sin\vartheta_0\cos\vartheta) \stackrel{!}{=} 0$$

$$\Rightarrow \quad \cot\vartheta = \cot\vartheta_0\cos(\varphi-\varphi_0) \hat{=} (6) \quad \text{q.e.d.}$$

Wiederholung:

starkes Äquivalenzprinzip:



An jedem Raumzeitpunkt in einem beliebigen Gravitationsfeld ist es möglich, ein lokales Inertialsystem einzuführen, in dem alle physikalischen Gesetze für eine genügend kleine Umgebung dieses Punktes dieselbe Form haben wie in Abwesenheit eines Gravitationsfeldes

- (Lichtablenkung)

- freier Fall: $\frac{d^2\xi_\alpha}{d\tau^2} = 0$ lok. Inertialsystem, $\Gamma^\alpha_{\beta\gamma} = 0$ in lok. Umgebung

beliebiges Koordinatensystem $\Rightarrow$ $\ddot{x}^\lambda + \Gamma^\lambda_{\mu\nu}\dot{x}^\mu \dot{x}^\nu = 0$, $\Gamma^\lambda_{\mu\nu} = \frac{\partial x^\lambda}{\partial \xi^\alpha}\frac{\partial^2 \xi^\alpha}{\partial x^\mu \partial x^\nu} = \frac{1}{2} g^{\sigma\lambda}\left[\frac{\partial g_{\mu\sigma}}{\partial x^\nu} + \frac{\partial g_{\nu\sigma}}{\partial x^\mu} - \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\sigma}\right] = \left\{ {\lambda \atop \mu\nu} \right\}$ Christoffel-Symbol 2. Art

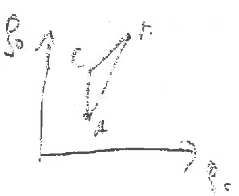
Skalar, invariante Größe unabh. von Wahl des Bezugssystems — $c^2 d\tau^2 = \eta_{\alpha\beta}\, d\xi^\alpha d\xi^\beta = \underbrace{\left(\frac{\partial \xi^\alpha}{\partial x^\mu}\frac{\partial \xi^\beta}{\partial x^\nu}\eta_{\alpha\beta}\right)}_{g_{\mu\nu}\text{ – metr. Tensor}} dx^\mu dx^\nu$

- Newton'scher Grenzfall aus Metrik

$$\frac{d^2 r^i}{d\tau^2} \approx -\Gamma^i_{00}\cdot c^2 \overset{g^{\mu\nu} = \eta^{\mu\nu} + h^{\mu\nu}}{\approx} -\frac{1}{2}c^2 \frac{\partial h_{00}}{\partial x^i} \;\hat{=}\; -\nabla_i \phi_{Grav.}$$

$\rightarrow$ $g_{00}(\vec{r}) \approx 1 + \frac{2\phi_{Grav}(\vec{r})}{c^2}$, $\sum_i \frac{\partial^2 \phi}{\partial x_i^2} = 4\pi G\rho$ (zu vergl. Gravitationsgesetz sollte 2. te Ableitung der Metrik enthalten)

- freier Fall $\hat{=}$ Geodätenbewegung, i.a. längste mögliche Abstand zwischen Raumzeitpunkt



$\tau_{AB} > \tau_{AC} + \tau_{CB}$