# Die Einsteinschen Feldgleichungen (sechster Teil) 

## "Ableitung" der Feldgleichungen

Einen näherungsweise elementaren Zusammenhang zwischen Newtonscher Gravitation und dem metrischen Tensor hatten wir bereits in der nichtrelativistischen Betrachtung der Geodätengleichung mit stationärer Metrik und "schwacher" Gravitationsfelder:

$$\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = -\vec{\nabla}\phi(\vec{r}) \quad , \quad \phi(\vec{r}) = -G\sum_{i=1}^{N}\frac{M_i}{|\vec{r}-\vec{r}_i|}$$

und

$$\Gamma^i_{00}(\vec{r}) \approx \frac{1}{c^2}\frac{\partial\phi}{\partial x_i} \quad , \quad g_{00}(\vec{r}) = 1 + h_{00}(\vec{r}) \approx 1 + \frac{2}{c^2}\phi(\vec{r})$$

Eine Differentialgleichung für das Newtonsche Gravitationspotential erhalten wir analog zur Poisson-Gleichung aus der Elektrodynamik, i.e.

$$\nabla^2\phi(\vec{r}) = 4\pi G\sum_{i=1}^{N} M_i\,\delta(\vec{r}-\vec{r}_i) \rightarrow 4\pi G\,\underbrace{\rho_0(\vec{r})}_{\text{Massendichteverteilung}}$$

$$\Rightarrow \quad \nabla^2 g_{00}(\vec{r}) \approx \frac{8\pi G}{c^2}\rho_0(\vec{r}) \approx \underline{\frac{8\pi G}{c^4}\,T_{00}(\vec{r})} \quad , \qquad (*)$$

da im nichtrelativistischen Grenzfall die Massedichte gerade (bis auf einen Faktor $c^2$) der Energiedichte, also der 00-Komponente des <u>Energie-Impuls-Tensors</u> entspricht.

Die Aufgabe besteht nun darin, eine geeignete <u>Tensorgleichung</u>, die obige Gleichung als nichtrelativistischen Grenzfall enthält, aufzustellen. Wir erkennen auch schon, daß auf der rechten Seite der <u>Energie-Impuls-Tensor</u> $T_{\mu\nu}$ stehen soll, da er die Massen- und Energie-Verteilung in der Raum-Zeit charakterisiert. Wir stellen deshalb folgende Forderung an die zu findende Gleichung:

(1) Die rechte Seite soll proportional zum Tensor $T_{\mu\nu}$ sein.

(2) Die linke Seite muß daher auch ein Tensor 2-ter Stufe sein, der aus dem metrischen Tensor abgeleitet ist und höchstens 2-te Ableitungen von $g_{\mu\nu}$ enthält. Dieser Tensor soll keine neuen Naturkonstanten (i.e. dimensionsbehaftete Konstante) enthalten.

(3) Obige Gleichung soll sich im nichtrel., d.h. Newtonschen Limes, ergeben.

Wir nennen den gesuchten Tensor auf der linken Seite $G_{\mu\nu}$, i.e. ②

$$G_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4} T_{\mu\nu} \qquad (**)$$

Es folgen sofort 2 Bedingungen an den Tensor $G_{\mu\nu}$:

(a) Symmetrie: $G_{\mu\nu} = G_{\nu\mu}$, da dies auch für $T_{\mu\nu}$ gilt

(b) Divergenzfrei: $T^{\mu\nu}{}_{||\nu} = 0 \Rightarrow$

$$G^{\mu\nu}{}_{||\nu} = 0 ,$$

i.e. die Erhaltung von Energie und Impuls impliziert, daß auch der gesuchte Tensor $G_{\mu\nu}$ divergenzfrei ist.

Speziell für den Materiefreien Raum, i.e. den vollkommen leeren Raum, fordern wir auch noch, daß

(4) Die Lösungen zu den Feldgleichungen im materiefreien Raum sollen die Lorentz-Metrik für die gesamte Raum-Zeit als spez. Lösung enthalten, i.e. $T_{\mu\nu} = 0 \Rightarrow g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu}$ ist spez. Lösung

Als letztes Kriterium wollen wir auch erreichen, daß die Feldgleichung eine eindeutige Lösung garantieren.

Betrachten wir eine Diff-Gleichung der Form

$$F(y^{(n)}, \dots, y, x) = 0 ,$$

welche nach $y^{(n)}$ aufgelöst werden kann, so ist klar, daß die Lösung nur dann eindeutig ist, wenn $y^{(n)}$ eindeutig aus $y^{(n-1)}, y^{(n-2)}$ etc. hervorgeht. Dies ist garantiert, wenn $y^{(n)}$ linear in F eingeht. In der Tat ist F algebraisch, so garantiert Linearität in $y^{(n)}$ eine notwendige wie hinreichende Kondition für die Eindeutigkeit der Lösung. $\Rightarrow$

(5) Die 2-ten Ableitung nach $g_{\mu\nu}$ solle linear in den Feldgleichungen vorkommen, evtl. nicht aber die 1-te Ableitungen oder 0-te Ableitungen, i.e. die Feldgleichungen sollen quasi-linear sein.

Die Struktur von $G_{\mu\nu}$ bezüglich der Ableitungen des metr. Tensor können wir aber auch aus Dimensionsbetrachtungen erschließen. Da der Tensor $g_{\mu\nu}$ dimensionslos ist (falls alle $dx^\nu$ die Dimension Länge haben, z.B. in Kugelkoordinaten ist dies nicht der Fall, die $g_{\mu\nu}$ sind dann dimensionslos), während die rechte Seite von (**) die Dimension [Länge$^{-2}$] hat, muß jeder in $G_{\mu\nu}$ additiv auftretende Term genau zwei Ableitungen nach den Ortskoordinaten enthalten (danach Forderung (2) keine weiteren dimensionsbehafteten Naturkonstanten, etwa eine „Elementarlänge", vorkommen). Es folgt: $G_{\mu\nu}$ kann also nur die 2-ten Ableitungen von $g_{\mu\nu}$ linear (Forderung (5)) oder die erste Ableitungen von $g_{\mu\nu}$ in quadratischer Form enthalten. Der metrische Tensor, da dimensionslos, kann in beliebiger Weise vorkommen.

Da die kovariante Ableitungen von $g_{\mu\nu}$ verschwinden, bleibt als einziger geeigneter Ausgangspunkt zur Konstruktion des Tensors $G_{\mu\nu}$ der Riemannsche Krümmungstensor $R_{\mu\nu\alpha\beta}$. In der expliziten Schreibweise sehen wir auch, daß er die richtige Struktur bezüglich der Ableitungen des metrischen Tensors hat: die 2-ten Ableitungen kommen linear vor, die ersten Ableitungen (über die Christoffel-Symbole) quadratisch; höhere als 2-te Ableitungen treten nicht auf.

Wir müssen nun aus dem Krümmungstensor einen Tensor 2-ter Stufe konstruieren, der (1) symmetrisch und (2) divergenzfrei ist. Wie wir bereits im letzten Kapitel besprochen haben, ist der einzige Tensor 2-ter Stufe, den wir durch Kontraktion von $R_{\mu\nu\alpha\beta}$ bestimmen können, der Ricci-Tensor

← dimensionslos, da ja $g_{\mu\nu}$ invertiert

$$R_{\mu\nu} = g^{\alpha\beta} R_{\alpha\mu\beta\nu} = R^{\alpha}{}_{\mu\alpha\nu} = R_{\nu\mu} \quad \leftarrow \text{besitzt Dim [Länge}^{-2}]$$

der auch bereits symmetrisch in seinen Indizes ist.

Der einzig andere sym. Tensor 2. Stufe, der in Frage kommt, ist der metrische Tensor selbst. Wir können ihn mit einem beliebigen Skalar der Dimension [Länge$^{-2}$] multiplizieren, der einzig geeignete, vom Krümmungstensor abgeleitete Skalar, ist also gerade der Krümmungsskalar, der ebenfalls die Dim [Länge$^{-2}$] bereits besitzt:

$$R = g^{\mu\nu} R_{\mu\nu} = g^{\mu\nu} g^{\alpha\beta} R_{\alpha\mu\beta\nu}$$

Weitere geeignete Tensoren, die vom metrischen Tensor abgeleitet werden, gibt es nicht.

Der allgemeinste Ansatz lautet daher

$$G_{\mu\nu} = a\, R_{\mu\nu} + b \cdot R\, g_{\mu\nu},$$

mit dimensionslose Konstante a und b. Um das rel. Verhältnis der Konstante zu bestimmen, "hoffen" wir, daß die Divergenzfreiheit von $G_{\mu\nu}$ uns Aufschluß liefert (Wenn dies nicht klappt, dann scheitert die gesamte Überlegung, und auch Einsteins Theorie?):
Um die Divergenz des Ausdruckes zu bilden, benötigen wir die Bianchi-Identitäten

$$R_{\alpha\mu\beta\gamma\|\delta} + R_{\alpha\mu\delta\beta\|\gamma} + R_{\alpha\mu\gamma\delta\|\beta} = 0$$

Wir kontrahieren $\alpha$ mit $\beta$ und $\mu$ mit $\gamma$ durch Überschieben mit $g^{\alpha\beta}$ und $g^{\mu\gamma}$ $\left( g^{\alpha\beta}{}_{\|\gamma} = 0 \right)$

$$0 = R^{\beta\gamma}{}_{\beta\gamma\|\delta} + \underbrace{R^{\beta\gamma}{}_{\delta\beta\|\gamma}}_{-R^{\gamma}_{\delta}} + \underbrace{R^{\beta\gamma}{}_{\gamma\delta\|\beta}}_{-R^{\beta}_{\delta}} =$$

$$= R_{\|\delta} - R^{\gamma}{}_{\delta\|\gamma} - R^{\beta}{}_{\delta\|\beta} = R_{\|\delta} - 2R^{\gamma}{}_{\delta\|\gamma}$$

$$\Rightarrow \quad R^{\gamma}{}_{\delta\|\gamma} = \frac{1}{2} R_{\|\delta} \overset{\text{(Skalar)}}{=} \frac{1}{2}\frac{\partial R}{\partial x^{\delta}}$$

Mit der Forderung

$$G^{\mu\nu}{}_{\|\nu} \overset{!}{=} 0 \overset{\text{da } G^{\mu\nu} \text{ symmetrisch}}{\Longleftrightarrow} G^{\nu\mu}{}_{\|\nu} \overset{!}{=} 0 \overset{(g_{\alpha\mu})_{\|\nu} = 0}{\Longleftrightarrow} G^{\nu}{}_{\mu\|\nu} \overset{!}{=} 0$$

folgt

$$G^{\nu}{}_{\mu\|\nu} = a\, R^{\nu}{}_{\mu\|\nu} + b\, R_{\|\nu}\, \underbrace{\delta^{\nu}_{\mu}}_{\hat{=}\, g^{\nu}_{\mu}} = \left( \frac{a}{2} + b \right) R_{\|\mu} \overset{!}{=} 0$$

$$\Rightarrow \quad b = -\frac{a}{2}$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{G_{\mu\nu} = a \left( R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R\, g_{\mu\nu} \right) \hat{=} \frac{8\pi G}{c^4} T_{\mu\nu}}$$

Bemerkung: Der Tensor $(R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R\, g_{\mu\nu})$ bezeichnet man auch als den divergenzfreien Ricci-Tensor

Ohne Beweis: Er ist neben $g_{\mu\nu}$ selber der einzige andere Tensor 2-ter Stufe, dessen Divergenz verschwindet und der vollständig aus dem metr. Tensor und dessen ersten und zweiten Ableitungen aufgebaut ist.

nun eigentlich plausibel?

(ohne Dimension)

Um die Konstante $a$ zu bestimmen, müssen wir uns den Newtonschen Grenzfall dieser Gleichung betrachten und mit den anfänglichen Gleichungen vergleichen. Die 00te Komponente (alle anderen Komponenten von $T^{\mu\nu}$ sind im Limes kleiner Geschwindigkeiten linear oder quadratisch klein) lautet:

$$G_{00} = a\left(R_{00} - \frac{1}{2} R g_{00}\right) = \frac{8\pi G}{c^4} T_{00} \approx \frac{8\pi G}{c^2} \rho_0(\vec{r})$$ ← stationäre Verteilung in einem spez. Bezugssystem

Weiter ist

$$R_{\mu\nu\alpha\beta} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 g_{\alpha\mu}}{\partial x^\beta \partial x^\nu} - \frac{\partial^2 g_{\beta\mu}}{\partial x^\alpha \partial x^\nu} - \frac{\partial^2 g_{\mu\nu}}{\partial x^\beta \partial x^\mu} + \frac{\partial^2 g_{\beta\nu}}{\partial x^\alpha \partial x^\mu}\right) + g_{\rho\lambda}\left(\Gamma^\rho_{\alpha\mu}\Gamma^\lambda_{\beta\nu} - \Gamma^\rho_{\beta\mu}\Gamma^\lambda_{\alpha\nu}\right)$$

Nun ist

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu} \quad \text{mit} \quad |h_{\mu\nu}| \ll 1,$$

sodaß $\frac{\partial^2 g}{\partial x^2} \sim O(h_{\mu\nu})$, $\Gamma \sim \frac{\partial g}{\partial x} \sim O(h_{\mu\nu})$, $\Gamma \cdot \Gamma \sim O(h_{\mu\nu}^2)$

und wir die quadratischen Terme, i.e. die nichtlinearen Terme $\frac{\partial g}{\partial x} \cdot \frac{\partial g}{\partial x}$ erst einmal als quadratisch kleine Terme vernachlässigen können!

$$\Rightarrow R_{00} = R^\alpha{}_{0\alpha 0} = g^{\alpha\beta} R^\beta{}_{0\alpha 0} \overset{\text{Beschränkung auf lineare kleine Terme}}{\approx} \eta^{\alpha\beta} R^\beta{}_{0\alpha 0} = \underbrace{R_{0000}}_{0} - \sum_{i=1}^{3} R_{i0i0} \overset{\text{Antisymmetrieeigenschaft}}{=} -\sum_{i=1}^{3} R_{i0i0}.$$

Weiter sei (wie gehabt) die Metrik stationär, i.e. $\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial ct} = 0$, i.e. $g_{\mu\nu} = g_{\mu\nu}(x^1, x^2, x^3)$, sodaß

$$R_{i0i0} \overset{\nu=\beta=0}{=} \frac{1}{2}\frac{\partial^2 g_{00}}{(\partial x^i)^2} + O(h_{\mu\nu}^2) \approx \frac{1}{2}\frac{\partial^2 g_{00}}{(\partial x^i)^2}$$

(Statt der Stationarität können wir auch weniger restriktiv fordern, daß $\frac{1}{\partial ct}$ sehr viel kleiner als $\frac{1}{\partial x^i}$ sei und somit, ähnlich wie bei $v \ll c$ zu vernachlässigen ist).

$$\Rightarrow \underline{R_{00}} \approx -\frac{1}{2}\nabla^2 g_{00} = -\frac{1}{2}\nabla^2 h_{00} \overset{\text{Newton-Limes, Seite ⑦}}{\approx} \underline{-\frac{1}{c^2}\nabla^2 \phi(\vec{r})} \rightarrow -\frac{4\pi G}{c^4} T_{00}(\vec{r})$$

Um $R$ und damit die Konstante $a$ zu bestimmen, werden wir an dieser Stelle $R$ nicht direkt (vgl. zusätzliche Betrachtung Seite ⑧), sondern durch einen geschickten Trick aus $R_{00}$ und $T_{00}$ ermitteln.

Unsere Zielgleichung lautet:

$$G_{\mu\nu} = a\left(R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g_{\mu\nu}\right) \overset{!}{=} \frac{8\pi G}{c^4} T_{\mu\nu} \qquad (***)$$

Nun ist im nichtrel. Limes $T_{\mu\nu} = \left(\rho + \frac{P}{c^2}\right) u_\mu u_\nu - P g_{\mu\nu}$, wobei $T_{00} \approx \rho_0(\vec{r}) c^2$ den dominanten Beitrag darstellt, da die Geschwindigkeiten klein gegen $c$ sein soll und der Druck gegenüber der Massendichte $\rho c^2$ ebenfalls als klein angenommen werden soll.

Aus (***) folgt durch Verjüngen

dominanter Beitrag

$$a(R^\mu_\mu - \tfrac{1}{2} R\,\delta^\mu_\mu) = a(R-2R) = \underline{-aR} = \frac{8\pi G}{c^4} T^\mu_\mu \approx \frac{8\pi G}{c^4} T^0_0 \approx \underline{\frac{8\pi G}{c^4} T_{00}},$$

da $T^0_0 = g^{0\alpha} T_{\alpha 0} \approx \eta^{0\alpha} T_{\alpha 0} \approx \eta^{00} T_{00} = T_{00}$ ist.

Daraus folgt dann für die (00)-Komponente aus (***)

$$a(R_{00}) \overset{!}{=} \frac{8\pi G}{c^4} T_{00} + \frac{a}{2} R\, g_{00} \approx \frac{8\pi G}{c^4}\left(T_{00} - \frac{1}{2} T_{00}\right) = \frac{4\pi G}{c^4} T_{00}$$

bzw. das Resultat für $R_{00}$ eingesetzt

$$a\left(-\frac{1}{2} \nabla^2 g_{00}\right) \approx \frac{4\pi G}{c^4} T_{00}$$

Ein Vergleich mit (*) liefert sofort, daß $\underline{a = -1}$. Damit

$$G_{\mu\nu} = \boxed{R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R\, g_{\mu\nu} = -\frac{8\pi G}{c^4} T_{\mu\nu}}$$

– Einsteinsche Feldgleichung.

haben wir die Einsteinschen Feldgleichungen deduziert.

Da die linke Seite divergenzfrei ist, folgt sofort, daß auch $T_{\mu\nu}$ divergenzfrei ist (das haben wir nur zwar in die Deduktion hineingesteckt, umgekehrt aber, postuliert man die EG, so folgt dann zwingend $T_{\mu\nu\|\nu} = 0$, i.e. die Erhaltung von Energie und Impuls).

Die EG lassen sich auch noch in eine andere vollkommen äquivalente Form bringen:

$$R^\mu_\mu - \frac{1}{2} R\,\delta^\mu_\mu = R - 2R = \underline{-R} = -\frac{8\pi G}{c^4} T^\mu_\mu \equiv \underline{-\frac{8\pi G}{c^4} T}$$

gl. jeweils oben ein

$$\Rightarrow \boxed{R_{\mu\nu} = -\frac{8\pi G}{c^4}\left(T_{\mu\nu} - \frac{1}{2} T g_{\mu\nu}\right) \quad \text{mit } T \equiv T^\mu_\mu},$$

diese Form, also indem wir den Krümmungsskalar $R$ durch die Spur $T^\mu_\mu$ des Energie-Impulstensors ausgedrückt haben, weist eine bemerkenswerte Symmetrisierung der obigen Form der EG auf und drückt nochmal den engen Zusammenhang zwischen Gravitation und Materie aus

• In unserer gesamten Deduktion ist nur die Abweichung $h_{00} = g_{00} - 1$, nicht aber die andere Einträge wichtig aufgetreten. Im Kapitel 9.5 zeigt Adler, dass in der Tat der Newtonsche Limes durch eine Metrik mit folgender diagonaler Form

$$g_{\mu\nu} \hat{=} \begin{pmatrix} 1+h_{00} & & & 0 \\ & -1+h_{00} & & \\ & & -1+h_{00} & \\ 0 & & & -1+h_{00} \end{pmatrix}$$

gelöst wird. Daraus resultiert ein genähertes Linien-Element der Form

$$ds^2 = \left(1 + \frac{2\phi}{c^2}\right) c^2 dt^2 - \left(1 - \frac{2\phi}{c^2}\right) d\vec{x}^{\,2} .$$

• Im vollkommen Materiefreien Fall ist $T^{\mu\nu} = 0$ über den gesamten Raum-Zeitbereich. Daraus resultiert dann

(Form von $R^{\alpha}_{\mu\alpha\nu}$, wie wir den Krümmungstensor gegen Anfang des letzten Kapitels eingeführt haben)

$$R_{\mu\nu} = \frac{\partial \Gamma^{\alpha}_{\alpha\mu}}{\partial x^{\nu}} - \frac{\partial \Gamma^{\alpha}_{\nu\mu}}{\partial x^{\alpha}} + \Gamma^{\alpha}_{\nu\beta}\Gamma^{\beta}_{\alpha\mu} - \Gamma^{\alpha}_{\alpha\beta}\Gamma^{\beta}_{\nu\mu} = 0$$

Wir wissen, dass dies $g_{\mu\nu} \equiv \eta_{\mu\nu}$ (im Großen) als Lösung enthält, da wenn $g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} \Rightarrow R^{\alpha}_{\mu\beta\nu} = 0 \Rightarrow R_{\mu\nu} = 0$. Damit gilt unsere Forderung (4). Es muß aber nicht die einzige sein, (da z.B. beliebige Koordinatentransformation ja möglich, sodaß $\eta_{\mu\nu} \xrightarrow{x \to x'} g_{\mu\nu}$, aber Raum natürlich derselbe).

• Wenn $R_{\mu\nu} = 0$ in einem endlichen Bereich, dann folgt daraus nicht, daß auch der Krümmungstensor $R_{\mu\nu\alpha\beta}$ dort verschwindet, i.e. der Raum kann gekrümmt sein.

Innen $T^{\mu\nu} \neq 0$ z.B. Sonne

Aus $T^{\mu\nu} = 0$
$\Rightarrow R^{\mu\nu} = 0$, aber $R_{\mu\nu\alpha\beta} \neq 0$, da ja immer noch Gezeitenkräfte $F^i(x+\delta x) - F^i(x)$ wirken, wie ja auch gerade im Newtonschen Limes gezeigt. Der Raum ist also um die Erde oder Sonne gekrümmt!

• Die Einfachheit der EG darf nicht darüber hinwegtäuschen, daß der Ricci-Tensor $R_{\mu\nu}$ sehr komplex aus den $g_{\mu\nu}$ aufgebaut ist! Die Lösung der EG ist daher ein schwieriges math. Problem.

Zusätzliche Betrachtung: direkte Berechnung vom Krümmungsskalar $R$ im Newtonschen Grenzfall

(8)

Es ist

$$R = g^{\mu\nu} g^{\alpha\beta} R_{\alpha\mu\beta\nu} \approx \eta^{\mu\nu}\eta^{\alpha\beta} R_{\alpha\mu\beta\nu} = \eta^{\nu\beta}\eta^{\mu\alpha} R_{\mu\nu\alpha\beta}$$

($g^{\mu\nu} = \eta^{\mu\nu} + h^{\mu\nu}$; Umbenennung)

$$\approx \eta^{\nu\beta}\eta^{\mu\alpha} \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 g_{\alpha\mu}}{\partial x^\beta \partial x^\nu} - \frac{\partial^2 g_{\beta\mu}}{\partial x^\alpha \partial x^\nu} - \frac{\partial^2 g_{\alpha\nu}}{\partial x^\beta \partial x^\mu} + \frac{\partial^2 g_{\beta\nu}}{\partial x^\alpha \partial x^\mu}\right) + O(h_{\mu\nu}^2)$$

$$\approx \eta^{\nu\beta}\eta^{\mu\alpha}\left(\frac{\partial^2 g_{\alpha\mu}}{\partial x^\beta \partial x^\nu} - \frac{\partial^2 g_{\beta\mu}}{\partial x^\alpha \partial x^\nu}\right) \quad \leftarrow \text{direkte Rechnung, stat. Metrik}$$

$$\overset{\text{stat. Metrik}}{=} -\sum_i \frac{\partial^2 g_{00}}{(\partial x^i)^2} + \sum_{i,j} \frac{\partial^2 g_{jj}}{(\partial x^i)^2} - \sum_{i,j} \frac{\partial^2 g_{ij}}{\partial x^i \partial x^j}$$

An dieser Stelle fehlt uns Information über das Verhalten der $h_{ij}$.
Diese hatten wir bis dato auch nicht benötigt.
Falls nun die Form von Seite (7) oben gilt, also wie in Adler Kap 9.5 angegeben, dann ist

$$h_{ij} = (+h_{00})\delta_{ij},$$

so daß sich nach einiger kürzerer Rechnung ergibt

$$R = -\sum_i \frac{\partial^2 h_{00}}{(\partial x^i)^2} + 3\cdot\sum_i \frac{\partial^2 h_{00}}{\partial x_i^2} - \sum_i \frac{\partial^2 h_{00}}{\partial x_i^2} = \nabla^2 h_{00} = \nabla^2 g_{00}$$

Zusammen mit der Beziehung $R_{00} = -\frac{1}{2}\nabla^2 g_{00}$
wird dann aus der (00)-te Komponente von (***)

$$G_{00} = a\left(R_{00} - \frac{1}{2} R \underbrace{g_{00}}_{\approx 1}\right) = a\left(-\frac{1}{2}\nabla^2 g_{00} - \frac{1}{2}\nabla^2 g_{00}\right) = (-a)\,\nabla^2 g_{00} \overset{!}{=} \frac{8\pi G}{c^4} T_{00}$$

Ein Vergleich mit (*) ergibt dann wieder $\underline{a = -1}$

Bemerkung: Im Adler Kap. 9.5. erkennt man, daß dies alles konsistent ist und daß $R_{\mu\nu}$ im Rahmen der Näherung Diagonal ist und proportional zu $1/4$, i.e.

(9.87) $\quad R_{\mu\nu} = C(T_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} T) = C\,\frac{\rho_0}{2}\,\delta_{\mu\nu}$

Die Lösung (9.99), i.e. die Form von $g_{\mu\nu}$ auf Seite (8) oben, erfüllt dann diese Gleichung in diesem Newtonschen Grenzfall.

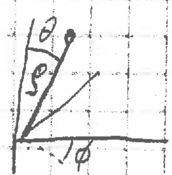
## radialsymmetrische Gravitationsfelder

Um die Voraussagen der EG an experimentellen Beobachtungen überprüfen zu können, müssen wir sie lösen. Die allgemeine Lösung der Feldgleichungen ist aber nicht bekannt. Man kennt aber spezielle Lösungen, die bestimmte Symmetriebedingungen und Randbedingungen erfüllen. Der für die Astronomie wohl wichtigste Spezialfall ist der eines zeitunabhängigen, radialsymmetrischen Gravitationsfeldes, das in der Umgebung eines kugelförmigen Sterns vorliegen sollte. Die exakte Lösung dieses Problems wurde 1916 von Karl Schwarzschild gefunden; wie man zeigen kann, ist die Lösung unter den folgenden Bedingungen sogar eindeutig:

1.) die Metrik ist zeitunabhängig
2.) die Metrik ist radialsymmetrisch
3.) für große Abstände vom Zentrum beschreibt die Metrik einen flachen Raum

Bis auf Koordinatentransformationen (die ja immer möglich sind) und die Masse des Sterns ist die Schwarzschildlösung dann eindeutig bestimmt. Es existiert also ein spez. Koordinatensystem mit den Eigenschaften 1)–3)

Wir betrachten also zunächst (noch nicht notwendig) den Raum außerhalb des kugelförmigen Sterns und suchen die Lösung der freien Feldgleichungen. Aus 1)+2) folgt, daß das infinitesimale Linienelement $ds^2 = c^2 d\tau^2$ invariant unter den Ersetzungen



$$dt \to -dt, \quad d\theta \to -d\theta, \quad d\phi \to -d\phi$$

sein muß, i.e. die Metrik darf keine Mischterme $d\rho\, d\theta$, $d\theta\, d\phi$, $d\rho\, dt$ etc. enthalten. Weiter dürfen die Komponenten des metrischen Tensors $g_{\mu\nu}$ nur von der Radialkoordinate $\rho$ abhängen. Mit den Koordinaten

$$x^0 = ct, \quad x^1 = \rho, \quad x^2 = \theta, \quad x^3 = \phi$$

lautet das allgemeinste Linienelement, daß 1) und 2) genügt,

$$ds^2 = A(\rho)\, c^2 dt^2 - \left( B(\rho)\, d\rho^2 + C(\rho)\rho^2 d\theta^2 + D(\rho)\, \rho^2 \sin^2\theta\, d\phi^2 \right)$$

Aufgrund der Radialsymmetrie können wir aber auch annehmen, daß $C(\rho) = D(\rho)$, da unter unserer Vorstellung von $\theta$ und $\phi$ das Längenelement $\sqrt{C(\rho)}\, \rho\, d\theta$ entlang dem Meridian gleich sein sollte zu $\sqrt{D(\rho)}\, \rho\, d\phi$ entlang des Äquators für $d\theta = d\phi$.

Also

$$ds^2 = A(\varrho)c^2dt^2 - \left(B(\varrho)d\varrho^2 + C(\varrho)\varrho^2(d\theta^2 + \sin^2\theta\, d\phi^2)\right)$$

enthält unsere Erwartungen an die Symmetrie. Wir können aber noch den "Abstand" $\varrho$ umskalieren, so daß das Linienelement entlang einer Kugelfläche die gewohnte Form annimmt:

$$C(\varrho)\varrho^2 \equiv r^2 \quad \rightarrow r(\varrho) \text{ als } \underline{\text{neue}} \text{ globale Koordinate}$$

$$\Rightarrow \quad 2r\,dr = (C'(\varrho)\varrho^2 + 2C(\varrho)\varrho)d\varrho \quad \Rightarrow dr^2 = \frac{\left(\frac{1}{2}C'(\varrho)\varrho + C(\varrho)\right)^2}{C(\varrho)}d\varrho^2$$

Hier setzen wir voraus, daß $r$ eine neue, globale radiale Variable verkörpert, die dem Abstand entsprechen soll. Für das Linienelement finden wir

$$ds^2 = \tilde{A}(r)c^2dt^2 - \left(\tilde{B}(r)dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta\, d\phi^2)\right),$$

wobei

$$\tilde{A}(r) = A(\varrho(r)), \quad \tilde{B}(r) = \frac{B(\varrho(r))\,C(\varrho(r))}{\left(C(\varrho(r)) + \frac{1}{2}C'(\varrho(r))\varrho(r)\right)^2}$$

Die dritte Bedingung besagt schließlich, daß für große Abstände vom Zentrum die Metrik einen flachen Raum beschreiben soll, d.h. wir verlangen

$$\tilde{A}(r) \xrightarrow{r\to\infty} 1, \quad \tilde{B}(r) \xrightarrow{r\to\infty} 1,$$

so daß die Metrik einfach in die Lorentzmetrik (ausgedrückt in Kugelkoordinaten) übergeht. Damit der inverse metr. Tensor $g^{\mu\nu}$ existiert, müssen wir auch verlangen, daß die Funktionen $\tilde{A}(r)$, $\tilde{B}(r)$ nirgends verschwinden. Sowohl $\tilde{A}$ wie $\tilde{B}$ müssen dann aufgrund ihres asymptotischen Verhaltens überall positiv sein. Wir setzen:

$$\tilde{A}(r) = e^{\nu(r)}, \quad \tilde{B}(r) = e^{\lambda(r)}$$

Damit

$$\boxed{ds^2 = e^{\nu(r)}c^2dt^2 - e^{\lambda(r)}dr^2 - r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta\, d\phi^2)}$$

bzw.

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} e^{\nu(r)} & & & \\ & -e^{\lambda(r)} & & \\ & & -r^2 & \\ & & & -r^2\sin^2\theta \end{pmatrix}; \quad g^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} e^{-\nu(r)} & & & \\ & -e^{-\lambda(r)} & & \\ & & -\frac{1}{r^2} & \\ & & & -\frac{1}{r^2\sin^2\theta} \end{pmatrix}, \quad \nu(r), \lambda(r) \xrightarrow{r\to\infty} 0$$

Um die Funktionen $\nu(r)$, $\lambda(r)$ zu bestimmen, müssen wir mittels dieses Ansatzes für die Metrik den Ricci-Tensor $R_{\mu\nu}$ (oder $G_{\mu\nu}$) durch die unbekannten Funktionen $\nu$ und $\lambda$ ausdrücken und in den Einstein-Gleichungen einsetzen.

Werten wir hierzu zunächst die Christoffel-Symbole

$$\left\{ {\sigma \atop \lambda\mu} \right\} = \Gamma^{\sigma}_{\lambda\mu} = \frac{1}{2} g^{\sigma\nu}\left[\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^{\lambda}} + \frac{\partial g_{\lambda\nu}}{\partial x^{\mu}} - \frac{\partial g_{\mu\lambda}}{\partial x^{\nu}}\right]$$

explizit aus:

Index $\nu=0$ — stationäre Metrik

(a) $\underline{\sigma=0}$:

$$\Gamma^{0}_{\lambda\mu} = \frac{1}{2} e^{-\nu(r)}\left[\frac{\partial g_{\mu 0}}{\partial x^{\lambda}} + \frac{\partial g_{\lambda 0}}{\partial x^{\mu}} - \frac{\partial g_{\mu\lambda}}{\partial x^{0}}\right]$$

$$= \frac{1}{2} e^{-\nu(r)}\left[\delta_{\mu 0}\delta_{\lambda 1}\nu'(r)e^{\nu(r)} + \delta_{\lambda 0}\delta_{\mu 1}\nu'(r)e^{\nu(r)} - 0\right] = \frac{1}{2}\nu'(r)\left[\delta_{\mu 0}\delta_{\lambda 1} + \delta_{\mu 1}\delta_{\lambda 0}\right]$$

d.h. $\Gamma^{0}_{01} = \Gamma^{0}_{10} = \frac{\nu'(r)}{2}$, sonst $\Gamma^{0}_{\lambda\mu} \equiv 0$

Symmetrie explizit realisiert

Index $\nu=1$

(b) $\underline{\sigma=1}$:

$$\Gamma^{1}_{\lambda\mu} = -\frac{1}{2} e^{-\lambda(r)}\left[\frac{\partial g_{\mu 1}}{\partial x^{\lambda}} + \frac{\partial g_{\lambda 1}}{\partial x^{\mu}} - \frac{\partial g_{\mu\lambda}}{\partial r}\right]$$

$$= -\frac{1}{2} e^{-\lambda(r)}\left[2\delta_{\mu 1}\delta_{\lambda 1}\left(-\lambda'(r)e^{\lambda(r)}\right) - \delta_{\mu\lambda}\left(\delta_{\mu 0}\nu'(r)e^{\nu(r)} - \delta_{\mu 1}\lambda'(r)e^{\lambda(r)} - 2r\delta_{\mu 2} - 2r\sin^2\theta\,\delta_{\mu 3}\right)\right]$$

$$= \delta_{\mu\lambda}\left[\frac{1}{2}\lambda'(r)\delta_{\mu 1} - r e^{-\lambda(r)}\left(\delta_{\mu 2} + \sin^2\theta\,\delta_{\mu 3}\right) + \frac{1}{2}\nu'(r)e^{\nu-\lambda}\delta_{\mu 0}\right]$$

d.h. $\Gamma^{1}_{11} = \frac{\lambda'(r)}{2}$; $\Gamma^{1}_{22} = -r e^{-\lambda(r)}$; $\Gamma^{1}_{00} = \frac{\nu'(r)}{2}e^{\nu-\lambda}$; $\Gamma^{1}_{33} = -r\sin^2\theta\, e^{-\lambda(r)}$; $\Gamma^{1}_{\lambda\mu} = 0$ für $\lambda \neq \mu$

(c) $\underline{\sigma=2}$:

$$\Gamma^{2}_{\lambda\mu} = -\frac{1}{2r^2}\left[\frac{\partial g_{\mu 2}}{\partial x^{\lambda}} + \frac{\partial g_{\lambda 2}}{\partial x^{\mu}} - \frac{\partial g_{\lambda\mu}}{\partial \theta}\right]$$

$$= -\frac{1}{2r^2}\left[\delta_{\mu 2}\delta_{\lambda 1}(-2r) + \delta_{\lambda 2}\delta_{\mu 1}(-2r) - \delta_{\lambda 3}\delta_{\mu 3}\left(-2r^2\sin\theta\cos\theta\right)\right]$$

$$= \frac{1}{r}\left(\delta_{\mu 2}\delta_{\lambda 1} + \delta_{\lambda 2}\delta_{\mu 1}\right) - \delta_{\lambda 3}\delta_{\mu 3}\sin\theta\cos\theta$$

d.h. $\Gamma^{2}_{12} = \Gamma^{2}_{21} = \frac{1}{r}$, $\Gamma^{2}_{33} = -\sin\theta\cos\theta$, $\Gamma^{2}_{\lambda\mu} = 0$ sonst.

(d) $\underline{\sigma=3}$:

$$\Gamma^{3}_{\lambda\mu} = -\frac{1}{2r^2\sin^2\theta}\left[\frac{\partial g_{\mu 3}}{\partial x^{\lambda}} + \frac{\partial g_{\lambda 3}}{\partial x^{\mu}} - \frac{\partial g_{\lambda\mu}}{\partial \phi}\right]$$

$$= -\frac{1}{2r^2\sin^2\theta}\left[\delta_{\mu 3}\left(-2r\sin^2\theta\,\delta_{\lambda 1} - 2r^2\sin\theta\cos\theta\,\delta_{\lambda 2}\right) + \delta_{\lambda 3}\left(-2r\sin^2\theta\,\delta_{\mu 1} - 2r\sin\theta\cos\theta\,\delta_{\mu 2}\right) - 0\right]$$

$$= \frac{1}{r}\left(\delta_{\mu 3}\delta_{\lambda 1} + \delta_{\lambda 3}\delta_{\mu 1}\right) + \cot\theta\left(\delta_{\mu 3}\delta_{\lambda 2} + \delta_{\lambda 3}\delta_{\mu 2}\right)$$

d.h. $\Gamma^{3}_{13} = \Gamma^{3}_{31} = \frac{1}{r}$; $\Gamma^{3}_{23} = \Gamma^{3}_{32} = \cot\theta$, sonst $\Gamma^{3}_{\lambda\mu} \equiv 0$.

Als nächstes wollen wir nun den Ricci-Tensor (vgl. S. 7)

$$R_{\mu\nu} \equiv \frac{\partial \Gamma^{\alpha}_{\alpha\mu}}{\partial x^{\nu}} - \frac{\partial \Gamma^{\alpha}_{\nu\mu}}{\partial x^{\alpha}} + \Gamma^{\alpha}_{\nu\beta}\Gamma^{\beta}_{\alpha\mu} - \Gamma^{\alpha}_{\alpha\beta}\Gamma^{\beta}_{\nu\mu} =$$

$\Gamma^{\mu}_{\mu\nu} = \frac{\partial}{\partial x^{\nu}} \ln\sqrt{|g|}$ ← vgl. Diskussion der Divergenz

$$= \frac{\partial^2}{\partial x^{\nu}\partial x^{\mu}} \ln\sqrt{|g|} - \frac{\partial \Gamma^{\alpha}_{\nu\mu}}{\partial x^{\alpha}} + \Gamma^{\alpha}_{\nu\beta}\Gamma^{\beta}_{\alpha\mu} - \Gamma^{\beta}_{\nu\mu}\frac{\partial}{\partial x^{\beta}} \ln\sqrt{|g|}$$

Zunächst bemerken wir, daß die metrische Determinante lautet

$$|g| = e^{\nu+\lambda} r^4 \sin^2\theta \Rightarrow \frac{\partial}{\partial x^{\mu}} \ln\sqrt{|g|} = \delta_{\mu 1}\left(\frac{\nu'+\lambda'}{2} + \frac{2}{r}\right) + \delta_{\mu 2} \cot\theta$$

Nun heißt es Buchhalten:

(a) $\underline{\mu=\nu=0}$:

$$R_{00} = \frac{\partial^2}{\partial (x^0)^2} \ln\sqrt{|g|} - \frac{\partial \Gamma^{\alpha}_{00}}{\partial x^{\alpha}} + \Gamma^{\alpha}_{0\beta}\Gamma^{\beta}_{\alpha 0} - \Gamma^{\beta}_{00}\frac{\partial}{\partial x^{\beta}} \ln\sqrt{|g|}$$

$$= -\frac{\partial \Gamma^1_{00}}{\partial r} + \left(\Gamma^0_{01}\Gamma^1_{00} + \Gamma^1_{00}\Gamma^0_{10}\right) - \Gamma^1_{00}\frac{\partial}{\partial r}\ln\sqrt{|g|}$$

$$= -\frac{1}{2}\left(\nu'' + \nu'(\nu'-\lambda')\right)e^{\nu-\lambda} + \frac{\nu'^2}{2}e^{\nu-\lambda} - \left(\frac{\nu'+\lambda'}{2} + \frac{2}{r}\right)\frac{\nu'}{2}e^{\nu-\lambda} =$$

$$\underline{= -\frac{1}{2}\left(\nu'' + \frac{\nu'^2}{2} - \frac{\nu'\lambda'}{2} + \frac{2\nu'}{r}\right)e^{\nu-\lambda}}$$

(b) $\underline{\mu=0, \nu=1}$:

$$R_{01} = \underbrace{\frac{\partial^2}{\partial x^0\partial x^1} \ln\sqrt{|g|}}_{=0} - \underbrace{\frac{\partial \Gamma^{\alpha}_{10}}{\partial x^{\alpha}}}_{=0} + \Gamma^{\alpha}_{1\beta}\Gamma^{\beta}_{\alpha 0} - \underbrace{\Gamma^{\beta}_{10}\frac{\partial}{\partial x^{\beta}} \ln\sqrt{|g|}}_{\Rightarrow \beta=0 \;\Rightarrow 0} = \Gamma^{\alpha}_{1\beta}\underbrace{\Gamma^{\beta}_{\alpha 0}}_{} \equiv 0$$

$\Gamma^0_{10}$ verbleibt $\neq 0 \Rightarrow \beta=0, \alpha=1 \Rightarrow \Gamma^1_{10}=$

(c) $\underline{\mu=0, \nu=2}$: $R_{02} = \frac{\partial^2}{\partial x^0\partial x^2} \ln\sqrt{|g|} - \frac{\partial \Gamma^{\alpha}_{20}}{\partial x^{\alpha}} + \Gamma^{\alpha}_{2\beta}\Gamma^{\beta}_{\alpha 0} - \Gamma^{\beta}_{20}\frac{\partial}{\partial x^{\beta}} \ln\sqrt{|g|} = \Gamma^{\alpha}_{2\beta}\Gamma^{\beta}_{\alpha 0} \equiv 0$

(d) $\underline{\mu=0, \nu=3}$: $R_{03} = \frac{\partial^2}{\partial x^0\partial x^3} \ln\sqrt{|g|} - \frac{\partial \Gamma^{\alpha}_{30}}{\partial x^{\alpha}} + \Gamma^{\alpha}_{3\beta}\Gamma^{\beta}_{\alpha 0} - \Gamma^{\beta}_{30}\frac{\partial}{\partial x^{\beta}} \ln\sqrt{|g|} = \Gamma^{\alpha}_{3\beta}\Gamma^{\beta}_{\alpha 0} \equiv 0$

aufgrund Symmetrie $R_{\mu\nu} = R_{\nu\mu}$ folgt dann auch

$$\underline{R_{10} = R_{20} = R_{30} = 0}$$

(e) $\underline{\mu=\nu=1}$:

$$R_{11} = \frac{\partial^2}{\partial r^2} \ln\sqrt{|g|} - \frac{\partial \Gamma^{\alpha}_{11}}{\partial x^{\alpha}} + \Gamma^{\alpha}_{1\beta}\Gamma^{\beta}_{\alpha 1} - \Gamma^{\beta}_{11}\frac{\partial}{\partial x^{\beta}} \ln\sqrt{|g|} =$$

$$= \left(\frac{\nu''+\lambda''}{2} - \frac{2}{r^2}\right) - \frac{\partial \Gamma^1_{11}}{\partial r} + \left(\Gamma^0_{10}\Gamma^0_{01} + \Gamma^1_{11}\Gamma^1_{11} + \Gamma^2_{12}\Gamma^2_{21} + \Gamma^3_{13}\Gamma^3_{31}\right) - \Gamma^1_{11}\frac{\partial}{\partial r}\ln\sqrt{|g|}$$

$$= \frac{\nu''+\lambda''}{2} - \frac{2}{r^2} - \frac{\lambda''}{2} + \frac{\nu'^2}{4} + \frac{\lambda'^2}{4} + \frac{2}{r^2} - \frac{\lambda'}{2}\left(\frac{\nu'+\lambda'}{2} + \frac{2}{r}\right) = \underline{\frac{1}{2}\left(\nu'' + \frac{\nu'^2}{2} - \frac{\nu'\lambda'}{2} - \frac{2\lambda'}{r}\right)}$$

(f) $\underline{\mu=1, \nu=2}$:

$$R_{12} = \frac{\partial^2}{\partial r\partial\theta} \ln\sqrt{|g|} - \frac{\partial \Gamma^{\alpha}_{21}}{\partial x^{\alpha}} + \Gamma^{\alpha}_{2\beta}\Gamma^{\beta}_{\alpha 1} - \Gamma^{\beta}_{21}\frac{\partial}{\partial x^{\beta}} \ln\sqrt{|g|} =$$

$$= \underbrace{\frac{\partial \Gamma^2_{21}}{\partial \theta}}_{=0} + \left(\Gamma^1_{22}\underbrace{\Gamma^2_{11}}_{=0} + \Gamma^2_{21}\underbrace{\Gamma^1_{21}}_{=0} + \Gamma^3_{23}\Gamma^3_{31}\right) - \Gamma^2_{21}\cot\theta = \cot\theta\cdot\frac{1}{r} - \frac{1}{r}\cot\theta = \underline{0}$$

(g) $\underline{\mu=1,\nu=3:}$ $R_{13} = \frac{\partial^2}{\partial r\partial\phi}\ln\sqrt{|g|} - \frac{\partial\Gamma^{\alpha}_{31}}{\partial x^\alpha} + \Gamma^{\alpha}_{3\beta}\Gamma^{\beta}_{\alpha 1} - \Gamma^{\beta}_{31}\underbrace{\frac{\partial}{\partial x^\beta}\ln\sqrt{|g|}}_{\to 0}$

$$= -\underbrace{\frac{\partial\Gamma^3_{31}}{\partial\phi}}_{=0} + \left(\Gamma^2_{33}\underbrace{\Gamma^3_{21}}_{=0} + \Gamma^3_{31}\underbrace{\Gamma^1_{31}}_{=0} + \Gamma^3_{32}\underbrace{\Gamma^2_{31}}_{=0}\right) = \underline{0}$$

und wieder folglich $\underline{R_{21} = R_{31} = 0}$

(h) $\underline{\mu=2,\nu=2:}$ $R_{22} = \frac{\partial^2}{\partial\theta^2}\ln\sqrt{|g|} - \frac{\partial\Gamma^{\alpha}_{22}}{\partial x^\alpha} + \Gamma^{\alpha}_{2\beta}\Gamma^{\beta}_{\alpha 2} - \Gamma^{\beta}_{22}\frac{\partial}{\partial x^\beta}\ln\sqrt{|g|} =$

$$= \frac{\partial\cot\theta}{\partial\theta} - \frac{\partial\Gamma^1_{22}}{\partial r} + \left(\Gamma^1_{22}\Gamma^2_{12} + \Gamma^3_{23}\Gamma^3_{32} + \Gamma^2_{21}\Gamma^1_{22}\right) - \Gamma^1_{22}\frac{\partial}{\partial r}\ln\sqrt{|g|}$$

$$= -\frac{1}{\sin^2\theta} + e^{-\lambda} - \lambda' r e^{-\lambda} - 2e^{-\lambda} + \cot^2\theta + re^{-\lambda}\left(\frac{\nu'+\lambda'}{2} + \frac{2}{r}\right)$$

$$= \underline{-1 + e^{-\lambda}\left(1 - \frac{\lambda'}{2}r + \frac{\nu'}{2}r\right)}$$

(i) $\underline{\mu=2,\nu=3:}$ $R_{23} = \underbrace{\frac{\partial^2}{\partial\theta\partial\phi}\ln\sqrt{|g|}}_{=0} - \underbrace{\frac{\partial\Gamma^{\alpha}_{32}}{\partial x^\alpha}}_{=0}^{\alpha=3} + \Gamma^{\alpha}_{3\beta}\Gamma^{\beta}_{\alpha 2} - \Gamma^{\beta}_{32}\overbrace{\frac{\partial}{\partial x^\beta}\ln\sqrt{|g|}}^{\to\beta=\nu=0}$

$$= \Gamma^2_{33}\underbrace{\Gamma^3_{22}}_{=0} + \Gamma^3_{31}\underbrace{\Gamma^1_{32}}_{=0} + \Gamma^3_{32}\underbrace{\Gamma^2_{32}}_{=0} = \underline{0}$$

$\Rightarrow$ $\underline{R_{32}} = \cancel{R_{23} = 0}$

(j) $\underline{\mu=\nu=3:}$ $R_{33} = \frac{\partial^2}{\partial\phi^2}\ln\sqrt{|g|} - \frac{\partial\Gamma^{\alpha}_{33}}{\partial x^\alpha} + \Gamma^{\alpha}_{3\beta}\Gamma^{\beta}_{\alpha 3} - \Gamma^{\beta}_{33}\frac{\partial}{\partial x^\beta}\ln\sqrt{|g|}$

$$= -\frac{\partial\Gamma^1_{33}}{\partial r} - \frac{\partial\Gamma^2_{33}}{\partial\theta} + \left(\Gamma^2_{33}\Gamma^3_{23} + 2\Gamma^3_{31}\Gamma^1_{33} + \Gamma^3_{32}\Gamma^2_{33}\right) - \Gamma^2_{33}\frac{\partial}{\partial\theta}\ln\sqrt{|g|} - \Gamma^1_{33}\frac{\partial}{\partial r}\ln\sqrt{|g|}$$

$$= (1-\lambda' r)e^{-\lambda}\sin^2\theta + \cos^2\theta - \sin^2\theta - 2\cos^2\theta - 2\sin^2\theta e^{-\lambda} + \cos^2\theta + re^{-\lambda}\sin^2\theta\left(\frac{\nu'+\lambda'}{2} + \frac{2}{r}\right)$$

$$= \sin^2\theta\left[-1 + e^{-\lambda}\left(1 - \frac{\lambda' r}{2} + \frac{\nu' r}{2}\right)\right] \hat{=} \underline{\sin^2\theta\, R_{22}}$$

- Wir haben also explizit (und mühevoll) gefunden, daß alle <u>Nichtdiagonalelemente</u> des Ricci-Tensors $R_{\mu\nu}$ verschwinden. Es gilt zusammenfassend:

$$R_{00} = -\frac{1}{2}e^{\nu-\lambda}\left(\nu'' + \frac{\nu'^2}{2} - \frac{\nu'\lambda'}{2} + \frac{2\nu'}{r}\right)$$

$$R_{11} = \frac{1}{2}\left(\nu'' + \frac{\nu'^2}{2} - \frac{\nu'\lambda'}{2} - \frac{2\lambda'}{r}\right) \quad ; \quad R_{\mu\nu} = 0 \text{ für } \mu\neq\nu$$

$$R_{22} = e^{-\lambda}\left(1 + \frac{\nu'-\lambda'}{2}r\right) - 1$$

$$R_{33} = \sin^2\theta\, R_{22}$$

Last, but not least, berechnen wir den divergenzfreien Ricci-Tensor $G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g_{\mu\nu}$. (14)

Da $R_{\mu\nu}$ und $g_{\mu\nu}$ diagonal sind, ist dies auch $G_{\mu\nu}$, d.h. es ist

$$G_{\mu\nu} = 0 \quad \text{für } \mu \neq \nu .$$

Der Krümmungsskalar $R$ berechnet sich dann zu

$$R = g^{\mu\nu} R_{\mu\nu} = e^{-\nu} R_{00} - e^{-\lambda} R_{11} \underbrace{- \frac{1}{r^2} R_{22} - \frac{1}{r^2 \sin^2\theta} R_{33}}_{-\frac{2}{r^2} R_{22}}$$

$$= -\frac{1}{2} e^{-\lambda} \left( 2\nu'' + \nu'^2 - \nu'\lambda' + \frac{2}{r}(\nu' - \lambda') \right) - \frac{2}{r^2} e^{-\lambda} \left( 1 + \frac{r}{2}(\nu' - \lambda') \right) + \frac{2}{r^2}$$

$$= -e^{-\lambda} \left( \nu'' + \nu'^2 - \nu'\lambda' + 2\frac{(\nu' - \lambda')}{r} - \frac{2}{r^2} \right) + \frac{2}{r^2}$$

Damit erhalten wir nacheinander

$$\boxed{\begin{aligned}
G_{00} &= R_{00} - \frac{1}{2} R e^{\nu} = e^{\nu - \lambda} \left( -\frac{\lambda'}{r} + \frac{1}{r^2} \right) - \frac{e^{\nu}}{r^2} \\
G_{11} &= R_{11} + \frac{1}{2} R e^{\lambda} = -\frac{\nu'}{r} - \frac{1}{r^2} + \frac{e^{\lambda}}{r^2} \\
G_{22} &= R_{22} + \frac{1}{2} R r^2 = -\frac{1}{2} r^2 e^{-\lambda} \left( \nu'' + \frac{\nu'^2}{2} - \frac{\nu'\lambda'}{2} + \frac{\nu' - \lambda'}{r} \right) \\
G_{33} &= R_{33} + \frac{1}{2} R r^2 \sin^2\theta = \sin^2\theta \, G_{22}
\end{aligned}}$$

# Die Schwarzschild-Lösung



- $G_{\mu\nu} = -\frac{8\pi G}{c^4} T_{\mu\nu}$

- Wir beschränken uns hier auf den Außenraum, i.e. materiefreien Raum $T_{\mu\nu} \equiv 0$
  (später werden wir auch ein einfaches Sternmodell betrachten)

$\Rightarrow G_{\mu\nu} = 0 \quad (\Leftrightarrow R_{\mu\nu} = 0$, dies ist aber in diesem Fall etwas mühsamer (?))

$$\Rightarrow \quad -\frac{\lambda'}{r} + \frac{1}{r^2} - \frac{e^\lambda}{r^2} = 0 \qquad (1)$$

$$-\frac{\nu'}{r} - \frac{1}{r^2} + \frac{e^\lambda}{r^2} = 0 \qquad (2)$$

; da $e^\nu, e^\lambda > 0$ und damit $\neq 0$.

$$\nu'' + \frac{\nu'^2}{2} - \frac{\nu'\lambda'}{2} + \frac{\nu'-\lambda'}{r} = 0 \qquad (3)$$

Die wichtige Frage ist nun, ob es überhaupt Funktionen $\nu(r)$, $\lambda(r)$ gibt, die die Gleichungen (1, 2, 3) gleichzeitig erfüllen, da wir ja drei Bestimmungsgleichungen haben und das Differentialgleichungssystem eigentlich überbestimmt ist. Aber (3) folgt aus (1) und (2):

$$\frac{d}{dr}(r(2)) \overset{(2)}{\Rightarrow} 0 = \left(-\nu' - \frac{1}{r} + \frac{e^\lambda}{r}\right)' = \left(-\nu'' + \frac{1}{r^2} + \lambda'\frac{e^\lambda}{r} - \frac{1}{r^2}e^\lambda\right) \qquad (2')$$

Wenn (1), (2), (2') erfüllt ist, folgt für (3)

$$\nu'' + \frac{\nu'^2}{2} - \frac{\nu'\lambda'}{2} + \frac{1}{r}(\nu' - \lambda') \overset{(2')}{=} \left(\frac{1}{r^2} + \lambda'\frac{e^\lambda}{r} - \frac{1}{r^2}e^\lambda + \frac{\nu'^2}{2} - \frac{\nu'\lambda'}{2} + \frac{1}{r}(\nu'-\lambda')\right)$$

$$\overset{\lambda',\nu'}{\underset{(1)(2)}{=}} \left(\frac{1}{r^2} + e^\lambda\left(\cancel{\frac{1}{r^2}} - \frac{e^\lambda}{r^2}\right) - \cancel{\frac{1}{r^2}e^\lambda} + \frac{1}{2}\left(\frac{e^\lambda}{r} - \frac{1}{r}\right)^2 - \frac{1}{2}\left(\frac{e^\lambda}{r} - \frac{1}{r}\right)\left(\frac{1}{r} - \frac{e^\lambda}{r}\right) + \left(\frac{e^\lambda}{r^2} - \frac{1}{r^2} - \frac{1}{r^2} + \frac{e^\lambda}{r^2}\right)\right)$$

$$= \left(\frac{1}{r^2} - \cancel{\frac{e^{2\lambda}}{r^2}} + \frac{1}{2}\left(\cancel{\frac{e^{2\lambda}}{r^2}} - \cancel{\frac{2e^\lambda}{r^2}} + \frac{1}{r^2}\right) + \frac{1}{2}\left(\cancel{\frac{e^{2\lambda}}{r^2}} - \cancel{\frac{2e^\lambda}{r^2}} + \frac{1}{r^2}\right) + \cancel{\frac{2e^\lambda}{r^2}} - \frac{2}{r^2}\right)$$

$$= \left(\frac{1}{r^2} + \frac{1}{r^2} - \frac{2}{r^2}\right) = 0$$

; i.e. identisch erfüllt.

Damit haben wir gezeigt, daß für den Aussenraum (3) direkt aus (2) und (1) folgt und damit das Diffglgsystem nicht trivial überbestimmt ist. Wäre hier nicht 0 herausgekommen, dann könnten wir keine Lösung finden und die Einsteingleichungen würden dann keinen Sinn machen.

Anmerkung (für später): Im nicht materiefreien Raum, etwa bei stat., wie auch dynam., aber radialsym. Sternmodelle, sollte es dann auch entsprechende Beziehung zwischen den $T_{\mu\nu}$ geben, damit das System nicht ohne weiteres überbestimmt ist... Etwa sollte im hydrostat. Gleichgewicht $T_{33} = T_{22}\sin^2\theta$ - in Kugelkoordinaten - gelten und, da auch hier nur nach $r$ und $t$ gefragt ist, sollte sich die entsprechende Gleichung (3) mit $T_{33}$ auf der rechten Seite aus den anderen entsprechenden Gleichungen (1) und (2) ableiten lassen. Aber $\rho(r)$ ist ja erstm. variabel...

Wir können uns somit nun bedenkenlos auf (1) und (2) konzentrieren, da dann (3) automatisch erfüllt ist. Aus (1) und (2) folgt sofort

$$\frac{\lambda' + \nu'}{r} = 0 \Rightarrow \lambda' + \nu' = 0 \Rightarrow \lambda(r) + \nu(r) = \text{const}(r)$$

Aufgrund der zu fordernden Asymptotik für $r \to \infty$, i.e. $\lambda(\infty) = \nu(\infty) = 0$ müssen wir die Konstante gleich 0 setzen, i.e.

$$\boxed{\lambda(r) = -\nu(r)}$$

Unabhängig davon folgt direkt aus (1)

$$\overset{(1)}{\Rightarrow} \quad (-\lambda' r + 1)e^{-\lambda} - 1 = \frac{d}{dr}\left(r e^{-\lambda}\right) - 1 = 0$$

$$\Rightarrow \quad r e^{-\lambda} - r = \text{const} = -r_s$$

und damit

$$\boxed{e^{-\lambda(r)} = e^{\nu(r)} = 1 - \frac{r_s}{r}}$$

Das Einführen von $\nu$ und $\lambda$ hat ursprünglich das Rechnen sehr vereinfacht. Wie bekäme ich das direkt mit A und B.

Im Prinzip, da $\nu, \lambda$ als reell angenommen, darf $r$ nicht kleiner gleich $r_s$ sein! Aber $1 - \frac{r_s}{r}$ löst trotzdem die Einsteingleichung für $r < r_s$. Man hätte dann A und B nicht durch $e^{\nu}, e^{\lambda}$, sondern direkt ansetzen sollen.

Damit ist (1), (2) und (3) gelöst? - Man mache sich das klar! -

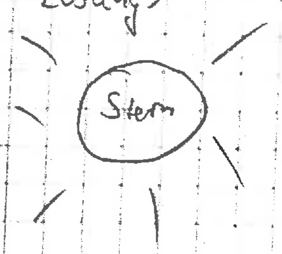
Schließlich

$$ds^2 = \left(1 - \frac{r_s}{r}\right)c^2 dt^2 - \frac{dr^2}{1 - \frac{r_s}{r}} - r^2\left(d\theta^2 + \sin^2\theta\, d\phi^2\right)$$

erfüllt die asymptotische Bedingung eines flachen Raums für $r \to \infty$.

Die Lösung wird als Schwarzschild-Lösung bezeichnet.

Schwarzschild-Lösung




Sie ist nur im materiefreien Raum außerhalb eines kugelförmigen Sterns gültig; im Innern des Sterns hat die Metrik $g_{\mu\nu}$ (ähnlich wie das klassische Newton-Potential) eine andere Form, die von der (radialen) Materieverteilung abhängt. Wir werden diese später untersuchen.

Wir wollen nun noch zwei Einzelheiten besprechen, und zwar die physikalische Bedeutung der Integrationskonstanten $r_s$ sowie den daraus resultierenden zulässigen Bereich der Radialkoordinate. Zunächst sehen wir unmittelbar ein, daß beide metr. Koeffizienten $e^{\nu}$ und $e^{\lambda}$ nur solange positiv sind, wie $r$ größer als $r_s$, mit anderen Worten: Die Schwarzschild-Lösung verliert für $r < r_s$ ihre Gültigkeit. Wir helfen uns einfach damit, daß wir fordern, daß der Radius $R_0$ des Zentralsterns größer als $r_s$, der sog. Schwarzschildradius sein muß:

$$R_0 > r_s .$$

Für $r < R_0$ haben die Funktionen $\nu(r)$ und $\lambda(r)$ dann ein anderes Aussehen, so daß die Schwierigkeit zunächst beseitigt ist. (Problem: punktartige Teilchen darf es nicht geben, d.h. Selbstwechselwirkung wird unendlich groß ... → schwarze Löcher)

Die physikalische Bedeutung der Konstante $r_s$ ergibt sich durch einen Vergleich für große Radien $r$, wo $|g_{00}(r) - 1| \ll 1$ und der Newtonsche Limes gilt. (Bedenken wir, wir haben noch nichts über die Masse des Zentralkörpers gesagt. Diese steckt ja nur „zunächst" in den lokalen Gleichungen für den Innenraum. Erst eine Stetigkeitsforderung bei $r = R_0$ bestimmt dann die Wahl von $r_s$ „mikroskopisch".)

$$\Phi_{Grav}(r) = -\frac{GM}{r} \approx \frac{c^2}{2}\left(g_{00}(r) - 1\right) \hat{=} \frac{c^2}{2}\left(e^{\nu(r)} - 1\right) = -\frac{c^2 r_s}{2r}$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{r_s = \frac{2GM}{c^2} \equiv 2m}$$

Durch Vergleich haben wir also die physikalische Bedeutung des Schwarzschildradius deduziert.

Für einen Stern von der Masse der Sonne ($M \approx 2\cdot 10^{30}$ kg)
beträgt der Schwarzschildradius

$$r_S(\text{Sonne}) \approx 3\,\text{km}$$

und läge damit weit im Innern der Sonne, deren Radius ja etwa $7\cdot 10^5$ km beträgt.
Die Schwarzschildlösung ist also sicherlich für $r > R_{Sonne}$ erfüllt. In der Tat kann die Gravitation der Sonne noch als sehr "schwach" erachtet werden.
Betrachten wir folgende Tabelle:

| Objekt | M (kg) | $r_S$ (km) | | $R_0$ (km) |
|---|---|---|---|---|
| Atomkern | $10^{-26}$ | $10^{-56}$ | | $10^{-18}$ |
| Urkilogramm | 1 | $10^{-30}$ | | $10^{-4}$ |
| Erde | $6\cdot 10^{24}$ | $9\cdot 10^{-6}$ | | $6\cdot 10^{3}$ |
| Sonne | $2\cdot 10^{30}$ | 3 | | $7\cdot 10^{5}$ |
| weißer Zwerg | $10^{30}$ | 1.5 | | $10^{4}$ |
| Neutronenstern | $2\cdot 10^{30}$ | 3 | $\overset{?}{\Leftrightarrow}$ | 10 |
| Galaxis | $10^{41}$ | $10^{11}$ | | $10^{18}$ |

Nur bei den sehr dichten Neutronensternen kommt der wahre Radius "bedrohlich" nahe an den Schwarzschildradius heran.
Diese muß dann auch allgemeinrelativistisch behandelt werden (Tolman-Oppenheimer-Volkov-Gleichung, Gravitationskollaps etc.).
Alle anderen hier aufgeführten Systeme, auch im Besonderen eine Galaxie, können hinreichend gut durch die Newtonsche Physik beschrieben werden!

## einige zusätzliche Anmerkungen:

1.) Man kann nun, ausgehend von der expliziten Schwarzschildlösung, den Krümmungstensor $R_{\mu\nu\alpha\beta}$ explizit berechnen, und stellt fest, daß er in der Tat nicht verschwindet, also in der Tat folgt aus $R_{\mu\nu}=0$ im Außenraum nicht notwendigerweise, daß $R_{\mu\nu\alpha\beta}=0$, i.e. der Raum ist nicht flach.
Man findet (vgl. Sexl/Urbantke – Gravitation und Kosmologie, S. 257, Kap. 8):

$$R_{0101} = \frac{2m}{r^3} = -R_{2323} \; ; \; R_{1212} = \frac{m}{r^3} = -R_{0202} \; ; \; m = \frac{GM}{c^2}$$

(und alle anderen nicht verschwindenden Komponenten durch die entsprechenden Symmetriebeziehungen).
Gemäß unseren Überlegungen zur anschaulichen Interpretation des Krümmungstensors bedeutet der gekrümmte Raum gerade die Existenz von Gezeitenkräften (vgl. geodätische Abweichung):

$$\Delta F^i \equiv m_{P.T.} \frac{d^2}{d\tau^2}(\delta x^i)\Big|_{L.I.S.} \approx m_{P.T.}\, c^2 \sum_{k=1}^{3} R^i{}_{0k0}\, \delta x^k \;\hat{\approx}\; m_{P.T.}\, c^2 R^1{}_{010}\, \delta r$$

$$= \frac{2GM\, m_{P.T.}}{r^3}\, \delta r \;\Rightarrow\; \left|\frac{\partial F_{Grav}}{\partial r}\right| \delta r$$

$\frac{GMm}{r^2}$

2.) Aber: Man kann zeigen, daß das Auftreten der Gezeitenkräfte erst für Dimensionen $n \geq 4$ auftritt.
(Aber $\underline{R}$, der Krümmungsskalar, also die eigentliche Krümmung, ist $=0$ im Aussenraum)
Für $n=3$ – Dimensionen folgt aus $R_{\mu\nu}=0 \overset{n=3}{\Longleftrightarrow} R_{\mu\nu\alpha\beta}=0$.
(vgl. Adler, Kap. 7.6, p. 229)
$R_{\mu\nu\alpha\beta}$ besitzt $c_3=6$ unabhängige Komponenten, genausoviel wie $R_{\mu\nu}$ in 3-Dimensionen, sodaß gemäß $R_{ik}=g^{lm}R_{milk}$ sich diese 6 Komponenten als direkte Lineartransformationen ergeben und daher wenn $R_{ik}=0$, dann hier auch die 6 unabh. Komponenten des $R_{milk}$ alle 0 sein müssen. Wie erwartet findet die AR nur in 4, nicht aber in 3 Dimensionen.

3.) Für $r < r_s$ (?) dreht sich die Bedeutung von $t \leftrightarrow r$ um, da $g_{rr}$ negativ und $g_{00}$ nicht negativ ~~werden~~ → Kruskal Koordinaten, nichtstat. Innenraumlösung, Gravitationskollaps.

# 4.) Isotrope Koordinaten

← isotrope "räumliche" Koordinaten

**Ziel:** $ds^2 \equiv A(\rho)\, dt^2 - B(\rho)\, \underbrace{d\vec{\sigma}^2}_{(d\rho^2+\rho^2(d\theta^2+\sin^2\theta\, d\varphi^2))}$

Dies ist eine andere, für manche Zwecke geeignetere Darstellung des Linienelements, die es alle drei Raumrichtungen gleich behandelt – $B(\cdot)$ steht ja vor dem gesamten räumlichen Linienelement.

Also

$$ds^2 = \left(1-\frac{2m}{r}\right)(c^2dt^2) - \frac{dr^2}{1-\frac{2m}{r}} - r^2(d\theta^2+\sin^2\theta\, d\varphi^2)$$

$$\overset{r(\rho)}{\overset{!}{=}} \left(1-\frac{2m}{r(\rho)}\right)(c^2dt^2) - \lambda^2(\rho)\, d\vec{\sigma}^2$$

$$\Rightarrow \left.\begin{aligned} r^2 &= \lambda^2(\rho)\rho^2 \\ \frac{dr^2}{\left(1-\frac{2m}{r}\right)} &= \lambda^2(\rho)\, d\rho^2 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \pm\frac{dr}{\sqrt{r^2-2mr}} = \frac{d\rho}{\rho} \Rightarrow \pm \ln\left[(r^2-2mr)^{\frac{1}{2}}+(r-m)\right] = \ln\rho + \text{const}$$

Für großes $r\to\infty$ soll $r$ in $\rho$ übergehen, i.e.

$$\pm\ln(2r) = \ln\rho + \text{const} \Rightarrow \boxed{\ln 2r \overset{!}{=} \ln\rho + \ln 2} \text{ im Asymptotischen}$$

für $r<2m$ ist $\rho$ nicht definiert?! – das heisst bloß, daß man von außen nie unterhalb des Schwarzschildradius gelangen kann?! (siehe Rückseite)

$$\Rightarrow \boxed{2\rho = \sqrt{r^2-2mr} + (r-m)} \text{ ist die gesuchte Koordinatentrafo.}$$

$$\Leftrightarrow \boxed{r = \rho\left(1+\frac{2m}{\rho}\right)^2}$$

$$\Rightarrow \lambda = \frac{r}{\rho} = \left(1+\frac{m}{2\rho}\right)^2$$

$$\left(1-\frac{2m}{r}\right) = \frac{(1-m/2\rho)^2}{(1+m/(2\rho))^2}$$

$$\Rightarrow \boxed{ds^2 = \frac{\left(1-\frac{m}{2\rho}\right)^2}{\left(1+\frac{m}{2\rho}\right)^2}c^2dt^2 - \left(1+\frac{m}{2\rho}\right)^4 d\vec{\sigma}^2}$$

nur für "äußeres" $r>r_S$

– isotrope Form der SSL

für $\rho = \frac{m}{2} = r_S$ wird $g_{00}$ in dieser Darstellung 0.

diese Grenze wird von außen nie erreicht (siehe Rückseite)

Aber (!): Es tritt keine Singularität auf.

Die vorherige Darstellung war also irreführend, da Singularität darauf auf spez. Wahl der Koordinaten und nicht auf Geometrie des Raums zurückzuführen ist.

## Die Schwarzschildlösung mit kosmologischem Term

Von unserer Intuition sind wir davon ausgegangen, daß nur reale Materie gravitiert und damit, falls keine Materie vorhanden ist, i.e. $T^{\mu\nu}=0$ über den gesamten Raumbereich, sollte der Raum flach sein. Man könnte aber die EG-Gleichungen auch verallgemeinern zu

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g_{\mu\nu} + \overset{\swarrow \text{Konstante}}{\Lambda} g_{\mu\nu} = -\frac{8\pi G}{c^2} T_{\mu\nu} \Leftrightarrow R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^2} T_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu}$$

$$= \frac{8\pi G}{c^2}\left(T_{\mu\nu} + \frac{\Lambda c^2}{8\pi G} g_{\mu\nu}\right),$$

wobei $\Lambda g_{\mu\nu}$ den sog. kosmologischen Term bedeutet.
Dieser ist in der Tat von gewisser Bedeutung in kosmologischen (Welt-)Bildern, insbesondere bei Konstruktion von <u>stationären</u> Lösungen. Er wurde diesbezüglich zuerst von Einstein eingeführt. Seinen mikroskop. Ursprung motiviert man quantenfeldtheoretisch durch konstante Vakuumenergie des uns allumgebenden Vakuums (Bedenke: Energie kann nicht absolut gemessen werden, sondern nur als Differenz zum Vakuumwert).
(Der Term $\Lambda g^{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^2} T^{\mu\nu}_{\text{Vakuum}}$ motiviert sich aus der Invarianz des Vakuums unter Lorentztransformationen; $\frac{\Lambda c^2}{8\pi G}$ entspricht der Vakuumenergiedichte).
Wir betrachten ihn an dieser Stelle als einen rein phänomenologischen Term, dessen Ursprung nicht weiter diskutiert werden soll. Wir wollen aber nun im Folgenden die Konsequenzen dieses Terms auf die Schwarzschildlösung im Außenraum eines Sterns diskutieren:

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu} = 0$$

Analog zu Seite 15 erhalten wir erneut die drei Gleichungen

$$G_{00} + \Lambda g_{00} = e^{\nu-\lambda}\left(-\frac{\lambda'}{r} + \frac{1}{r^2}\right) - \frac{e^{\nu}}{r^2} + \Lambda e^{\nu} = 0 \qquad (\bar{1})$$

$$G_{11} + \Lambda g_{11} = -\frac{\nu'}{r} - \frac{1}{r^2} + \frac{e^{\lambda}}{r^2} - \Lambda e^{\lambda} = 0 \qquad (\bar{2})$$

$$G_{22} + \Lambda g_{22} = -\frac{1}{2} r^2 e^{-\lambda}\left(\nu'' + \frac{\nu'^2}{2} - \frac{\nu'\lambda'}{2} + \frac{\nu' - \lambda'}{r}\right) - \Lambda r^2 = 0 \qquad (\bar{3})$$

$$G_{33} + \Lambda g_{33} = \left(G_{22} + \Lambda g_{22}\right)\sin^2\theta = 0 \Big),$$

die völlig analog zu (1)(2)(3) auf Seite 15 stehen.

Betrachtung, daß (3) aus (1) und (2) folgt.

$$-\frac{\lambda'}{r} + \frac{1}{r^2} - \frac{e^\lambda}{r^2} + \Lambda e^\lambda = 0 \qquad (\bar{1}')$$

$$-\frac{\nu'}{r} - \frac{1}{r^2} + \frac{e^\lambda}{r^2} - \Lambda e^\lambda = 0 \qquad (\bar{2}')$$

$$\left(\nu'' + \frac{\nu'^2}{2} - \frac{\nu'\lambda'}{2} + \frac{\nu'-\lambda'}{r}\right) + 2\Lambda e^\lambda = 0 \qquad (\bar{3}')$$

$$\frac{d}{dr}\left(r\cdot(\bar{2}')\right) = \left(-\nu'' + \frac{1}{r^2} + \lambda' \frac{e^\lambda}{r} - \frac{1}{r^2}e^\lambda\right) + \left(-\Lambda e^\lambda - \Lambda r \lambda' e^\lambda\right) = 0 \qquad (\cdot\bar{2}')$$

$$\left(\nu'' + \frac{\nu'^2}{2} + \frac{\nu'\lambda'}{2} + \frac{\nu'-\lambda'}{r}\right) + 2\Lambda e^\lambda \overset{(\bar{2}')}{=} \left(\text{alte Klammer}\right) + \left(-\Lambda e^\lambda - \Lambda r \lambda' e^\lambda\right)$$

$\lambda', \nu'$ aus (1,2)

$$= \left(\text{alte Klammer}\right) + \Big(\Lambda e^{2\lambda} + (-2\Lambda)\frac{e^\lambda r}{2}\left(\frac{e^\lambda}{r} - \frac{1}{r}\right) + \frac{1}{2}\Lambda^2 r^2 e^{2\lambda}$$

$$+ \frac{1}{r}\left(\frac{1}{r} - \frac{e^\lambda}{r}\right) r\Lambda e^\lambda + \frac{1}{2}\Lambda^2 r^2 e^{2\lambda} + \frac{r}{r}\left(-2\Lambda e^\lambda\right)\Big)$$

$$+ \left(-\Lambda e^\lambda - \Lambda r \lambda' e^\lambda\right) \qquad + 2\Lambda e^\lambda$$

$$= 0 + \cancel{\Lambda e^{2\lambda}} - \cancel{\Lambda e^{2\lambda}} + \cancel{\Lambda e^\lambda} + \Lambda^2 r^2 e^{2\lambda} + \cancel{\Lambda e^\lambda} - \Lambda e^{2\lambda} - \cancel{2\Lambda e^\lambda}$$

$$+ \left(-\Lambda e^\lambda - \Lambda r \cdot e^\lambda \cdot \left(\frac{1}{r} - \frac{e^\lambda}{r} + \Lambda r e^\lambda\right)\right)$$

$$= \cancel{\Lambda^2 r^2 e^{2\lambda}} - \cancel{\Lambda e^{2\lambda}} \underbrace{- \Lambda e^\lambda - \Lambda e^\lambda}_{-2\Lambda e^\lambda \text{ kürzt sich mit } (3')} + \cancel{\Lambda e^{2\lambda}} - \cancel{\Lambda^2 r^2 e^{2\lambda}}\Big) + 2\Lambda e^\lambda$$

$$\equiv 0$$

Man kann nun eine analoge Gleichung zu (2') aufstellen:

$$\frac{d}{dr}\left(r\cdot(\bar 2)\right) \overset{(\bar 2)}{\Rightarrow} 0 = \left(-\nu'' + \frac{1}{r^2} + \lambda' \frac{e^\lambda}{r} - \frac{1}{r^2} e^\lambda\right) + \left(-\Lambda e^\lambda - \Lambda r \lambda' e^\lambda\right) \qquad (\bar 2')$$

und nach analoger, aber nun etwas längerer Rechnung zeigen, daß aus $(\bar 1)\,(\bar 2)\,(\bar 2')$ auch die Gültigkeit wieder von $(\bar 3)$ erweist, diese also redundant ist. Wir müssen also nur $(\bar 1)$ und $(\bar 2)$ lösen:

$$\left(-\frac{\lambda'}{r} + \frac{1}{r^2}\right) - \frac{e^\lambda}{r^2} + \Lambda e^\lambda = 0 \qquad (4)$$

$$-\frac{\nu'}{r} - \frac{1}{r^2} + \frac{e^\lambda}{r^2} - \Lambda e^\lambda = 0 \qquad (5)$$

Addition beider Gleichungen liefert wieder:

$$\nu' + \lambda' = 0 \quad \Rightarrow \quad \nu(r) + \lambda(r) = \mathrm{const} \equiv \ln k$$

Die Asymptotik $\nu(\infty) = \lambda(\infty) = 0$ können wir nun aber nicht fordern, da wir nicht erwarten können, daß der Raum aufgrund der allgegenwärtigen Vakuumenergiedichte flach bleibt!

$$\lambda(r) = \ln k - \nu(r) \; ; \; e^\lambda = k\cdot e^{-\nu}$$

Multiplizieren wir Gleichung (4) nun mit $e^{-\lambda}$, können wir diese sofort integrieren, denn

$$e^{-\lambda}\left(-\frac{\lambda'}{r} + \frac{1}{r^2}\right) - \frac{1}{r^2} + \Lambda = \frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}\left(r e^{-\lambda}\right) - \frac{1}{r^2} + \Lambda = 0$$

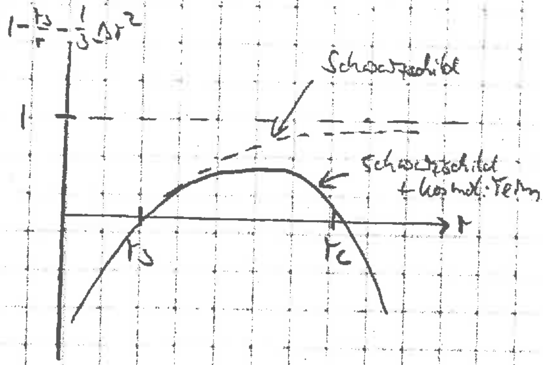
$$\Rightarrow \quad r e^{-\lambda} - r + \frac{1}{3}\Lambda r^3 = \mathrm{const} \equiv -r_s \,,$$

wobei wir erneut die Integrationskonstante in Analogie zu $(r e^{-\lambda} - r) \equiv -r_s$ als Schwarzschild-radius einführen und interpretieren dürfen.

Da die Konstante $k$ nur als Vorfaktor in die metrische Komponente $g_{00} = e^\nu = \underline{k}\cdot e^{-\lambda}$ eingeht, können wir sie durch eine elementare Umdefinition der Zeitkoordinate $t$ in $k^{1/2} t = t'$ ohne weiteres zu 1 machen. Das neue Linienelement lautet somit:

$$\boxed{ds^2 = \left(1 - \frac{r_s}{r} - \frac{1}{3}\Lambda r^2\right) c^2 dt'^2 - \frac{dr^2}{1 - \frac{r_s}{r} - \frac{1}{3}\Lambda r^2} - r^2\left(d\theta^2 + \sin^2\theta \, d\phi^2\right)}$$

Bis auf den Term $-\frac{1}{3}\Lambda r^2$ ist dies genau die Schwarzschildlösung.
Im Unterschied zu dieser gibt es jedoch neben $r \approx r_s$ (falls $\Lambda$ klein) eine zweite Koordinatensingularität, und zwar bei




$$r_c \approx \sqrt{\frac{3}{\Lambda}},$$

wenn wir für große $r$ den Term $\frac{r_s}{r}$ vernachlässigen können.
~~Wenn also $r \gg r_s$ ist.~~
Aus der Tatsache, daß die Schwarzschildmetrik die Planetenbewegung gut beschreibt, können wir schließen, daß $r_c$ sehr viel größer als die Ausdehnung unseres Sonnensystems sein muß,

$$r_c \gg 10^{10}\,\mathrm{km}.$$

Aus der Beobachtung, daß in der Relativbewegung der Galaxien in Galaxienhaufen kein Einfluß des kosmologischen Terms sichtbar ist, erhält man sogar die Abschätzung (Misner, Thorne, Wheeler, Gravitation, S. 411)

$$r_c \gg 10^{23}\,\mathrm{km}.$$

Dies entspricht ungefähr der Ausdehnung des sichtbaren Universums.

## Wiederholung (2): Deduktion der Einstein-Gleichungen

Newtonscher Grenzfall: $\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = -\nabla\phi(\vec{r})$, $\Gamma^i_{00}(\vec{r}) \approx \frac{1}{c^2}\frac{\partial\phi}{\partial x^i}$, $g_{00}(\vec{r}) = 1 + h_{00}(\vec{r}) \approx 1 + \frac{2}{c^2}\phi(\vec{r})$

Massedichte ≙ Energiedichte

$$\Rightarrow \nabla^2 g_{00}(\vec{r}) \approx \frac{8\pi G}{c^2}\rho_0(\vec{r}) \approx \frac{8\pi G}{c^4} T_{00}(\vec{r})$$

Forderung:

(1) rechte Seite $\sim \frac{8\pi G}{c^4} T_{\mu\nu}$, dim $[\text{Länge}]^{(-2)}$

(2) linke Seite muß Tensor 2.-ter Stufe sein, i.e. $G_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4} T_{\mu\nu}$, keine neue Naturkonstante

(3) Newtonscher Grenzfall soll gültig sein

(4) komp. materiefreier Raum ⇒ enthält als Lösung freien, i.e. flachen Raum

(5) Die 2-te Ableitung (mehr können nicht vorkommen aus Dimensionsüberlegung) sollte linear vorkommen, i.e. Feldgleichungen quasi-linear (voll. nicht linear in 1.-te Ableitung)

- Einzig zur Verfügung stehende Tensoren: $R_{\mu\nu}$, $R$, $g_{\mu\nu}$ ← dimensionslos
- $G_{\mu\nu} = G_{\nu\mu}$ da dies für $T_{\mu\nu}$ gilt
- $T^{\mu\nu}{}_{;\nu} = 0$, i.e. Erhaltung von Energie/Impuls $\Rightarrow G^{\mu\nu}{}_{;\nu} = 0$
- Ansatz: $G_{\mu\nu} = a R_{\mu\nu} \pm b \cdot R \cdot g_{\mu\nu}$ $\xrightarrow{\text{mit}}$ $G^{\mu\nu}{}_{;\nu} = 0$ und Bianchi-Identität

sym. Ricci-Tensor

$$\boxed{G_{\mu\nu} = a\left(R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g_{\mu\nu}\right) \stackrel{!}{=} \frac{8\pi G}{c^4} T_{\mu\nu}}$$

(Forderung (5) ok, siehe Weinberg-Form von $R_{\mu\alpha\nu\beta}$ und damit $R_{\mu\nu}$ ✓

Forderung (4) o.k., da falls $T_{\mu\nu} = 0$ $\forall P$ ist $g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu}$ $\forall P$ Lösung, i.e. flacher Raum ist Lösung, da dann aus $R_{\mu\alpha\nu\beta} = 0 \Rightarrow R_{\mu\nu} = 0$ und Gleichung erfüllt (Schluß gilt aber nicht umgekehrt) ✓

Fortfahren mit Seite (5) ...