

Elementare Theorie entarteter Sterne (Sexl/Ubantke, Kap. 8)

Wir hatten bereits gesehen, daß "nur" die Neutronensterne so kompakt sind, daß sie aufgrund der starken Gravitationskraft allgemein relativistisch beschrieben werden müssen. Alle anderen Sterne können Newtonisch (unter evtl. Berücksichtigung der spez. Relativitätstheorie im Falle der Fastenabgleichung) beschrieben werden. Die Klassifizierung gewöhnlicher Sterne wollen wir uns nun zunächst reservieren. Das Leben eines Sterns beginnt mit seiner Entstehung aus einer Gaswolke, die sich unter der Wirkung der eigenen Schwerkraft allmählich kontrahiert und dabei aufheizt, bis das entstehende Druck der Schwerkraft das Gleichgewicht hält. Die Gleichgewichtsbedingung ergibt sich dabei aus einer einfachen Betrachtung des Druckzunahme im Innern einer kugelförmig und nichtrotierend angenommenen Sternes. Es ist

$$\frac{dp}{dr} = - \frac{G M(r)}{r^2} \rho(r) \quad \text{= verallg. "Barometrische" Höhenformel}$$

mit  $M(r) = 4\pi \int_0^r \rho(r') r'^2 dr'$  (1)

Die die Masse des Sterns bis zum Radius  $r$  bedeutet. Unter der vereinfachenden Annahme einer Gas-Kugel konstanter Dichte ( $\rho = \text{const}$ ) wird

$$\frac{dp}{dr} = - \frac{4}{3} \pi G \rho^2 r \Rightarrow p = p_0 - \frac{2}{3} \pi G \rho^2 r^2$$

Dabei ist  $p_0$  der Druck im Zentrum des Sterns. Aus  $p(r=R_{\text{Stem}}) = 0$  folgt sofort

$$p_0 = \frac{2}{3} \pi G \rho^2 R^2$$

oder

$$\boxed{\frac{p_0}{\rho c^2} = \frac{2}{3} \pi \frac{G \rho R^3}{R c^2} = \frac{1}{2} \frac{m}{R}} \quad , \quad 2m = \frac{8}{3} \pi G \rho R^3 = \mu \quad \leftarrow \text{Schwarzschildradius} \quad (2)$$

Ersetzen wir den Druck  $p_0$  im Sterninnern durch einen mittleren Druck  $p$ , so ist die wirg. Größe ordnungsmäßig (d.h. bis auf numerische Faktoren  $\sim 1$ )

$$\frac{m}{R} \approx \frac{\rho}{gc^2}$$

Das für die  $\frac{m}{R}$  entscheidende Verhältnis von Schwarzschild-Radius zu Radius eines Körpers ( $\approx$  Stern) ist daher durch das Verhältnis Dichte zu Energiedichte ( $gc^2$ ) bestimmt.

a) Die Zustandsgleichung normaler Sterne

Um (3) weiter auszuwerten, müssen wir Annahmen über die Zustandsgleichung der Sternmaterie machen. Allgemein ist die Zustandsgleichung mittels eines dimensionslosen Funktionschreibens als

$$\frac{\rho}{gc^2} = f(\rho, T) \quad (4)$$

$\uparrow$  Dichte       $\leftarrow$  Temperatur

Für ein ideales Gas (Sterne, deren Materie dadurch gezeichnet werden kann) findet man leicht

$$f = \frac{\rho}{gc^2} = \frac{kT}{m_0 c^2} = \frac{v^2}{3c^2} \quad \text{im nichtrelativistischen Limes} \quad (5)$$

$\uparrow$  Masse der Teilchen des Gases

Für normale Sterne ist  $f$  und damit das Verhältnis von Schwarzschild-Radius zu Radius in unserem einfachen Modell eindeutig durch die Temperatur und das Molekulargewicht im Sterninneren bestimmt. Mit  $m_0^2$  von Wasserstoff ( $\approx 16.0$ ) und Temperatur ein paar  $10^7$  (die durch Kernreaktionen festgelegt ist) ist

$$\frac{m}{R} \approx \frac{kT}{m_0 c^2} \approx 10^{-6}$$

Da relativistische Effekte (Lichtablenkung, Rotverschiebung und der noch zu besprechende Massedefekt eines Sterns) von der Größenordnung  $\frac{m}{R}$  sind, erhalten wir die bemerkenswerte Gleichung

$$\delta \approx \frac{\Delta v}{v} \approx \frac{\Delta M}{M} \approx \frac{m}{R} \approx f(\rho, T) \approx \frac{kT}{m_0 c^2} \approx 10^{-6} \quad \leftarrow \text{z.B. unsere Sonne} \quad (6)$$

Die Kleinheit relativistischer Effekte ist daher bei Normalsternen von der Kleinigkeit her bedingt. Es ist bemerkenswert, daß die relativistischen Effekte sowohl unabhängig von der Größe der Gravitationskraft sind, wie (6) zeigt.

Solange Kernreaktionen die Temperatur  $T$  aufrechterhalten können, bleibt das Sternmodell stabil. In der Hauptreihe des sog. Hertzsprung-Russell-Diagramms (Sterne von etwa Sonnenmasse etwa Milliarden Jahre).

### 3.) Die Zustandsgleichung entarteter Materie

Wenn die Vorräte an Kernenergie erschöpft sind, kann die hohe Temperatur und damit der Druck im Sterninnern nicht mehr aufrechterhalten werden, der Stern bricht zusammen. Er wird dabei sehr große mittlere Dichte erreicht, und es zeigt sich, daß dabei wieder besonders einfache Verhältnisse vorliegen. Die Materie wird entartet (die Elektronen- oder gasche Neutronen bilden ein entartetes Fermi-Gas):

$$p_{gz} = f(\rho) \quad - \text{für entartete Materie} \quad (17)$$

Bei entarteter Materie ist die kinetische Energie der Teilchen (z.B. Elektronen- oder Neutronen) und damit der Druck nicht durch die Temperatur bedingt wie beim idealen Gas, sondern aufgrund der Unschärferelation und des Pauli-Verbotes durch die sog. Fermi-Druck charakterisiert.

Bei Dichte von etwa  $10^6 \text{ g/cm}^3$  nimmt das Material metallische Eigenschaften an, die Elektronen verhalten sich dann wie ein freies, entartetes Elektronengas. Für den Druck gilt dann

$$p = \frac{p}{\rho c^2} \approx \frac{E_F}{m_0 c^2} \approx \begin{cases} \frac{1}{m_0 c^2} \frac{p_F^2}{m_0} & \text{Elektronenenergie (NR)} \\ \frac{1}{m_0 c^2} p_F \cdot c & \text{Fermiimpuls } p_F \cdot c \text{ (R)} \end{cases} \quad (18)$$

Der Übergang von (NR) zu (R) geschieht etwa bei  $p_F \approx m_0 c$ , i.e. bei einem mittleren Elektronenabstand  $d \approx \frac{h}{m_0 c} = \lambda_{cl} = 4 \cdot 10^{-11} \text{ cm}$ , der Comptonwellenlänge des Elektrons.

Die entsprechende Dichte  $\rho_0$  (an Kernteilchen) ist dann etwa ( $m_0 \approx$  Masse des Wasserstoffatoms)

$$\rho_0 \approx \frac{m_0}{\lambda_{cl}^3} = m_0 \frac{m_0^3 c^3}{h^3} \approx 3 \cdot 10^6 \text{ g/cm}^3 \quad (19a)$$

Setzt man in (18)  $\rho = \frac{m_0}{d^3}$ , so erhält man als Zustandsgleichung

$$\frac{p}{\rho c^2} = \frac{m_0}{m_0} \left( \frac{\rho}{\rho_0} \right)^{n/3} \quad \begin{cases} n=2 & \rho \lesssim \rho_0 \quad \text{(NR)} \\ n=1 & \rho \gtrsim \rho_0 \quad \text{(R)} \end{cases} \quad (19)$$

Diese Zustandsgleichung gilt für  $10^4 \text{ g/cm}^3 < \rho < 10^8 \text{ g/cm}^3$ .

### c) Weiße Zwerg

Setzen wir nun  $(9)$  in die Gleichgewichtsbedingung  $(3)$  für eine einfache Stern ein, so folgt in etwa

mittels  $\frac{m}{R} = f, R \approx \left(\frac{M}{\rho}\right)^{1/3}$

$$\frac{m}{R} \stackrel{(2)}{\approx} \frac{G \rho R^2}{c^2} \approx \frac{G M^{2/3} \rho^{1/3}}{c^2} = f \Rightarrow M \approx \frac{c^3 f^{3/2}}{\rho^{1/2} G^{3/2}}$$

aus  $(9)$   
 $\Rightarrow M(\rho) = \frac{c^3}{\rho^{1/2} G^{3/2}} \left(\frac{\rho}{\rho_0}\right)^{3/2} \left(\frac{m_{cl}}{m_0}\right)^{3/2}$

$$= \begin{cases} \left(\frac{\rho}{\rho_0}\right)^{1/2} M_c & \rho < \rho_0 & (NR) \\ M_c & \rho > \rho_0 & (R) \end{cases} \quad (10)$$

mit

$$M_c \equiv M(\rho_0) = \frac{c^3}{\rho_0^{1/2} G^{3/2}} \left(\frac{m_{cl}}{m_0}\right)^{3/2} \stackrel{(9a)}{=} 3.7 \cdot 10^{23} \text{ g} \approx \underline{1.4 M_\odot}, \quad (11)$$

der sog. Chandrasekhar-Grenzmasse  $M_c$ .

Beziehung (11) zeigt, daß die durch den Elektronendruck aufrechterhaltenen Sterne, die Weißen Zwerg, ein Massenspektrum haben, das - falls hier das gasartige einfache Näherung - für  $\rho \leq \rho_0$  wie  $\rho^{1/2}$  ausfällt und für  $\rho = \rho_0$  die Chandrasekhar-Masse  $M_c$  als obere Schranke hat (Der korrekte Wert liegt allerdings bei etwa  $1.2 M_\odot$ ).

Relativistische Effekte sind für weiße Zwerg von der Größenordnung (vgl. (6))

$$\delta \approx \frac{\Delta v}{v} \approx \frac{\Delta M}{M} \approx \frac{m}{R} \approx \frac{\rho}{\rho_0} \approx \frac{m_{cl}}{m_0} \left(\frac{\rho}{\rho_0}\right)^{2/3} \approx \frac{m_{cl}}{m_0} \approx \underline{10^{-4}} \quad (12)$$

Die Kleinheit relativistischer Effekte spiegelt demnach das Elektron-Proton-Massenverhältnis wider.

Für die Radien läßt sich aus  $R \approx \left(\frac{M}{\rho}\right)^{1/3}$  und im (NR)  $M(\rho) = \left(\frac{\rho}{\rho_0}\right)^{1/2} M_c$  leicht zeigen, daß

$$\underline{R \approx 5000 \text{ km} \left(\frac{\rho_0}{\rho}\right)^{1/6}}$$

# d) Neutronensterne

Überhalb von  $\rho = 10^8 \text{ g/cm}^3$  erfolgt ein allmählicher Übergang zu Neutronenmaterie, da wegen der hohen kin. Energie der Elektronen die Neutronen nicht in Protonen und Elektronen (und Neutrinos) zerfallen können, sondern vornehmlich mittels der Reaktion  $p + e^- \rightarrow n + \nu_e$  im Stern Neutronen gebildet werden. Im Dichtebereich zwischen  $10^8$  und  $10^{13} \text{ g/cm}^3$  werden zunächst sehr neutronenreiche Isotope wie  ${}_{22}^{62}\text{Ni}$  und  ${}_{33}^{132}\text{Y}$  aufgebaut. Ab  $3 \cdot 10^{11} \text{ g/cm}^3$  existieren dann freie Neutronen neben Atomkernen und bei  $10^{13} \text{ g/cm}^3$  ist schließlich der Übergang zum Neutronengas beendet. Ab dieser Dichte läßt sich die Zustandsgleichung wieder einfach berechnen, da dann annäherungsweise Verhältnisse wie bei weißen Zwergen vorliegen, nur daß sich Neutronen (als baryonische Teilchen) die Rolle der Elektronen ( $m_e \rightarrow m_n$ ) übernimmt:

$$f(\rho) = \frac{P}{\rho c^2} = \left(\frac{\rho}{\rho_1}\right)^{1/3} \quad \begin{matrix} \rho \leq \rho_1 & n=2 & (NR) \\ \rho \geq \rho_1 & n=1 & (R) \end{matrix}$$

mit  $m_e \rightarrow m_n$

$$\rho_1 = \frac{m_n}{\lambda_n^3} \approx 10^{16} \text{ g/cm}^3 \quad (13)$$

und

$$M(\rho) = \begin{cases} (\rho/\rho_1)^{1/3} M & \rho \leq \rho_1 & (NR) \\ M & \rho \geq \rho_1 & (R) \end{cases}$$

hier die Chandrasekhar-Masse denselben Zahlenwert ( $M$ ) besitzt, da bei der Substitution  $m_e \rightarrow m_n$  sich ja auch  $\rho_0$  in  $\rho_1$  verwandelt und mittels (13) sich die Abhängigkeit von der Elektronen- bzw. Neutronenmasse exakt wegkürzt.

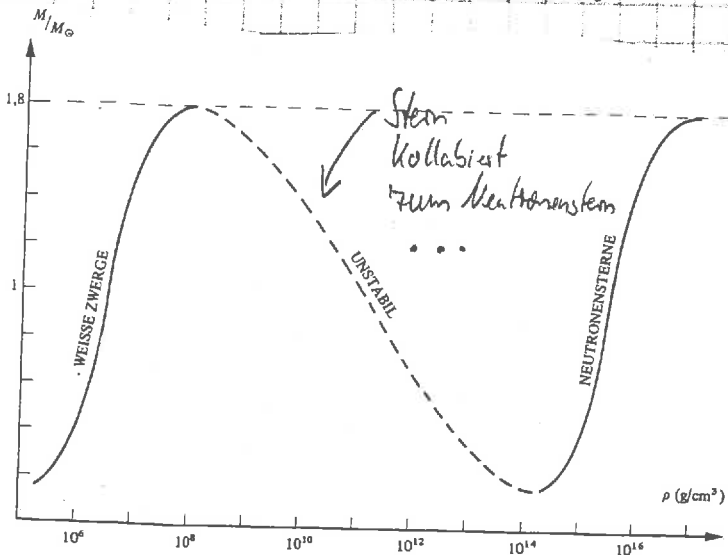


Fig. 42: Massenspektrum entarteter Sterne (elementare Rechnung).

## • rel. Effekte

$$f \approx \frac{A^0}{A} \approx \frac{\Delta M}{M} \approx \frac{M}{R} \approx \frac{P}{\rho c^2} \approx \left(\frac{\rho}{\rho_1}\right)^{2/3} \approx 1$$

Bei Neutronensternen liefert die AR

daher wesentliche Korrekturen zur

Newton'schen Theorie und unsere

Betrachtung ganz am Anfang (1)

musse entsprechend abgeändert werden  
 → Tolman-Oppenheimer-Volkoff-Gleichung



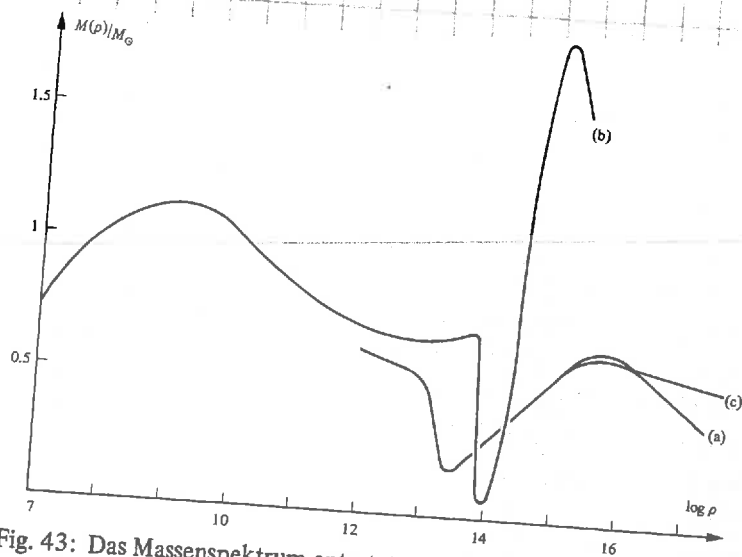


Fig. 43: Das Massenspektrum entarteter Sterne (numerische Rechnungen: a) Harrison-Wheeler, b) Cameron, c) Hagedorn).

alle  
 Modellrechnungen  
 von Neutronensternen  
 und weißen Zwergen  
 ...  
 können auch  
 Quasarsysteme  
 sein ... → Klausur

• Radio des Neutronensterns:  $R \approx 5 \text{ km} \left(\frac{\rho_1}{\rho}\right)^{1/6}$  (NR-Fall)

Da die Korrekturen der RR doch beträchtlich sind, ist diese Abschätzung recht schlecht und die tatsächliche Radio von Neutronensternen sind etwa eine Faktor 2-3 größer, da dem Masse defizit eine größere Bohrweite zukommt.

Die Entdeckung des Pulsars im Jahre 1967 und ihre darauf folgende Identifizierung mit Neutronensternen ist in das neuere astronomische Literatur ausführlich enthalten.

# Die Tolman-Oppenheimer-Volkoff-Gleichung

Wir wollen hier die Annahme machen, daß sich das Energie-Impuls-Tensor  $T_{\mu\nu}$  durch die hydrodynamische Form (vgl. Abschnitt in 'Tensoren in der Physik', Kap. 4) beschreiben lässt. Dies bedeutet, daß z.B. elektrische oder magnetische Felder keine beeinflussende Rolle spielen. Außerdem nehmen wir an, daß die Sternmaterie im hydrostat. Gleichgewicht ist, d.h.  $u^\mu = (u^0, \vec{0})$  mit  $g_{00}(u^0)^2 = c^2 \rightarrow u^0 = c \cdot (g_{00})^{-\frac{1}{2}}, u_0 = c \cdot (g_{00})^{\frac{1}{2}}$ . Für eine radialsym. Metrik hat dann das Energie-Impuls-Tensor die folgende Form

$$T_{\mu\nu} = \left(g_{\mu\nu} + \frac{P}{c^2}\right) u_\mu u_\nu - P g_{\mu\nu} = \left(g_{\mu\nu} + \frac{P}{c^2}\right) c^2 g_{\mu 0} g_{\nu 0} - P g_{\mu\nu}$$

$$= \begin{pmatrix} g_{00} c^2 e^{2\nu(r)} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & P e^{2\lambda(r)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & P r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & P r^2 \sin^2\theta \end{pmatrix} \quad (1)$$

ferner gilt für das auszunehmende hydrostat. Gleichgewicht mit der obigen Form (1)

$$T_{\mu\nu} = 0 \Rightarrow \dots \left(g_{00} c^2 + P\right) \frac{1}{2} \vec{\nabla} (\ln g_{00}) + \vec{\nabla} P = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{1}{2} v'(r) (g_{00} c^2 + P) + P'(r) = 0} \quad (2)$$

oder

$$\frac{dP}{dr} = -\frac{1}{2} v'(r) \cdot (g_{00}(r) c^2 + P(r)) \quad (2)$$

Dies ist bereits die Vorstufe der sog. Tolman-Oppenheimer-Volkoff-Gleichung; es muß noch  $v'(r)$  bestimmt werden. Es ist zu erwarten, daß eine (1) auf Serik 0 analoge, gekoppelte Gleichungen finden ist. Diese muß aus den EG folgen. Die Einsteingleichungen lauten

$$00 = e^{2\nu-2\lambda} \left(-\frac{\lambda'}{r} + \frac{1}{r^2}\right) - \frac{e^\nu}{r^2} = -\frac{8\pi G}{c^2} \rho_0(r) e^\nu \quad (3a)$$

$$11 = -\frac{v'}{r} - \frac{1}{r^2} + \frac{e^\lambda}{r^2} = -\frac{8\pi G}{c^4} P_0(r) e^\lambda \quad (3b)$$

$$22 = -\frac{1}{2} r^2 e^{-2\lambda} \left(v'' + \frac{v'^2}{2} - \frac{v'\lambda'}{2} + \frac{v'-\lambda'}{r}\right) = -\frac{8\pi G}{c^4} P_0(r) r^2 \quad (3c)$$

Die (3,3) Komponente liefert dieselbe Gleichung (3c) und wird daher nicht notiert. (8)

Man kann nun zeigen, daß aus (3a), (3b) mit einigen Umformungen und Einsetzen in (3c) sich genau die Gleichung (2) für das hydrostat. Gleichgewicht ergibt. Dies ist nicht verwunderlich, da ja Gleichungen (3a,b,c) ja auch die Divergenzfreiheit  $G_{\mu\nu} = T_{\mu\nu}$  widerspiegeln. und die Stationarität ansatz Anders ausgedrückt, wir können als zu lösende Gleichungen (1) und (3a) und (3b) verwenden, da sich ja (3c) aus diesen drei Gleichungen ergibt.

(Anmerkung: Die Ableitung (1) aus (3a,b,c) findet man z.B. in Heller, Kap. 9.6, S. 295 oder im Müller-Skript S. 148)

(3a) und (3b) lauten etwas umgeschrieben

$$e^{-\lambda} \left( \frac{1}{r^2} - \frac{\lambda'}{r} \right) - \frac{1}{r^2} = - \frac{8\pi G}{c^4} (\rho_0 c^2) \quad (4a)$$

$$e^{-\lambda} \left( \frac{v'}{r} + \frac{1}{r^2} \right) - \frac{1}{r^2} = \frac{8\pi G}{c^4} P \quad (4b)$$

Setzen wir  $e^{-\lambda} = \frac{u}{r}$ , so folgt aus (4a)

$$u' = - \frac{8\pi G}{c^4} (\rho_0 c^2) r^2 + 1$$

Integration von  $r=0$

$$\Rightarrow u = r - 2m(r) = r \cdot e^{-\lambda(r)} \rightarrow e^{-\lambda(r)} = \frac{1}{r - 2m(r)} \quad (5)$$

$$2m(r) := \frac{8\pi G}{c^4} \int_0^r (\rho_0(r') c^2) r'^2 dr'$$

$$\hat{=} \frac{2G}{c^2} \left( \int_0^r \rho_0(r') r'^2 dr' \right) \hat{=} \frac{2G}{c^2} M(r) \quad \leftarrow \text{Masse bis Radius } r \text{ des Sterns}$$

Man sieht schon die Analogie zur Schwarzschild Lösung  $e^{-\lambda(r)} = \frac{1}{r - 2m(r)} = \frac{1}{r - \frac{2GM(r)}{c^2}}$ . (5) ist dem

Urkommen analog,

aus (4b) können wir nun nach  $v'$  auflösen und  $e^{-\lambda(r)}$  mittels (5) einsetzen

$$v' = \left( \left( \frac{8\pi G}{c^4} P + \frac{1}{r^2} \right) e^{-\lambda} - \frac{1}{r^2} \right) \cdot r$$

$$\stackrel{(5)}{=} \left( \left( \frac{8\pi G}{c^4} P + \frac{1}{r^2} \right) \frac{1}{r - 2m(r)} - \frac{1}{r^2} \cdot \frac{1}{1 - \frac{2m(r)}{r}} \right) \cdot r = \frac{2 \left( -m(r) + \frac{4\pi G}{c^4} P r^3 \right)}{r(r - 2m(r))} \quad (6)$$



Das Ergebnis für  $\rho$  können wir sofort in (2) einsetzen und erhalten

$$\frac{dp}{dr} = - \frac{(\rho_0 c^2 + P) \left[ m(r) + \frac{4\pi G}{c^2} P(r) \cdot r^3 \right]}{r(r - 2m(r))} \quad (7a)$$

wobei gemäss (5)

$$m(r) = \frac{G}{c^2} \left( 4\pi \int_0^r \rho_0(r') r'^2 dr' \right) \hat{=} \frac{G}{c^2} M(r) \quad (7b)$$

(7a) und (7b) stellen die sog. TOV-Gleichungen dar. Es ist sofort ersichtlich, daß sich (7) im Newtonschen Limes ( $m(r) \ll r$ ,  $P \ll \rho_0 c^2$ ) auf Gleichung (1), Seite 2, reduzieren.

Sie stellen damit die korrekte, allgemein relativistische Verallgemeinerung von (1) dar.

Man beachte, dass hundertmal Druck  $P$  zweimal auf der rechten Seite von (7a) auftritt.

Dies hat zur Folge, dass der Druck nun stärker anwächst wird, Druck erzeugt demnach

höheren Druck. Zusammen mit der Zustandsgleichung  $P(\rho)$  lässt sich (7) dann lösen.

Auch kann wir vermittels (6) und (5) ebenfalls Lösungen von (7) erhalten.

→ Diskussion von Klausur über Lösung von (7)

und zu Quasarkernen

# Innenraumlösung und Massendefekt

Aus (4a) und (4b) auf Seite (8) folgt durch Substitution sofort

$$e^{-\lambda(r)} (v' + \lambda') = \frac{8\pi G}{c^4} (\rho_0 c^2 + P) r \quad (8)$$

und damit mittels Integration aus dem Unendlichen

$$v(r) = -\lambda(r) + \frac{8\pi G}{c^4} \int_{\infty}^r dr' e^{\lambda(r')} r' (\rho_0(r') c^2 + P(r')) \quad (9)$$

Diese Lösung erfüllt offensichtlich  $\lambda = -v$  für  $r > R_{\text{Stern}}$ , da im Aussenraum ja  $\rho_0 c^2 = P = 0$ , und geht daher dort in die Schwarzschild-Metrik über. Gemäss (5) ist dann im Aussenraum

$$m_{\text{Stern}} = m(r=R) = \frac{2G}{c^2} \left( 4\pi \int_0^R \rho_0(r') r'^2 dr' \right) = \frac{2G}{c^2} M_{\text{Stern}}, \text{ i.e.}$$

$$M_{\text{Stern}} = M = 4\pi \int_0^R \rho_0(r') r'^2 dr' \quad (10)$$

berechnet die Mass des Sterns, die in der Schwarzschild-Metrik im Aussenraum einzuwerten ist!

Betrachten wir in Folge eine Sternkonstante Dichte, i.e. der Fall inkompressibler Materie,  $\rho_0 = \text{const.}$  (Dies ist ein Overkill, da diese Aussage ja nicht allgemein koordinateninvariant sein kann. Sie sei gültig in der Koordinatensystem, welches in die EGGh. (3) eintritt.)

Dann ist gemäss (5)

$$m(r) = \frac{4\pi}{3} \frac{G}{c^2} \rho_0 r^3 \quad (r \leq R); \quad (11)$$

$$e^{\lambda(r)} = \frac{1}{1 - \frac{2m(r)}{r}} \quad (12)$$

Die TOV-Gleichung (7a) lautet dann

$$-\frac{dp}{dr} = \frac{4\pi G}{c^4} (\rho_0 c^2 + P) \left( \frac{\rho_0 c^2}{3} + P \right) r^3}{r \left( r - \frac{8\pi G}{3} \frac{\rho_0}{c^4} r^3 \right)} \quad (13)$$

Mittels der dimensionslose Radialkoordinate

$$x = \sqrt{\frac{8\pi G}{3c^2} \rho_0} \cdot r$$

Wird aus (13)

$$\frac{4 \rho_0 c^2 dp}{(\rho_0 c^2 + P)(\rho_0 c^2 + 3P)} = - \frac{dx^2}{1-x^2} \quad (14)$$

oder ... schließlich

$$\frac{p(x)}{\rho_0 c^2} = \frac{\sqrt{1-x^2} - \sqrt{1-x^2}}{3\sqrt{1-x^2} - \sqrt{1-x^2}} \quad (15)$$

wobei  $X \stackrel{!}{=} X(R)$ , i.e.

$$X^2 = \frac{8\pi G \rho_0}{3c^2} R^2 \stackrel{(10)}{=} \frac{2m_{\text{Stern}}}{R} \quad (16)$$

Der Druck  $p_0$  im Sternmittelpunkt wird dann

$$\frac{p_0}{\rho_0 c^2} = \frac{1 - \sqrt{1 - \frac{2m_{\text{Stern}}}{R}}}{3\sqrt{1 - \frac{2m_{\text{Stern}}}{R}} - 1} \quad (17)$$

Für  $m_{\text{Stern}} \ll R$  gilt (17) in der Newtonschen Gleichung (2) auf Seite 11 über. Für  $2m_{\text{Stern}} \leq R$  ergeben sich dagegen starke Abweichungen, für  $R = \frac{2}{3} (2m_{\text{Stern}})$  wird  $p_0 = \infty$  und der Stern bricht zusammen. Ein Stern, der aus inkompressibler Materie besteht, muß also  $\frac{2}{3}$  seiner Schwarzschild-Radius sein. Dies ist auch gleichzeitig eine Bedingung an die Masse  $M_{\text{Stern}}$  (vgl. (10)), des Sterns bezogen auf die Dichte  $\rho_0$ , denn

$$\frac{r_s}{R_{\text{Stern}}} = \frac{r_s}{R} = \frac{2m_{\text{Stern}}}{R} \stackrel{(10)}{=} \frac{2G M_{\text{Stern}}}{c^2} \left( \frac{4\pi \rho_0}{3 M_{\text{Stern}}} \right)^{\frac{1}{3}} = \frac{2G}{c^2} \left( \frac{4\pi}{3} \rho_0 M_{\text{Stern}}^2 \right)^{\frac{1}{3}} < \frac{2}{3}$$

$$\Rightarrow M_{\text{Stern}}^2 < \frac{16c^6}{243\pi G^3 \rho_0} \quad (17)$$

Man kann nun auch mittels (19) und (15) die Größe  $e^{2\nu(r)}$  bestimmen (vgl. Aufgabe in Sect. 11b, S. 293). Ohne Beweis notizen wir das Ergebnis

$$e^{2\nu(r)} = \frac{1}{4} \left[ 3\sqrt{1-x^2} - \sqrt{1-x^2} \right]^2 \quad \leftarrow \text{dies wäre verschwendet, wenn in (15) der Nenner dringelieft. Deswegen hat sich die Lösung durch (17) sichergestellt.} \quad (18)$$

Mit (17) und (18) lautet das Linienelement im Innern des Sterns

$$ds^2 = \left[ \frac{3}{2}\sqrt{1-x^2} - \frac{1}{2}\sqrt{1-x^2} \right]^2 c^2 dt^2 - \frac{dr^2}{1-x^2} - r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2) \quad (19)$$

wobei  $x = \sqrt{\frac{8\pi G}{3c^2} \rho_0} \cdot r$   $r \leq R_{\text{Stern}}$

Für  $r = R_{\text{Stern}}$  geht (19) dann stetig in die SSM mit der Masse (10) über.

Eine letzte Überlegung betrifft die Bedeutung des Massenparameters  $M$  (10)

$$M = \frac{4}{3} \pi R_{\text{Schw}}^3 \rho_0 = \rho_0 \int_0^R r^2 dr \int_0^\pi \sin \theta d\theta \int_0^{2\pi} d\phi,$$

(20)

das ja das asymptotische Verhalten der Schwarzschild-Metrik im flachenraum bestimmt.  $M$  gibt demnach die gravitativ Gesamtmasse des Sterns an. Das Koordinatenvolumen, welches wir in (20) noch einmal explizit aufgeführt haben, also  $\frac{4}{3} \pi R^3$ , entspricht also nicht dem physikalischen Volumen des Sterns, da die physikalische Länge in radialer Richtung dem Einfluß der Metrik unterliegt. Der physikalische, infinitesimale Radialabstand ist

$$ds_r = \sqrt{g_{rr}} dr = e^{\frac{1}{2}\alpha} dr = \frac{dr}{\sqrt{1 - \frac{8\pi G}{3c^2} \rho_0 r^2}} = \frac{dr}{\sqrt{1 - \frac{r^2}{r_0^2}}} \quad \text{mit } r_0 = \left(\frac{3c^2}{8\pi G \rho_0}\right)^{\frac{1}{2}} \quad (21)$$

Die entsprechenden Ausdrücke für die Winkelrichtungen sind von Polarkoordinaten wohl bekannt:

$$ds_\theta = \sqrt{g_{\theta\theta}} d\theta = r d\theta$$

$$ds_\phi = \sqrt{g_{\phi\phi}} d\phi = r \sin \theta d\phi$$

Das echte physikalische Volumen des Sterns ist deshalb

$$V = \int \sqrt{|g_{rr} g_{\theta\theta} g_{\phi\phi}|} dr d\theta d\phi = 4\pi \int_0^R \frac{r^2 dr}{\sqrt{1 - \frac{r^2}{r_0^2}}} \\ = 2\pi r_0^3 \left[ \arcsin \frac{R}{r_0} - \frac{R}{r_0} \left(1 - \frac{R^2}{r_0^2}\right)^{\frac{1}{2}} \right] \quad (22)$$

In den Fall gewöhnlicher Sterne oder weißer Zwerge ist das Verhältnis  $\frac{R}{r_0} \ll 1$ , so daß wir den Ausdruck in der Klammer nach Potenzen in  $\frac{R}{r_0}$  entwickeln können:

$$V = \frac{4}{3} \pi R^3 \left[ 1 + \frac{3}{10} \left(\frac{R}{r_0}\right)^2 + \dots \right]$$

(Für Neutronensterne ist das Verhältnis  $\frac{R}{r_0}$  nicht soviel kleiner und man muß dann die volle Beschränkung (22) verwenden - vgl. weiter unten). Normalerweise würde wir erwarten, daß die also das physikalische Volumen  $V$  verhaltene Masse dichte  $\rho_0$  eine Gesamtmasse  $M_0$

$$M_0 = V \cdot \rho_0 = \frac{4}{3} \pi \rho_0 R^3 \left[ 1 + \frac{3}{10} \left(\frac{R}{r_0}\right)^2 + \dots \right] \equiv M \left[ 1 + \frac{3}{10} \left(\frac{R}{r_0}\right)^2 + \dots \right] \quad (23)$$

ergibt.

Die Differenz zwischen  $M_0$  und der durch die Schwerkraft in Erscheinung tretende Masse  $M$  bezeichnet man als Massendefekt ( $M_0 > M$ ). In kleinster Ordnung ist (13)

$$\Delta M = M - M_0 \approx -M \frac{3}{10} \left(\frac{R}{r_0}\right)^2 \stackrel{\text{Einsetzen von } r_0 \text{ aus (21)}}{=} -\frac{2\pi}{5} \int_0^R \frac{\rho^5}{r_0^2} = -\frac{16\pi^2 G}{15c^2} \rho_0^2 R^5 = -\frac{3}{5} \frac{G}{c^2} \frac{M^2}{R} \quad (24)$$

Im Rahmen der Newtonschen Näherung können wir diesen Massendefekt als gravitative Bindungsenergie verstehen. Man erinnere sich an die Elektrostatik, wo je die Feldenergie eines homogen geladenen Kugel ja gerade ergibt  $E_{el} = +\frac{3}{5} \frac{Q^2}{R}$ , dies ist hier völlig analog

$$\begin{aligned} \Delta E_{grav} &\stackrel{\text{Newton-Näherung}}{\approx} \int_0^R d^3r \rho(r) \phi_{grav}(r) = 4\pi \rho_0 \int_0^R r^2 dr \left(-\frac{GM(r)}{r}\right) \\ &= 4\pi \rho_0 \int_0^R r^2 dr \left(-G \frac{\frac{4}{3}\pi \rho_0 r^3}{r}\right) = -\frac{16\pi^2}{15} G \rho_0^2 R^5 \stackrel{!}{=} \Delta M \cdot c^2 \end{aligned}$$

Bindungsenergie und Massendefekt hängen also gerade über Einsteins Masse-Energie-Relation miteinander zusammen.

Für einen Stern mit beliebiger innerer (radial sym.) Massenverteilung  $\rho(r)$  und im Falle starker Gravitationseffekte (= Bindungen) wie bei Neutronensternen müssen wir den Massendefekt mit Hilfe des allgemeinen Ansatzes (24) berechnen:

$$\Delta M = -4\pi \int_0^R r^2 dr \left(c^{\frac{1}{2}} - 1\right) \rho(r),$$

← ohne Beweis, aber intuitiv sehr einseitig. (25)

← kein Beweis: Das physikalische Problem ist die damit verbundene Masse, die man hier gewöhnlich, ist  $\rho_0$  gerade  $4\pi \int_0^R r^2 \rho_0 dr$ . Nach (175) auf Seite 10 ist die gravitative Masse  $\rho_0$  gerade  $4\pi \int_0^R r^2 \rho_0 dr \Rightarrow$  (25)

wobei  $\rho(r)$  aus der radialen TOV-Gleichung (7a,b) Seite 9 und Verwendung von (5) auf Seite 10 zu ermitteln ist.

Bei Neutronensternen ist der Massendefekt typischerweise in der Größenordnung 20-50%.

An der Stabilitätsgrenze (112) (für die hier idealisiert Fall von starker Konstanz Dichte) ist der Massendefekt etwa 64%!