

Die Robertson-Walker-Metrik

Kosmologisches Prinzip: Die Erde hat keinen privilegierten Platz im Weltall; das Weltall bietet (im Mittel) von jeder Stelle aus den gleichen Anblick.

Für Distanzen $r \gg d \hat{=} \text{Abstand zweier Galaxienhaufen} \sim 3 \cdot 10^4 \text{ Lichtjahre}$ soll die gravitierende Materie (Masse & Strahlung) in etwa homogen und isotrop verteilt sein. r sollte aber kleiner als der Radius des Universums ($\sim 2 \cdot 10^{10}$ Lichtjahre) sein.

Ein solches Punkt existiert, i.e. $r \sim 10^8$ Lichtjahre.

Als weitere Annahme nehmen wir an, daß die Materieverteilung im Universum die Geometrie der Raum-Zeit bestimmt (Machsches Prinzip).

→ aus der Verteilung in der spez. Koordinatensystem schließen wir, daß auch die Geometrie des Raumes zu jeder Zeitpunkt homogen sein soll.

Als letzte Annahme postulieren wir die Existenz einer globalen Zeitkoordinate $x_0 \hat{=} t$, sodaß das Linienelement die Form

$$ds^2 = dx_0^2 - d\vec{\sigma}_{\text{Raum}}^2 = dx_0^2 - \sum_{i=1}^3 g_{ik}(x^k) dx^i dx^k$$

haben soll. Dies ist in einer euklidischen Umgebung eines 3-dim Hyperschnittes immer möglich (äußeres Koordinatensystem), wir nehmen also an, es gelte auch für das gesamte Universum.

↳ $\int_{\text{Raum}} dx_0^2 = ds$, es gilt dann $\Gamma_{00}^i \hat{=} 0$ in diesen Koordinaten ($\hat{=} \ddot{x}^i = 0$)
• $P(t_0, \vec{r}(t_0))$

Aufgrund der Forderung der Isotropie des Raumes liegt das Gesetz

$$ds^2 = dx_0^2 - e^{G(x_0, r)} d\vec{\sigma}^2 \tag{1}$$
$$\hat{=} dr^2 + r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2)$$

nahe.

Frage: Wie geht das ab? Masse unendlich groß ?? etc. Isotropie etc.

Das Postulat der Homogenität zu allen Zeiten erfordert, daß zwei Beobachter an den Punkten x_1^i und x_2^i dieselbe Physik beobachten; nur die absolute Längenskala darf unterschiedlich sein, sich aber nicht mit der Zeit ändern, i.e.

$$\frac{e^{G(x_0, t_1)}}{e^{G(x_0, t_2)}} = e^{G(x_0, t_1) - G(x_0, t_2)} \quad \text{muß zeitunabhängig sein.}$$

$$\Rightarrow G(x_0, t) = g(x_0) + f(t)$$

$$\Rightarrow ds^2 = (dx^0)^2 + e^{g(x_0) + f(t)} d\vec{\sigma}^2 \quad (2)$$

... \Rightarrow für den divergenzfreien Ricci-Tensor G^{μ}_{ν}

$$G^0_0 = e^{-G} \left(f'' + \frac{f'^2}{4} + \frac{2f'}{r} \right) - \frac{3}{4} f'^2$$

$$G^1_1 = e^{-G} \left(\frac{1}{4} f'^2 + \frac{1}{r} f' \right) - g'' - \frac{3}{4} f'^2 \quad (3)$$

$$G^2_2 = G^3_3 = e^{-G} \left(\frac{1}{2} f'' + \frac{f'}{2r} \right) - g'' - \frac{3}{4} f'^2$$

↑ in der Darstellung miteinander verbunden und die anderen Komponenten fallen durch $g'' = 0$ weg.

Eine weitere Einschränkung ergibt sich aus der Erfüllung der Einsteinschen Feldgleichungen (mit kosmologischem Term)

$$G^{\mu}_{\nu} + \Lambda g^{\mu}_{\nu} = -\frac{8\pi G}{c^4} T^{\mu}_{\nu} \quad (4)$$

da wir die räumliche Isotropie und Homogenität ja auch der Materieverteilung im Universum postuliert haben. Das heißt aber, daß $T^{\mu}_{\nu} \sim \delta^{\mu}_{\nu}$ mit demselben Vorfaktor gelten muß, da sonst eine räumliche Richtung ausgezeichnet ist. $\Rightarrow G^1_1 = G^2_2 = G^3_3$

$$(3) \Rightarrow \frac{1}{2} f'' + \frac{f'}{2r} = \frac{1}{4} f'^2 + \frac{1}{r} f' \quad \text{bzw.} \quad \frac{f''}{f'} - \frac{1}{2} f' - \frac{1}{r} = 0$$

$$\Rightarrow f' = a \cdot r \cdot e^{\pm \frac{1}{2} f} \quad \text{bzw.} \quad e^{-\frac{1}{2} f} f' = ar$$

$$\Rightarrow \boxed{e^{\frac{1}{2} f} = \frac{1}{b^2} \left(1 - \frac{a}{4b} r^2 \right)^{-2}} \quad (5)$$

Berechnen wir mit

$$\left| \frac{b}{a} \right| \equiv r_0^2$$

$$k \equiv -\operatorname{sgn} \left(\frac{a}{b} \right) = \begin{cases} 0 & \text{für } a=0 \\ \pm 1 & \text{für } |a| \neq 0 \end{cases}$$

und absorbieren b in die Definition des Radialkoordinat r , so findet man schließlich die Standardform des sog. Robertson-Walken-Metriks:

$$ds^2 = (dx^0)^2 - e^{g(t)} \frac{d\omega^2}{\left(1 + \frac{k}{4} \frac{r^2}{r_0^2}\right)^2}$$

$$G^1_1 = G^2_2 = G^3_3 = a^2 e^{-g(t)} = \frac{3}{4} r^2 \quad (6)$$

hängt nur von der Zeit t_0 ab!
 $\Gamma^i_{00} = 0$; i.e. man ist immer im Mittelpunkt des Bezugssystems, i.e. lokal in Ruhe?

\Rightarrow universelles Inertialsystem,
 keine (lokale) Materieverteilung.

andere Darstellungsmöglichkeiten:

1) dimensionslose Radialkoordinaten $u = \frac{r}{r_0}$

Schreibweise: $R(t) = r_0 e^{\frac{1}{2}g(t)}$

$$\Rightarrow ds^2 = c^2 dt^2 - R(t)^2 \frac{du^2 + u^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2)}{\left(1 + k \frac{u^2}{4}\right)^2} \quad (17)$$

2) $k=1$

$$\frac{du}{1 + \frac{u^2}{4}} = d\left(2 \arctan \frac{u}{2}\right)$$

$k=-1$

$$\frac{du}{1 - \frac{u^2}{4}} = d\left(2 \operatorname{Arctanh} \frac{u}{2}\right)$$

$$\Rightarrow k = \begin{cases} +1 & : u = 2 \tan \frac{\chi}{2}, \quad \frac{u}{1 + \frac{u^2}{4}} = \sin \chi \\ 0 & : u = \chi \\ -1 & : u = 2 \tanh \frac{\chi}{2}, \quad \frac{u}{1 - \frac{u^2}{4}} = \sinh \chi \end{cases}$$

$$\Rightarrow ds^2 = c^2 dt^2 - R(t)^2 \left[dx^2 + S(x)^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2) \right] \quad (18)$$

wobei

$$S(x) = \begin{cases} \sin x & (k=1) \\ x & (k=0) \\ \sinh x & (k=-1) \end{cases}$$

Man erkennt, daß für $k=1$ das räumliche Anteil des Linienelements nichts anderes als die Verallgemeinerung des Längenelements auf einer Kugeloberfläche ("Balloon") für eine n -dim. Kugel darstellt (dies läßt sich auch explizit für ein 2-dim. und ein 3-dim. Hypersphären zeigen):

$d=2$: Kreislinie $dl^2 = R^2 d\theta^2$

$d=3$: Kugelsphäre $dl^2 = R^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2)$ ist ein Winkel...?

$d=4$: Hypersphäre $dl^2 = R^2 (dx^2 + \sin^2 x (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2))$
 \uparrow Krümmungsradius der Hypersphäre. \sim geschlossene...

Für $k=0$ ist offenbar das Linienelement eines unendlich ausgedehnten Euklidischen Raumes. (vgl. 5)

Für $k=-1$ ist keine so anschauliche Deutung möglich; die Geometrie läßt sich nicht in den vierdim. euklid. Raum einbetten. Diese Geometrie wurde von Bolyai und Gauss als erste nicht euklid. Geometrie konstruiert! (Erinnerung: konstante, positive Krümmung)

Die kosmologische Rotverschiebung

Wir wollen im Folgenden skizzieren, daß die Robertson-Walker-Metrik eine Rotverschiebung des von entfernten Quellen stammenden Lichtes vorhersagt ("expandierendes Universum").

Quellen Q (Quelle) und B befinden sich an fest Koordinatenpunkten x_B^i, x_Q^i ?
 $\Rightarrow \int_{t_B}^{t_Q} \frac{cdt}{R(t)} = \int_{r_B}^{r_Q} |dl| = l$ (dimensionlos) (9)
physikalischer Abstand $dl = R(t) dr$
Zeitintervall $dt \geq 0$
 $\frac{1}{R} \frac{dR}{dt} = \frac{\dot{R}}{R} = H$

Um die Frequenzänderung festzustellen, betrachte wir die um eine Schwingungsperiode spätere emittierte Strahlung, $\Delta t_Q = \frac{1}{\nu_Q}$. Sie kommt am $\Delta t_B = \frac{1}{\nu_B}$ spätere beim Beobachter an. Darüber, da "Abstand" l invariant ist (als Koordinaten sind ja dieselben) (nicht aber der physikalische Abstand $\int_{t_B}^{t_Q} \frac{cdt}{R(t)}$), muß Redshift

$$\int_{t_B}^{t_B+\Delta t_B} \frac{cdt}{R(t)} = \int_{t_Q}^{t_Q+\Delta t_Q} \frac{cdt}{R(t)} = l$$

$$\Rightarrow 0 = \int_{t_B}^{t_B+\Delta t_B} \frac{cdt}{R(t)} - \int_{t_Q}^{t_Q+\Delta t_Q} \frac{cdt}{R(t)} = \frac{c}{\nu_B R(t_B)} - \frac{c}{\nu_Q R(t_Q)}$$

$$\Rightarrow \left| \frac{\nu_B}{\nu_Q} = \frac{R(t_Q)}{R(t_B)} < 1 \right|, \text{ falls } R(t_Q) < R(t_B), \text{ also, da } t_B > t_Q \text{ für ein expandierendes Universum}$$

\Rightarrow Rotverschiebung der Spektrallinien (exp. beobachtet)
 (Bei Kontraktion hätte wir eine Blauverschiebung = - -)

Man gibt das Ausmaß der Verschiebung üblicherweise als relative Änderung der Wellenlänge (5)

$$z = \frac{\Delta \lambda}{\lambda_a} = \frac{\lambda_B - \lambda_a}{\lambda_a} = \frac{R_B}{R_a} - 1 \quad (10)$$

Experimentell hat man bei Quasaren Werte bis zu $z=2$ gefunden, was $R_B > 3R_a$ bedeutet.

Nehmen wir nun an, daß die Rotverschiebung kosmologische Ursache hat, so ist dies ein Beweis für die Expansion des Universums. Alternative Erklärung wäre Dopplerverschiebung

schon aus, denn eine ^{weitere} Blauverschiebung beobachtet wurde. Auch ist eine gravitative Rotverschiebung keine Erklärung, ($\ddot{r} < 3\dot{r}$ gibt es keine stabile Bahn $\dot{r}(r=R_0) = \left(\frac{GM}{r^3} - \frac{v^2}{r}\right)^{1/2} \approx 0,225 \text{ sec}^{-1}$)

Wir wollen nun zeigen, daß die Rotverschiebung z in erster Näherung linear mit dem (kosmologischen) "Abstand" l zunimmt:

$$\frac{1}{R(t)} \approx \frac{1}{R_0} - \frac{R_0'}{R_0^2} (t-t_0) - \left(\frac{R_0''}{R_0^3} - \frac{R_0'^2}{2R_0^2}\right) (t-t_0)^2 + \dots$$

$$\Rightarrow l = \frac{c(t_B - t_a)}{R_B} + \frac{c R_0' (t_B - t_a)^2}{2R_0^2} + \dots$$

$$\Rightarrow z = \frac{R_B}{R_a} - 1 \approx \frac{R_0'}{R_B} (t_B - t_a) + \left(\frac{R_0''}{R_0^3} - \frac{R_0'^2}{2R_0^2}\right) (t_B - t_a)^2$$

$$\Rightarrow \left[z = \frac{R_0'}{c} l + \left(\frac{R_0''}{R_0^3} - \frac{R_0'^2}{2R_0^2}\right) \frac{l^2}{2c^2} \right] \sim l \quad (12)$$

Wenn wir (12) nach dem ersten Term ableiten, erhalten wir gerade das Habblsche Gesetz, da der physikalische Abstand in niedrigster Näherung gegeben ist

$$L = R_B l$$

Leitet und dividiert

← Habblsche Konstante

$$z \approx \frac{R_0'}{c R_B} L + \dots = \frac{H_0}{c} L \quad (13)$$

$$H_0^{-1} \approx 2 \cdot 10^{10} \text{ Jahre} = 6 \cdot 10^{17} \text{ sec}$$

Das physikalische Abstand z. B. zwischen Galaxien wächst mit der Zeit, da

$$L = R(t) \cdot l$$

$$\Rightarrow v = \frac{dL}{dt} = \frac{R'(t)}{R(t)} L \Rightarrow z \equiv \frac{v}{c} \quad (\text{Dopplersches Gesetz von einer orientierten Bewegung})$$

Die Robertson-Walker-Metrik erklärt also die systematische Rotverschiebung der Galaxien und verknüpft sie mit der Expansionsgeschwindigkeit des Weltalls. Die Hubble-Zeit $T = \frac{R_B}{R_B'} = \frac{1}{H_0} \approx 2 \cdot 10^{10} \text{ Jahre}$ ist ein "grobes Maß für" das Alter des Universums.

(Ursprünglich bestimmte Hubble die Konstante H_0 etwa an einem Faktor 5-10 zu groß)

- Problematik der Entfernungsmessungen (wird nicht eingegangen).

$$H_0 = (75 \pm 25) \text{ km / s. Mpc}$$

Man kann auch (13) in 2-ter Näherung entwickeln:

$$z = \frac{1}{c} H_0 \cdot L + \frac{1}{2c^2} H_0^2 (1+q_0) L^2 + \dots \quad (14)$$

wobei

$$q_0 = - \frac{R_B'' R_B}{R_B'^2}$$

Die Abweichung von einem linearen Expansionsgesetz ergibt (da $R_B'' \neq 0$)

Man bezeichnet q_0 auch als Verzögerungsparameter, denn für $q_0 > 0$ ($R_B'' < 0$) nimmt die Expansionsgeschwindigkeit $R_B'(t)$ ab, während sie für $q_0 < 0$ zunehmen würde.

Exp.: $0 \lesssim q_0 \lesssim 2$

Die Friedmann-Gleichungen

$k = \begin{cases} +1, & \text{Weltall geschlossen} \\ 0, -1, & \text{Weltall offen} \end{cases}$
 durch Beobachtung

$R(t) \dots$

↑ E Gleichung \rightarrow Materie und Druckwirkung T^M_{ij}

$T^M_{ij} = \begin{pmatrix} \rho c^2 & & & \\ & -P & & \\ & & -P & \\ & & & -P \end{pmatrix}$, heute: $P = \frac{1}{3} \rho \langle v^2 \rangle \ll \rho c^2 \leftarrow$ materie dominiert

früher: $P \sim \frac{1}{3} \rho c^2$ (altmod. Kosmologie, Strahlung dominiert)

1), (7)

\Rightarrow $E G: G^0_0 + \Lambda = -\frac{3k}{R(t)^2} - \frac{3R'(t)^2}{R(t)^2 c^2} + \Lambda = -\frac{8\pi G}{c^4} T^0_0 = -\frac{8\pi G}{c^4} \rho$ (15a)

$G^1_1 + \Lambda = -\frac{k}{R(t)^2} - \frac{R'(t)^2}{R(t)^2 c^2} - \frac{2R''(t)}{R(t)c^2} + \Lambda = \frac{8\pi G}{c^4} P$ (15b)

15a - 15b

$\Rightarrow \frac{k c^2 + R'(t)^2}{R(t)^2} - R(t) R''(t) = \frac{4\pi G}{c^2} (\rho c^2 + P)$ (16a)

15a - 15c

$\Rightarrow \frac{3R''}{R} - \Lambda c^2 = -\frac{4\pi G}{c^2} (\rho c^2 + 3P)$ (16b)

- Friedmann-Gleichungen (1922)

Sie bilden die Grundlage für die expandierende Weltmodelle.

In diesem folgt noch einige Umformungen der folgende Zusammenhänge:

$\left(-\frac{d}{dt} (\rho R^3) + \frac{P}{c^2} \frac{d}{dt} (R^3) \right) = 0$ (17)

in Blick auf die Robertson-Walker-Metrik zeigt, daß das Volumenelement des 3-dim Raumes mit bewegte Koordinatensystem u, θ, ϕ durch $dV = R(t)^3 \frac{u^2 \sin \theta}{(1+k r^2)^{3/2}} du d\theta d\phi$ ← "koordinatenvolumen"
 mit gilt dann ähnelt sich nicht, wie wir gewohnt haben

$\frac{d}{dt} (\rho c^2 V) + P \frac{dV}{dt} = \frac{dE}{dt} + P \frac{dV}{dt} = 0 \equiv T \frac{dS}{dt}$ ← Temperatur Entropie (dE = -pdV + Tds)

Das impliziert isentrope Expansion (was nicht verwunderlich ist, da ja $T_{\mu\nu}$ aus der idealen hydrodynamik konstruiert war, die ja selbstverständlich isentrope Bewegung impliziert - keine Reibung etc.)

Beispiele: 1.) $P(\rho) = \alpha \rho c^2$
 $\Rightarrow R \sim \rho^{-\frac{1}{3(1+k)}} \text{ bzw. } R^{3(1+k)} \rho = \text{const}$

2.) Falls $\alpha \equiv 0$ oder $\alpha \neq 0$, dann $[R^3 \cdot \rho = \text{const}]$, also etwa im heutigen Stadium des Universums.

Bemerkungen: Aus $P(\rho)$ lässt sich die FG (16) lösen, wenn man alle Anfangsbedingungen z.B. $R(t_B)$ und $R'(t_B)$, also $R(t_B)$ und $H_0 = H_0(t_B) = \frac{R'(t_B)}{R(t_B)}$, weiß.
 Ein durch die FG beschriebenes Weltmodell ist also bestimmt durch

- (a) den geometrischen Parameter $k = +1, 0, -1$;
- (b) die kosmologische Konstante Λ ;
- (c) die EOS $P(\rho)$;
- (d) $R(t_B), H_0(t_B)$

} gewisse Vielfalt...

Friedmannsche Weltmodelle

$\Lambda \equiv 0, P \equiv \alpha \rho \Rightarrow R^{3(1+k)} \rho = \text{const} = \rho_0 R_0^{3(1+k)}$ ← heutige Dichte
 $\Rightarrow R^{12} + kc^2 \left(\frac{1}{3} \Lambda c^2 R^2 \right) = \frac{8\pi G}{3} \rho R^2 = \frac{8\pi G}{3} \rho_0 R_0^{3(1+k)} R^{-(1+3k)}$ (17)

Betrachten wir im weiteren den Fall $\Lambda \equiv 0$ und die heutige Situation, wo die Dichte $P(\rho)$ vernachlässigbar klein ist ($\alpha \approx 0$), so folgt

$R^{12} + kc^2 = \frac{8\pi G}{3} \rho_0 R_0^3 \frac{1}{R}$ (18)

Das Ausdruck

$D_0 \equiv \frac{2G}{c^2} \frac{4\pi}{3} \rho_0 R_0^3 \equiv \frac{2GM_0}{c^2}$

steht so etwas wie dem "Schwarzschildradius" des Universums da, wobei also zu beachten ist, daß M_0 nicht die exakte Masse des Universums darstellt, als Radius $R(t)$ nicht den Radius einer Kugel etwa entspricht (Für $k=0, -1$ ist ja das Universum schließlich unendlich ausgedehnt).

Damit lautet (15)

$R^{12} = \left(\frac{D_0}{R} - k \right) c^2$ radialer (20)

und entspricht formal der (nichtrel.) Bewegungsgleichung einer Masse m im Schwarzschild eines "Himmelskörpers" der Masse M_0 , i.e. $\frac{1}{2} m \dot{r}^2 - \frac{GMm}{r} = E = \text{const} \equiv -mkc^2$

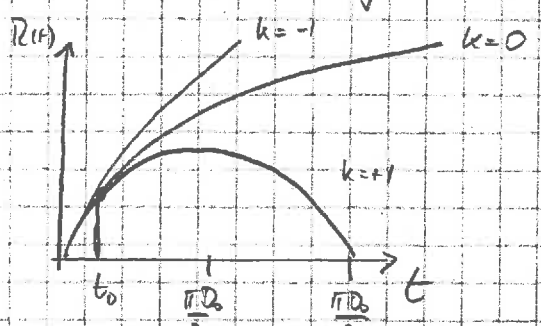
Drei Fälle sind zu unterscheiden (a) $E < 0 \Leftrightarrow k = +1$: die Bahn des "Himmelskörpers" ist geschlossen; (b) $E > 0 \Leftrightarrow k = -1$, die Probenmasse kann dem Himmelskörper entweichen; (c) $E = 0 \Leftrightarrow k = 0$: der Grenzfall, in dem die Geschwindigkeit sich dem Grenzwert Null nähert.

Konkret findet man:

(a) $k = +1$; $R(t) = D_0 \sin^2 \tau(t) = \frac{D_0}{2} (1 - \cos 2\tau)$ mit $ct = \frac{D_0}{2} (2\tau - \sin 2\tau)$
 $R(t)$ verschwindet für $\tau = 0$ ($t = 0$) und $\tau = \pi$ ($t = \frac{\pi D_0}{c}$) \rightarrow Parametrisierung eines zyklischen
 Bei $t = \frac{\pi D_0}{2c}$ erreicht R sein Maximum $R = D_0$. Für $t \ll \frac{\pi D_0}{2c}$ gilt $R(t) \sim t^{\frac{2}{3}}$

(b) $k = -1$; $R(t) = D_0 \sinh^2 \tau(t) = \frac{D_0}{2} (\cosh 2\tau - 1)$ mit $ct = \frac{D_0}{2} (\sinh 2\tau - 2\tau)$
 $t \rightarrow 0$: $R \rightarrow 0$
 $t \rightarrow \infty$: $R(t) \approx ct$, d.h. der Krümmungsradius wächst mit Lichtgeschwindigkeit c .

(c) $k = 0$: $R(t) = \left(\frac{3}{2} c \sqrt{D_0}\right)^{\frac{2}{3}} (t - t_0)^{\frac{2}{3}}$



Gültigkeit basiert nicht aufgenau, nur in der Nähe von t_0 !

Der Wert (?) von k unseres Universums läßt sich in Prinzip aufgrund von Beobachtungen erfordern ($\rho_{obs} \neq 0$), denn aus (13a) folgt auch sofort mit $H_0 = \frac{R'}{R}$

$$\text{const. } k = \frac{R_0^2}{c^2} \left(\frac{8\pi G}{3} \rho_0 - H_0^2 \right)$$

↑ Beobachtbar ...

Da k nur die Werte $0, +1, -1$ annehmen kann, inkonsistent mit dem zweiten? Bereiche

$$\rho_0^{krit} = \frac{3}{8\pi G} H_0^2 \quad H_0 = 75 \pm 25 \frac{\text{km}}{\text{Mpc}} \quad \rho_0 \approx (1.1 \pm 0.4) \cdot 10^{-29} \frac{\text{g}}{\text{cm}^3} \quad (21)$$

die sog. krit. Dichte aus heutige Zeit ($\rho^{krit} \sim H^2 \sim H^2(t)$), so könnte man sagen, daß falls

- $\rho(t_{heut}) > \rho_0^{krit} \Rightarrow k = +1$, Universum geschlossen
- " $= \rho_0^{krit} \Rightarrow k = 0$; " asymptotisch flach
- " $< \rho_0^{krit} \Rightarrow k = -1$, Univ. offen.

Die heutige beobachtbare, d.h. heißt sichtbare Materie, liefert eine Wert von

$$\rho_0^{lum.} \sim 3 \cdot 10^{-31} \frac{\text{g}}{\text{cm}^3} \quad (\Rightarrow \text{Univ. offe?})$$

also etwa eine gute Größenordnung zu klein.

(Dark matter, $\rho \equiv \rho_{krit} \dots$)

Equations (15.3.1) and

$$\left(\frac{R}{R_0} \right) \left[1 - 2q_0 + \frac{2q_0}{x} \right]^{-1/2} dx \quad (15.3.3)$$

The solution may in general be expressed as a formula for t in terms of R :

$$t = \frac{1}{H_0} \int_0^{R/R_0} \left[1 - 2q_0 + \frac{2q_0}{x} \right]^{-1/2} dx \quad (15.3.4)$$

with $t = 0$ defined as the time when $R \ll R_0$. In particular, the present age of the universe is

$$t_0 = \frac{1}{H_0} \int_0^1 \left[1 - 2q_0 + \frac{2q_0}{x} \right]^{-1/2} dx \quad (15.3.5)$$

For any positive q_0 , the age of the universe must be less than the Hubble time,

$$t_0 < \frac{1}{H_0} \quad (15.3.6)$$

as already remarked in Section 15.1.

The behavior of the result (15.3.4) may conveniently be discussed under three special cases (see Figure 15.1):

(A) $q_0 > \frac{1}{2}$ ($k = +1, \rho_0 > \rho_c$). It is convenient here to define a *development angle* θ by

$$1 - \cos \theta = \left(\frac{2q_0 - 1}{q_0} \right) \frac{R(t)}{R_0} \quad (15.3.7)$$

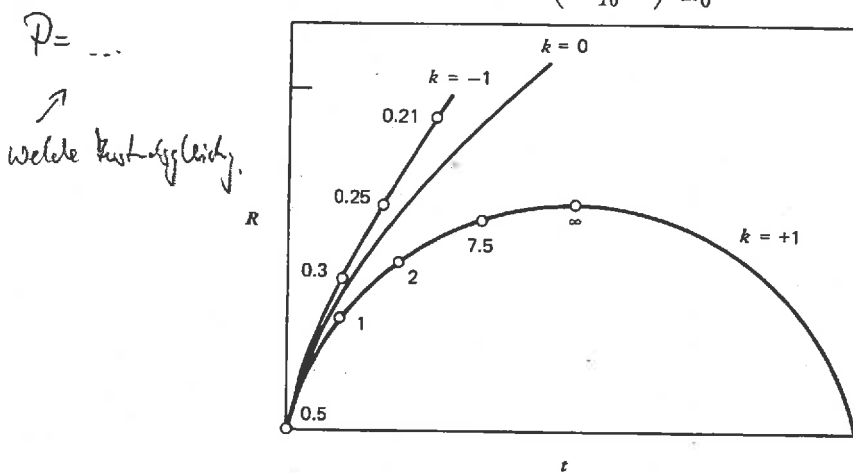


Figure 15.1 Solutions of Einstein's equations for a Robertson-Walker universe with curvature $k = +1, k = 0$, and $k = -1$. The numbers along the curves $k = \pm 1$ give the values of the deceleration parameter q_0 at various epochs.

Das der Fall ist aber auch für fast alle Zustandsgleichungen sehr ähnlich ist, liegt nahe. In der Tat findet man so für die Fall eines xl. Zustandsgleichung (Photonengas u. therm. Neutronengas, etc...)

$$P(\rho) = \frac{1}{3} \rho c^2 \text{ das (18)}$$

$$D^2 + kc^2 = \frac{D_0 \rho_0 c^2}{R^2}$$

mit einer ganz analogen, intuitiven Interpretation des Energiesatzes mit einem eff. Potential $\sim \frac{1}{R^2}$.

Man findet die kompakte Lösung

$$R(t) = \sqrt{c^2 t^2 (2 \sqrt{D_0 \rho_0} - kct)} \sim t^{\frac{2}{3}} \quad (22)$$

die wieder genau analoge (aber etwas modifizierte) Situation entspricht.

Die "Realität" der Zustandsgleichung irgendwo zwischen $P = \frac{1}{3} \rho c^2$ und $P = 0$ liegt, ist die Situation semispher. vgl. Standardmodell des Universums ...

Lösungen der Friedmann-Gleichungen für $\Lambda = 0$ beginnen immer mit einer Singularität, bei der $R(t \text{ Entz.}) = 0$ ist (Urknall = Big Bang). Für $k = +1$ fällt das Universum immer wieder in sich zusammen, während für $k = 0, -1$ die Expansion kein Ende findet.

(Genauer: P. Penrose zeigte 1965 in einer bahnbrechenden Arbeit, daß für $\Delta \leq 0$ unter einigen sehr allgem. Annahmen eine kosmologische Anfangssingularität bei Vernachlässigung von Quanteneffekten eine unvermeidliche generische Konsequenz des EG ist.)

$\Lambda \neq 0$: Stationäre Weltmodelle sind möglich, wie aus (16a) und (16b) folgt

$$\left. \begin{aligned} \frac{kc^2}{\rho_0^2} &= \frac{4\pi b}{c^2} (\rho c^2 + P) > 0 \\ \Delta c^2 &= \frac{4\pi b}{c^2} (\rho c^2 - 3P) > 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow k = +1, \Delta > 0$$

↳ Nullpunktsenergie hält "kollektives" ($k = +1$) Universum stabil zusammen.

Also: stat. Universum ist nicht stabil gegenüber kleinen (Dichte-)Fluktuationen, i.e. (Instabilität)

$$\delta R(t) \sim A e^{ct/\tau} + B e^{-ct/\tau}$$

Solche exponentiell anwachsende Lösung bezeichnet man als die Sitter-Lösung.

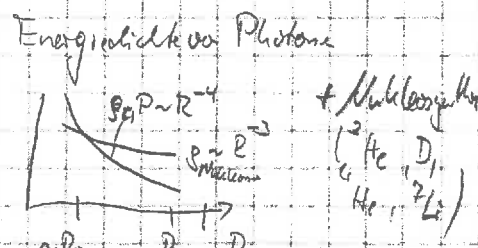
Sie spielen eine grundlegende Rolle in inflationären Universen, in die eine exponentielle Phase benötigt wird, um die Ergebnishorizont aufzuheben, so daß das gesamte Universum in Kontakt ist. $\Lambda \neq 0$ wird dann explizit aus QFT (skalare Theorie, Higgs-Mechanismus) bestimmt.

Das Standardmodell des Universums

Idee: Beschreibe verschiedene Epochen der Expansion (quasistatisch) mittels relevanter, thermodynamischer Physik der jeweiligen Phase (Elementarteilchenphysik, Nucleosynthese, Elementbildung)
 Die beobachtete 3K-Hintergrundstrahlung ist das Überbleibsel aus einer frühen Phase des Universums (und vollständig isotrop) $\rightarrow \frac{\Delta T}{T} \sim 10^{-4}$

(a) $t \sim 10^{10}$ Jahre; Universum ist materie dominiert, d.h. $\rho c^2 \gg P$, ρ in versch. Nucleonen.
 $\rho c^2 \sim R^{-3}(t)$; $P \sim T^4$; $T(t) \sim \frac{1}{R}$; $T_0 \approx 2.7$ K

(b) $t \sim 10^6$ Jahre; das Universum war etwa 1000 mal kleiner als heute, und Nucleonen war etwa gleich groß \rightarrow heute \rightarrow Strahlung dominiert
 Überhalb von $T = 4000$ K war das Wasserstoffgas im Universum weitgehend ionisiert und als Kosmos aus H^+ , e^- , γ -Plasma im thermischen Gleichgewicht



(c) $t \approx 10^5$ s; $T \sim 10^9$ K ($kT \sim 10^5$ eV), Heliumkerne durchdringen
 Protonen und Neutronen noch frei

(d) $t \approx 4$ s; $T \approx 5 \cdot 10^9$ K, $\gamma \leftrightarrow e^+e^-$, p, n, e^+, e^-, γ und ν im therm. Gleichgewicht
 \rightarrow Standardmodell

(e) $t \approx 0.01$ s; $T > 10^{10}$ K, $kT \sim 10$ MeV, $n_p = n_n$, schwache Wechselwirkung
 (später $n_p = n_n \approx 1$)

(f) $T > 10^{12}$ K, μ -Paare, Pionen

(h) $T > 2 \cdot 10^{12}$ K; QGP

(...) Divergenz elektroschwache Theorie, Symmetrie restoration, String Theorie, Quantengravitation -- Nichterhaltung der Baryonenzahl

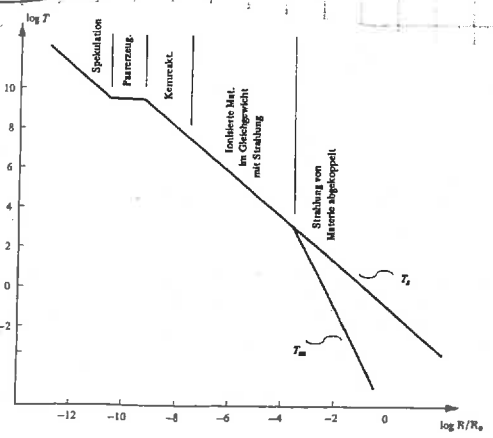


Fig. 23: Thermische Geschichte des Universums

Probleme des Standardmodells

1.) Ereignishorizont - Horizontproblem

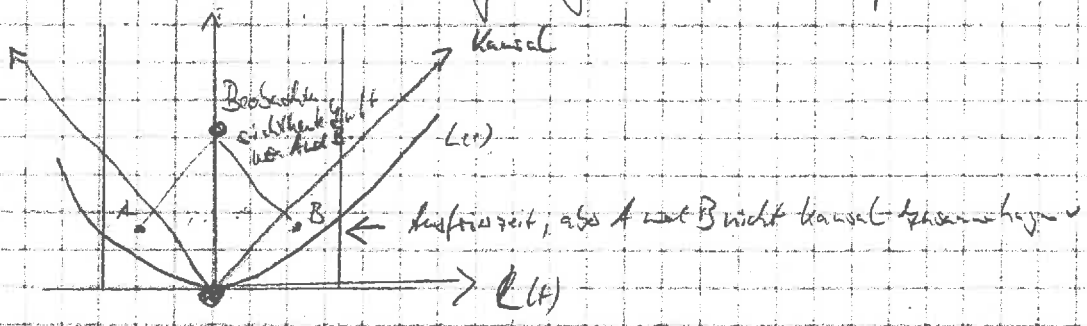
! Punkte können nicht kausal verknüpft sein.

Nach (5) kann es möglich sein, daß es "Abstände" l gibt, die nicht (9) genügen, i.e.

$c > \int_{t_0}^{t_1} \frac{cdt}{R(t)} \stackrel{!}{=} l_{max}$. Dies hängt anschaulich damit zusammen, daß sich $R(t)$ schneller als mit Lichtgeschwindigkeit expandieren kann, i.e. $\dot{R}(t) > c$.

Man findet je $R(t) \sim t^{\frac{1}{2}}$ (Strahlungsdominanz), d.h. $\dot{R}(t)$ wird für hinreichend kleine Werte singulär.
 $\sim t^{\frac{2}{3}}$ (Materiedominanz)

Dies gilt insbesondere für kleine Werte. Aber warum ist dann das Universum so homogen & isotrop? Zum Zeitpunkt der Entstehung der Strahlung hatte ein großer Teil des heute sichtbaren Universums noch keine kausale Verbindung, so daß es unverständlich ist, wie die auslösenden Teile des Universums stammende Strahlung das gleiche Spektrum aufweist.



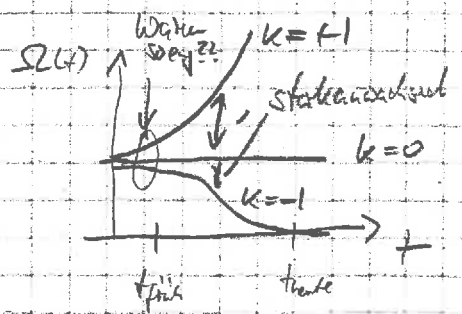
2.) Kritische Dichte - Flatness problem

$$\rho_{krit} = \frac{3}{8\pi G} H(t)^2 \iff \rho(t) \Rightarrow \Omega(t) \neq \frac{\rho}{\rho_{krit}}, \quad \Omega(t_{heute}) \approx 0.05 - 0.1$$

aber: Aufgrund der Entropieerhaltung und der Entwicklung der Dichte $\rho(t)$ findet man

$$|\Omega - 1| \lesssim 4.2 \cdot 10^{-51} \frac{1}{T^2} \approx \frac{1}{T^2}$$

Sehr früh war also $\Omega \rightarrow 1$, i.e. $\rho \approx \rho_{krit}$.



=> "fine tuning" des Parameters, warum...

=> Warum ist Ω nicht dann genau 1. (Woher also dann die Rest-Materie... ??)

3.) Netto baryon dichte

(3)

heute: $10^{-8} \leq n_B/n_\gamma \leq 10^{-10}$

früher: $n_B \approx n_{\bar{B}} \approx n_\gamma$, also eigentlich doch $n_B = n_{\bar{B}}$

mögliche Erklärung: QFT & semi-klassische Gravitation
inflationäres Universum (Guth, Linde)

↳ exponentielle Epoche

löst Problem 1.) und 2.), also $Q(\text{heute}) = 1$