Prof. C. Greiner, Dr. H. van Hees **Sommersemester 2017**

Übungen zur Kosmologie – Blatt 1

Aufgabe 1: Zweikörper-Kepler-Problem

Zur Wiederholung betrachten wir das Problem zweier sich umkreisender „punktförmiger" Himmelskörper im Rahmen der Newtonschen Mechanik. Die entsprechende Langrange-Funktion lautet

$$L = \frac{m_1}{2}\dot{\vec{x}}_1^2 + \frac{m_2}{2}\dot{\vec{x}}_2^2 + \frac{K}{|\vec{x}_1 - \vec{x}_2|} \quad \text{mit} \quad K = G m_1 m_2. \tag{1}$$

(a) Aufgrund der Galilei-Invarianz der Lagrange-Funktion bietet sich die Einführung von Schwerpunkts- und Relativkoordinaten

$$\vec{R} = \frac{m_1\vec{x}_1 + m_2\vec{x}_2}{m_1 + m_2}, \quad \vec{r} = \vec{x}_1 - \vec{x}_2 \tag{2}$$

an. Zeigen Sie, daß die Lagrange-Funktion in diesen Koordinaten die Form

$$L = \frac{m_1 + m_2}{2}\dot{\vec{R}}^2 + \frac{\mu}{2}\dot{\vec{r}}^2 + \frac{K}{|\vec{r}|} \tag{3}$$

mit der reduzierten Masse $\mu = m_1 m_2/(m_1 + m_2)$ annimmmt.

(b) Leiten Sie die Bewegungsgleichungen für $\vec{R}$ und $\vec{r}$ aus den Euler-Lagrange-Gleichungen her und zeigen Sie, daß es ein Inertialsystem gibt, wo $\vec{R} = \text{const}$ ist (das Schwerpunktssystem).

(c) Zeigen Sie daß der Relativbahndrehimpuls der Relativbewegung $\vec{\ell} = \mu\vec{r} \times \dot{\vec{r}}$ erhalten ist.

(d) Wählen Sie nun das Koordinatensystem so, daß $\vec{\ell} = \ell\vec{e}_z$ ist und führen Sie via $\vec{r} = (x, y, 0) = (r\cos\varphi, r\sin\varphi, 0)$ Polarkoordinaten in die Lagrange-Funktion ein.

(e) Bestimmen Sie die Erhaltungsgrößen des verbleibenden Problems (Drehimpulsbetrag ℓ und Energie E). Erläutern Sie, daß einer der Erhaltungssätze dem 2. Keplerschen Gesetz (Flächensatz) entspricht.

(f) Bestimmen Sie eine Differentialgleichung für die Bahnform $r = r(\varphi)$, was auf das 1. Keplersche Gesetz führt, d.h. daß die Bahn eine Ellipse ist, falls die Bewegung gebunden ($E < 0$) ist. Bestimmen Sie deren Halbachsen a und b als Funktion von E und ℓ.

Hinweis: Verwenden Sie die Energieerhaltung und Drehimpulserhaltung sowie $r'(\varphi) = \dot{r}/\dot{\varphi}$ und Schreiben Sie die Energieerhaltungsgleichung als Funktion von $s = 1/r$ und s'. Nochmalige Ableitung dieser Gleichung führt zu einer sehr einfach zu lösenden DGL für $s(\varphi)$.

(g) (zum Knobeln) Bestimmen Sie die Periodendauer T der Bewegung, d.h. die Zeit, die das System benötigt, um von einem Periastron (kleinster Abstand der Körper auf ihrer Bahn) zum nächsten zu gelangen, indem Sie die Gesamtfläche der Ellipse $A = \pi a b$ mit dem 2. Keplerschen Gesetz kombinieren. Drücken Sie die Periodendauer als Funktion der großen Halbachse a der Ellipse aus und zeigen Sie, daß näherungsweise für $m_1 \gg m_2$ das 3. Keplersche Gesetz gilt, wonach für alle Planeten im Sonnensystem $T^2/a^3 = \text{const}$ gilt.

Aufgabe 2: Indirekter Nachweis von Gravitationswellen

Aus den Betrachtungen in der Vorlesung zur Strahlungsleistung von Gravitationswellen läßt sich für die Änderung der Bahnperiode eines Doppelsternsystems aufgrund der Abstrahlung von Gravitationswellen die Differentialgleichung

$$\dot{P}_b = -A\left(\frac{P_b}{2\pi}\right)^{-5/3} \tag{4}$$

herleiten. Dabei ist die Konstante A durch die Bahnparameter der Doppelsternbewegung durch

$$A = \frac{192\pi G^{5/3}}{5c^5}(1-e^2)^{-7/2}\left(1+\frac{73}{24}e^2+\frac{37}{96}e^4\right)m_p m_c (m_p+m_c)^{-1/3} \tag{5}$$

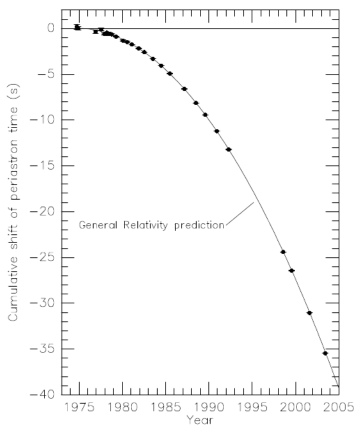
gegeben, wobei man davon ausgeht, daß die ART die korrekte Theorie der Gravitation ist[1]. Aus genauen Messungen der Zeiten der ankommenden Radiowellenimpulse lassen sich sehr genau die Bahnparameter bestimmen. Für den Hulse-Taylor-Doppelsternpulsar B1913+16 ergibt sich die numerische Exzentrizität der Bahn zu $e = 0.6171338(4)$, die Periodendauer der Bahn $P_b = 0.322997448930(4)$ d sowie die Massen $m_p = (1.4414 \pm 0.0002)M_\odot$ und $m_c = (1.3867 \pm 0.0002)M_\odot$.

(a) Berechnen Sie $\dot{P}_b$ aus den angegebenen Parametern (mit $G = 6.67408(31) \cdot 10^{-11} \mathrm{m}^3/\mathrm{kg\,s}$ und $M_\odot = 1.98892(25) \cdot 10^{30}$ kg).

(b) Die sog. Periastronepoche, also die integrierte Abweichung der Zeiten für den Periastrondurchgang von einer konstanten Periode ist durch

$$\Delta E = t - P_{b0}\int_0^t \mathrm{d}t' \frac{1}{P_b(t')} \tag{6}$$

gegeben. Diese Größe wurde über den Verlauf von 30a ebenfalls sehr genau gemessen. Ziehen Sie die entsprechende berühmte Abbildung unten nach, indem Sie (6) näherungsweise ausrechnen, indem Sie den Integranden bis zur linearen Ordnung in t' entwickeln und die oben angegebenen Werte einsetzen.



Periastronepoche als Funktion der Zeit. Abbildung aus J. M. Weisberg, J. H. Taylor, Binary Radio Pulsars, ASP Conference Series **328**, 25 (2005).

Bemerkung: Für diejenigen, die das erhaltene Resultat selber in einem Plot mit den Daten vergleichen wollen, habe ich die Daten aus dem obigen Plot extrahiert. Sie können von der Vorlesungswebseite heruntergeladen werden.

Homepage zu Vorlesung und Übungen:
`http://fias.uni-frankfurt.de/~hees/cosmo-SS17/`

[1] J. M. Weisberg, J. H. Taylor, The Relativistic Binary Pulsar B1913+16: Thirty Years of Observations and Analysis, ASP Conference Series **328**, 25 (2005), [arXiv:astro-ph/0407149].