Prof. C. Greiner, Dr. H. van Hees **Sommersemester 2017**

Übungen zur Kosmologie – Blatt 3

Aufgabe 6: Längenelement auf der Hypersphäre S_3 und der Pseudosphäre

(a) Die Hypersphäre S_3 im vierdimensionalen Euklidischen Raum ist durch die Gleichung

$$R^2 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 \tag{1}$$

definiert. Zeigen Sie, daß sich das Längenelement einer Kurve auf der Hypersphäre durch

$$\mathrm{d}l^2 = \frac{R^2 \mathrm{d}\rho^2}{R^2 - \rho^2} + \rho^2 \left(\mathrm{d}\Theta^2 + \sin^2\Theta\, \mathrm{d}\phi^2\right) \tag{2}$$

darstellen läßt. Dabei ist R der Radius der Hypersphäre, und (ρ, Θ, ϕ) sind die üblichen dreidimensionalen Kugelkoordinaten.

(b) Wiederholen Sie die Aufgabe mit der „Pseudosphäre" (dreidimensionales Hyper-Hyperboloid), die durch

$$x_0^2 - (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2) = R^2 \tag{3}$$

gegeben ist.

Zeigen Sie, daß sich dann das Linienelement der Hyperfläche konstanter negativer Krümmung ergibt, wenn man sich diese Pseudosphäre in den flachen Minkowski-Raum mit der Pseudometrik

$$\eta_{\mu\nu} \mathrm{d}x^\mu \mathrm{d}x^\nu = (\mathrm{d}x^0)^2 - (\mathrm{d}x^1)^2 - (\mathrm{d}x^2)^2 - (\mathrm{d}x^3)^2 \tag{4}$$

eingebettet denkt.

Aufgabe 7: Scheinbare Helligkeit jenseits des linearen Hubble-Gesetzes

Der gemessene Strahlungsfluß F eines entfernten Objekts ergibt sich über

$$F = \frac{L}{4\pi D^2 (1+z)^2}. \tag{5}$$

Dabei ist L die Leuchtkraft zum Zeitpunkt der Emission, und D ist die heutige Entfernung zur Quelle. Die Energie der Photonen ist dabei um $(1+z)$ rotverschoben, und der Abstand zwischen dem Eintreffen der einzelnen Photonen ist durch die Expansion des Raumes um $(1+z)$ erhöht, womit sich der Faktor $(1+z)^{-2}$ erklärt.

Die scheinbare Helligkeit m ist nun (bis auf Konstanten) definiert durch

$$m = \mathrm{const} - 2{,}5 \log(F). \tag{6}$$

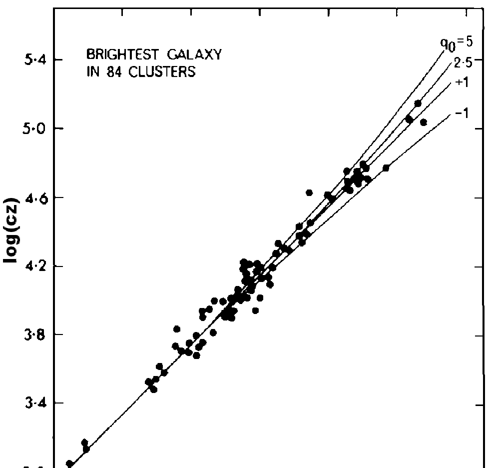

Abbildung 1: Galaxien-Hubble-Diagramm aus Sandage, 1972

Für kleine Rotverschiebungen gilt nun (wie in der Vorlesung gezeigt)

$$D \approx \frac{c}{H_0}\left[z - \frac{1}{2}(1+q_0)z^2 + \cdots\right], \tag{7}$$

wobei q_0 der Abbremsparameter ist.
Zeigen Sie, daß für kleine z die Relation

$$\begin{aligned} m \approx \mathrm{const} - 2{,}5 \log\left(\frac{LH_0^2}{c^2}\right) + 5\log(z) \\ + \frac{2{,}5z}{\ln(10)}(1-q_0) \end{aligned} \tag{8}$$

erfüllt ist.
In Abbildung 1 sieht man ein Galaxien-Hubble-Diagramm (aus Sandage, 1972), in dem die Abhängigkeit der scheinbaren Helligkeit von q_0 ersichtlich wird. Bis vor etwa 10 Jahren war man davon überzeugt, daß q_0 positiv sein sollte (die Beobachtungen waren wenig aussagekräftig, wie man anhand des Plots erkennt) und die Expansion des Universums sich somit verlangsamt. Neuere Beobachtungen anhand von Supernovae des Typs Ia bei höheren Rotverschiebungen scheinen aber auf das Gegenteil hinzudeuten, also ein negatives q_0 und somit eine beschleunigte Expansion des Universums.
Einen recht aktuellen Preprint zu dem Thema finden Sie hier:

http://arxiv.org/abs/1506.01354

Beachten Sie, daß hier in Fig. 3 die Achsen gegenüber unserer Abb. 1 vertauscht sind.