

Die Wellengleichung



*

GERNOT PFANNER

* Zeitentwicklung eines Wellenpaketes [vgl. *Visual quantum mechanics*, THALLER, (2000)]

Inhaltsverzeichnis

1 Die Verallgemeinerung aus der Schwingungsgleichung	4
1.1 Anmerkungen zur Schwingungsgleichung	4
1.2 Die Erweiterung zur Wellengleichung	4
2 Das mathematische Modell	8
2.1 Die Raum-Zeit-Struktur der Physik	8
2.2 Die Charakteristikengleichung	9
2.3 Anfangs- und Randwertproblem	11
2.4 Analytisch exakte Lösungsverfahren	13
2.4.1 Integraldarstellung (Fourier-/Laplace-Transformation)	13
2.4.2 Separation der Variablen	15
2.4.3 Lineare-, nichtlineare- & stehende Wellen	18
2.4.4 Lösung der inhomogenen Wellengleichung	20
2.5 Die allgemeine Lösung	22
2.5.1 Wellenpakete	22
2.5.2 Die Verallgemeinerung auf mehrere Dimensionen	24
2.6 Ergänzende Tabellen	26
3 Das physikalische Modell	30
3.1 Grundlegendes	30
3.1.1 Die Kenngrößen einer Welle	30
3.1.2 Die Einteilung in transversal/longitudinal	31
3.1.3 Die physikalischen Charakteristika von Wellen	32
3.1.4 Beispiele für Wellen	34
3.2 Der Vergleich zwischen Wellen und Diffusionen	34
3.3 Die abstrakten Wellen der Quantenmechanik	36
3.3.1 Die Schrödinger-Gleichung	36
3.3.2 Die Klein-Gordon-Gleichung	38
3.3.3 Schrödinger-Gl in Klein-Gordon-Form & vice versa	40
4 Postscriptum	42
4.1 Weiterführende Literatur	42
4.2 Mail to author	42
4.3 Ehrentafel	42

1 Die Verallgemeinerung aus der Schwingungsgleichung

1.1 Anmerkungen zur Schwingungsgleichung

Die *Schwingungsgleichung* charakterisiert eine Kräftebilanz

$$\boxed{F_{\text{Antrieb}} = F_{\text{Ruecktrieb}}}$$

im Sinne von

$$\boxed{d_t^2 u(t) = -\lambda u(t)} \quad (1)$$

Wie im Folgenden verwenden wir dabei die Schreibkonvention $d_x^i f := \left(\frac{d}{dx}\right)^i f$.

Gleichung (1) stellt dabei nur den denkbar einfachsten Fall dar, d.h. im allgemeinen treten z.B. geschwindigkeitsabhängige Reibungskräfte auf.

Für die *Lösung* $u(x, t)$ unserer Differentialgleichung bzw. für das Fundamentalsystem kommen nur oszillatorische Exponentialfunktionen (mit *Konstanten* A, B, C, D, F, φ und $\omega^2 = \lambda$) in Frage, und zwar

$$\boxed{u(t) = Ae^{i\omega t} + Be^{-i\omega t} = C \cos(\omega t) + D \sin(\omega t) = F \cos(\omega t + \varphi)}$$

Der Zweifler möge dies bitte in unsere Differentialgleichung einsetzen.

Unser Resultat beschreibt die *harmonische, ungedämpfte Schwingung*.

$u(t)$ kann dabei sowohl reell als auch komplex sein. Dies hängt von den Vorfaktoren ab. Sind A und B z.B. reell (aber $A \neq B$), so ist $u(t)$ komplex, wohingegen für $A = B$ $u(t) \in \mathbb{R}$ ist.

Wirkt die Kraft in Bewegungsrichtung, so tritt ein positives Vorzeichen auf der rechten Seite von (1) auf, und die Exponentialfunktion wird demzufolge reell. Somit kommt der Übergang von periodischer zu exponentiell beschleunigter Bewegung dem Übergang von komplexer zu reeller Exponentialfunktion gleich.

An dieser Stelle enden wir unsere Betrachtungen zur Schwingungsgleichung mit ein paar Beispielen. Schwingungen sind sicherlich allgegenwärtig. Ob der Flügelschlag des Schmetterlings oder die Erdrotation, ob mechanischer Massenpunkt oder elektrischer (Wechsel-) Strom, ob Kontostand¹ oder Jungmänner beim Anblick einer schönen Frau²; fürwahr: (fast) alles schwingt.

1.2 Die Erweiterung zur Wellengleichung

Die Erweiterung des Schwingungskonzepts auf Wellen besteht in der Möglichkeit der räumlichen Ausbreitung. Gedanklich können wir uns vorstellen, dass die Schwingung z.B. mittels eines Karren (vgl. Abbildung 1) durch den Raum transportiert wird. Eine

¹ Idealisierung: $F_{\text{Antrieb}} = \text{Gehalt am 15.}$, $F_{\text{Ruecktrieb}} = \text{Miete am 1.}$

² $F_{\text{Antrieb}} = \text{Ihre Schönheit}$, $F_{\text{Ruecktrieb}} = \text{Der Mann an ihrer Seite}$

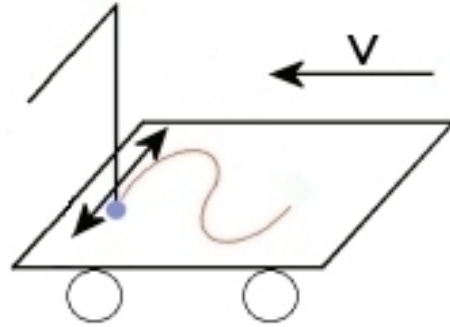
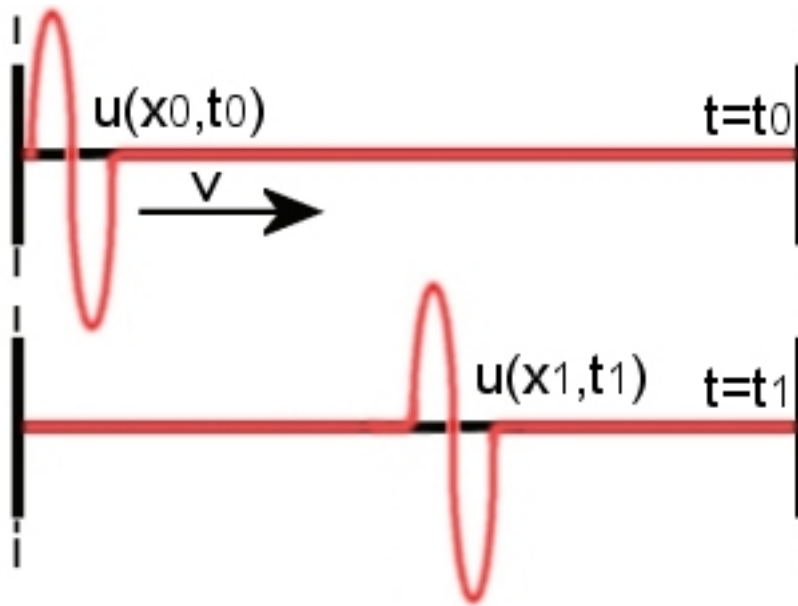


Abbildung 1: Ein Karren als Trägermedium

Abbildung 2: Ein eingespanntes Seil zu zwei Zeiten t_0 , t_1

Welle ist somit eine periodische³ Veränderung einer Größe, die in einem Medium oder im Raum stattfindet und die sich auch ausbreitet. Die Störung kann sich dabei aufgrund der Kopplung zwischen benachbarten Raumelementen fortpflanzen. Aus diesem Grunde findet in Wellen im allgemeinen kein Materietransport statt; es wird nur Energie transportiert.

Wir wollen nun die Wellengleichung heuristisch ableiten. Dazu betrachten wir eine physikalische Größe (z.B. Druck, Temperatur, mechanische Auslenkung, elektrische Feldstärke, usw.) für die eine Störung, d.h. eine Abweichung vom Gleichgewichtszustand am *Orte* x_0 zur *Zeit* t_0 auftritt. Durch die Wechselwirkung von Nachbarelementen des Mediums kann sie sich nun im Laufe der Zeit ausbreiten.

Wir stellen uns nun konkret ein eingespanntes Seil vor, welches in z -Richtung erregt

³ Im allgemeinen ist dies eine hinreichende aber nicht unbedingt notwendige Bedingung. Gegenbeispiel: "nichtlineare Wellen"

Die Wellengleichung

werde (vgl. Abbildung 2). Nehmen wir an, dass sich die Form der *Auslenkung* $u(x, t)$ nicht ändert, so gilt

$$u(x_1, t_1) = u(x_1 - vt_1, t_1 - t_1) = u(x_0, t_0)$$

bzw.

$$u(x, t) = f(x - vt) \tag{2}$$

Dies drückt nur aus, dass die Wechselwirkung zwischen den einzelnen Seilelementen so erfolgt, als dass sich die Störung geradlinig, gleichförmig ausbreitet. Punkte gleicher **Phase**⁴ (d.h. die **Wellenfront**) ändern sich also gemäß der Galilei-Transformation. Die Welle pflanzt sich dabei in positiver x -Richtung fort (vgl. Definitionen bei der Galilei-Transformation).

Da im Falle von Gleichung (2) die Wellenfronten Ebenen sind, beschreiben wir eine **ebene Welle**.

Um zu unserer Wellengleichung zu kommen, bilden wir die Ableitungen nach dem Argument $a = x - vt$

	Ableitung nach x	Ableitung nach t
1. Ableitung	$\frac{df}{da} = \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial a}$	$\frac{df}{da} = \frac{\partial u}{\partial t} \frac{\partial t}{\partial a}$
2. Ableitung	$\frac{d^2f}{da^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \frac{\partial^2 x}{\partial a^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \mathbf{1}$	$\frac{d^2f}{da^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \frac{\partial^2 t}{\partial a^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \frac{1}{v^2}$

Der Vergleich der zweiten Ableitungen ergibt die *eindimensionale Wellengleichung*

$$\boxed{\frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2}}$$

Gemäß dieser Gleichung ist die Krümmung von $u(x, t)$ an jedem Ort (und zu jedem Zeitpunkt) proportional zur Beschleunigung.

Das Ergebnis erhalten wir auch, wenn wir unser homogenes Seil durch eine Kette von Massenpunkten idealisieren, die durch Federn miteinander verbunden sind. Die *rücktreibende Kraft* ist dabei proportional zur Auslenkung von der Ruhelage des MP's, relativ zum Nachbarn

$$F_{\text{Ruecktrieb}} \propto \{[u(x, t) - u(x - \epsilon, t)] + [u(x, t) - u(x + \epsilon, t)]\}$$

Die Taylorentwicklungen für $u(x - \epsilon, t) = u(p, t)$ nach p bzw. für $u(x + \epsilon, t) = u(n, t)$ nach n führen auf

$$F_{\text{Ruecktrieb}} \propto \epsilon^2 \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2}$$

bzw. durch Vergleich mit der Kraftdefinition ($m = \text{Masse}$, $\rho = \text{Dichte}$, $l = \text{Länge}$)

$$F = m \frac{\partial u(x, t)}{\partial t^2} = \rho l \frac{\partial u(x, t)}{\partial t^2}$$

⁴ alle Punkte, die sich im gleichen Schwingungszustand befinden

gelangt man wieder zur Wellengleichung.

Die Proportionalität (sowie ρ , l) werden in der Konstante v^2 zusammengefasst.

Wie schaut die Verallgemeinerung auf den dreidimensionalen Fall aus? Die *dreidimensionale Wellengleichung* lautet

$$\Delta u(x, t) = \left(\frac{\partial^2}{\partial^2 x} + \frac{\partial^2}{\partial^2 y} + \frac{\partial^2}{\partial^2 z} \right) u(x, t) = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2}{\partial^2 t} u(x, t)$$

Gleichfalls wie bei der Schwingungsgleichung ist diese Gleichung nur als eine Art Prototyp zu verstehen; und zwar für alle linearen, sich im Raum ausbreitenden Störungen. Typische Ergänzungen wären wiederum geschwindigkeitsabhängige Reibungskräfte bzw. Kräfte, die dem System Energie im Laufe der Zeit zuführen.

Wir wissen jetzt, wie die Wellengleichung aussieht; mit ihrer Vielfalt an unterschiedlichen Lösungen wollen wir uns im folgenden Abschnitt befassen.

2 Das mathematische Modell

2.1 Die Raum-Zeit-Struktur der Physik

Zunächst schauen wir uns jedoch die Raum-Zeit-Struktur der Physik schematisch an. Die dabei auftretenden Gleichungen sind vorwiegend Differentialgleichungen. Demgemäß ist die Integral- bzw. Differentialrechnung von überragender Bedeutung für die Physik, und einer ihrer beiden Ursprünge war ja physikalischer Natur, nämlich Newton's Definition der Momentangeschwindigkeit.

Die große Bedeutung der (im allgemeinen: partiellen) Differentialgleichungen kann auch als Folgerung des Feldwirkungsstandpunktes angesehen werden, wonach sich nur benachbarte Raumelemente beeinflussen können.

Für die wichtige Klasse der **Inertialsysteme**⁵ fordern Physiker die

- Homogenität der Zeit
- Homogenität des Raumes
- Isotropie des Raumes

Diese Annahmen stehen in einem engen Zusammenhang mit der Unveränderlichkeit (Invarianz) einer bestimmten Größe. Abstrakt formuliert, führt nämlich jede Symmetrie der Lagrange-Funktion unter einer infinitesimalen Transformation zu einer Erhaltungsgröße. Auf diese Weise sind folgende Größen miteinander verknüpft:

infinitesimale Verrückung	Erhaltungsgröße
Ort	Impuls
Zeit	Energie
Drehwinkel	Drehimpuls

Nun wollen wir uns die wesentlichen Gleichungen der Physik anschauen. Tabelle 4 auf Seite 27 gibt einige grundlegende Gleichungen wieder. In Tabelle 5 auf Seite 28 sind weitere fundamentale Gleichungen angegeben, die jedoch eher eine spezifische Bedeutung haben.

Wir haben nun einige wichtige Gleichungen der Physik angeführt, ohne sie jedoch im Detail zu besprechen. Tatsächlich ging es uns nur darum, dass wir einen Eindruck von der physikalischen Raum-Zeit-Struktur bekommen haben. Offenbar wird diese von partiellen Differentialgleichungen unterschiedlicher Form geprägt.

Nun wenden wir uns der Lösung der Wellengleichung zu. Doch zuvor schauen wir uns noch die Charakteristikengleichung bzw. die Klassifikation von linearen, partiellen Differentialgleichungen zweiter Ordnung an.

⁵ Koordinatensysteme, in denen jeder Körper, auf den keine äußere Kraft wirkt, seine Geschwindigkeit nach Richtung und Betrag beibehält

2.2 Die Charakteristikengleichung

Für zwei Variable x, y lautet die allgemeine Form der partiellen Differentialgleichung zweiter Ordnung

$$\boxed{A \frac{\partial u}{\partial x^2} + 2B \frac{\partial u}{\partial x \partial y} + C \frac{\partial u}{\partial y^2} + D \frac{\partial u}{\partial x} + E \frac{\partial u}{\partial y} + Fu = 0} \quad (3)$$

Wir haben daher eine lineare Gleichung in zwei Variablen mit sechs reellen Koeffizienten. Durch eine lineare Transformation der unabhängigen Variablen kann Gleichung (3) auf eine der drei Formen gebracht werden:

Bedingung	Bezeichnung	reduzierte Form	Beispiel
$B^2 < AC$	Elliptischer Fall	$\partial_x^2 u + \partial_y^2 u + \dots = 0$	Poisson-Gleichung
$B^2 = AC$	Parabolischer Fall	$\partial_x^2 u + \dots = 0$	Diffusionsgleichung
$B^2 > AC$	Hyberbolischer Fall	$\partial_x^2 u - \partial_y^2 u + \dots = 0$	Wellengleichung

Die Bezeichnungen lehnen sich dabei an der vergleichbaren Untersuchung von Kegelschnitten in der analytischen Geometrie an.

Man kann das Problem auch durch die *Diskriminante* D formulieren. Sie wird durch $D := AC - B^2$ definiert und die einzelnen Fälle ergeben sich somit aus dem Vorzeichen von D .

Den *Hauptteil* $H := A\partial_x^2 u + 2B\partial_{xy} u + C\partial_y^2 u$ kann man (wenn A, B, C nur von x, y abhängen) durch eine allgemeine Koordinatentransformation auf Normalform bringen. Dazu setzt man mit neuen Koordinaten $(x, y) \rightarrow (\xi = \xi(x, y), \eta = \eta(x, y))$ an. Die Umkehrung $(\eta, \xi) \rightarrow (x(\eta, \xi), y(\eta, \xi))$ gelte auch. Mittels Kettenregel bzw. $U(\xi, \eta)$ folgt

$$\begin{aligned} \partial_x u &= \partial_\xi U \partial_x \xi + \partial_\eta U \partial_x \eta \Rightarrow \partial_x^2 u = (\partial_x \xi)^2 \partial_\xi^2 U + 2(\partial_x \xi)(\partial_x \eta) \partial_{\xi\eta} U + \partial_x^2 \eta \partial_\eta^2 U \\ \partial_y u &= \partial_\xi U \partial_y \xi + \partial_\eta U \partial_y \eta \Rightarrow \partial_y^2 u = (\partial_y \xi)^2 \partial_\xi^2 U + 2(\partial_y \xi)(\partial_y \eta) \partial_{\xi\eta} U + \partial_y^2 \eta \partial_\eta^2 U \\ \partial_{xy} u &= (\partial_x \xi)(\partial_y \xi) \partial_\xi^2 U + (\partial_x \xi)(\partial_y \eta) \partial_{\xi\eta} U + (\partial_x \eta)(\partial_y \xi) \partial_{\xi\eta} U + (\partial_x \eta)(\partial_y \eta) \partial_\eta^2 U \end{aligned}$$

Der transformierte Hauptteil lautet somit

$$H' = A' \partial_\xi^2 U + 2B' \partial_{\xi\eta} U + C' \partial_\eta^2 U$$

mit

$$\begin{aligned} A' &= A(\partial_x \xi)^2 + 2B(\partial_x \xi)(\partial_y \xi) + C(\partial_y \xi)^2 \\ B' &= A(\partial_x \xi)(\partial_x \eta) + B[(\partial_x \xi)(\partial_y \eta) + (\partial_x \eta)(\partial_y \xi)] + C(\partial_y \xi)(\partial_y \eta) \\ C' &= A(\partial_x \eta)^2 + 2B(\partial_x \eta)(\partial_y \eta) + C(\partial_y \eta)^2 \end{aligned}$$

Die Wellengleichung

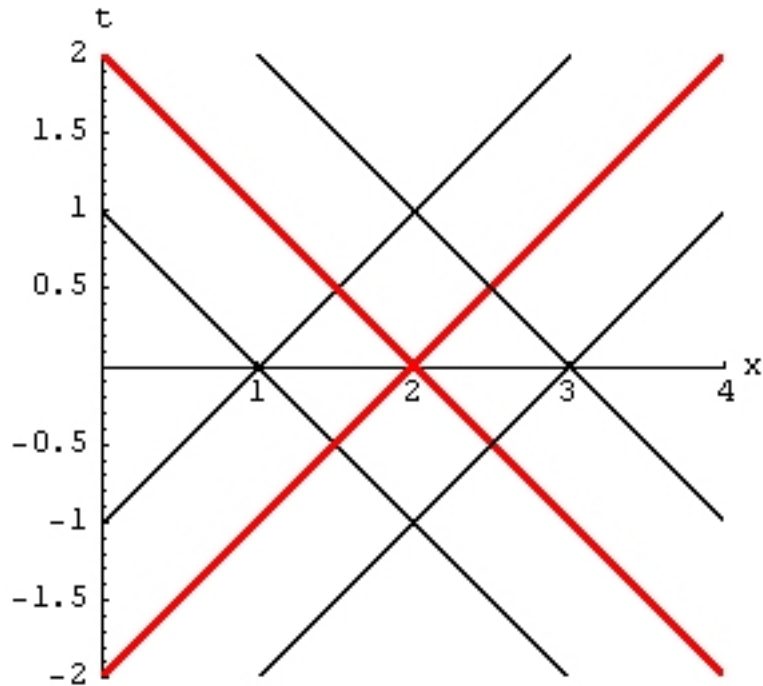


Abbildung 3: Charakteristiken für $v = 1$. Besonders hervorgehoben wurden die Charakteristiken $x + t = 2$, $x - t = 2$, die sich im Punkt $(x_0 = 2, t_0 = 0)$ schneiden.

Mit den Bedingungen $A' = 0$ oder $C' = 0$ kommt man für $\varphi = \xi$ oder $\varphi = \eta$ zur (nichtlinearen) partiellen Differentialgleichung

$$\boxed{A(\partial_x \varphi)^2 + 2B(\partial_x \varphi)(\partial_y \varphi) + C(\partial_y \varphi)^2 = 0} \quad (4)$$

Dies ist die *charakteristische Differentialgleichung* und die Lösungen bzw. Niveaulinien $\varphi(x, y) = \text{const.}$ heißen *Charakteristiken* bzw. *charakteristische Linien*.

Für den hyperbolischen Fall gibt es zwei unabhängige Charakteristiken. Faktorisieren wir zunächst Gleichung (4)

$$(\partial_x \varphi - \lambda_1 \partial_y \varphi)(\partial_x \varphi - \lambda_2 \partial_y \varphi) = 0 \quad \text{mit} \quad \lambda_{1,2} = -\frac{B}{A} \pm \frac{1}{A} \sqrt{B^2 - AC}$$

so folgen die Charakteristiken aus den Gleichungen ($i=1,2$)

$$\partial_x \varphi - \lambda_i \partial_y \varphi = 0$$

Die Wellengleichung erhält man aus (3) für $A = 1$, $B = 0$, $C = -v^2$, $D = E = F = 0$ und $y = t$, so dass $\lambda_i = \pm v$, und die *Charakteristiken* (vgl. Abbildung 3) lauten somit

$$\boxed{\xi = x + vt = \text{const} \quad \text{bzw.} \quad \eta = x - vt = \text{const}}$$

Da $B = 0$ ist, wird der transformierte Hauptteil H' durch einen linearen Ansatz

$$\boxed{U(\xi, \eta) = g(\xi) + f(\eta) \text{ bzw. } u(x, t) = g(x + vt) + f(x - vt)} \quad (5)$$

gelöst.

Die Koordinatentransformation entspricht also genau einer Galilei-Transformation in positiver/negativer x -Richtung. Die nun erhaltene Lösung (als Superposition einer nach links und einer nach rechts laufenden Welle) ist eine Verallgemeinerung unseres Ansatzes auf Seite 6. In der Tat kann man die heuristische Ableitung der Wellengleichung auch für $g(x + vt)$ erfolgreich durchführen.

Die Verallgemeinerung der hier dargestellten Sachverhalte auf drei Raumdimensionen ist nicht trivial. Deswegen beschränken wir uns auf die Wellengleichung. Die Charakteristiken formen im dreidimensionalen Fall einen Hyperkegel ("charakteristischer Kegel") gemäß

$$|\vec{x} - \vec{x}_0| = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2} = v|t - t_0|$$

Gedanklich können wir uns vorstellen, dass der Kegel aus der Rotation der Charakteristik $x - x_0 = v(t - t_0)$ um die t_0 -Achse entsteht. Er wird auch durch die Hyperfläche

$$\phi(x, y, z, t) = (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 - v^2(t - t_0)^2 = 0$$

beschrieben.

Bildlich wird hier die enge Ankoppelung an die spezielle Relativitätstheorie sehr deutlich (vgl. "Lichtkegel"). Ebenso wie die Anbindung an das Kausalitätsprinzip. Im eindimensionalen Fall drückt sich nämlich Kausalität dadurch aus, dass Anfangsbedingungen⁶ die Lösung zu $t > t_0$ nur im Sektor zwischen den beiden Charakteristikenscharen (für den Punkt (x_0, t_0)) beeinflussen können. In der Relativitätstheorie sprechen wir in diesem Zusammenhang von zeitartigen Abständen. Aber wir wollen hier nicht auf Details eingehen, sondern nur anmerken, dass es hier enge Verbindungen zwischen rein mathematischen bzw. rein physikalischen Konzepten gibt.

Einzelheiten bzw. der Zusammenhang zwischen Kausalität und Energieerhaltung (insbesondere in Hinblick auf die spezielle Relativitätstheorie) wird z.B. im Buch *Partielle Differentialgleichungen*, STRAUSS, (1995) dargestellt.

2.3 Anfangs- und Randwertproblem

Wir haben jetzt die allgemeine Struktur der Lösung der (eindimensionalen) Wellengleichung besprochen. Nun wollen wir uns den expliziten Lösungen zuwenden. Dazu müssen wir uns zunächst Gedanken über die prinzipielle Ausgangssituation machen, denn sie bestimmt unser Ergebnis.

Grundsätzlich kann man die allgemeine Lösung einer Differentialgleichung auf zwei Arten einschränken (und somit an die Realität anpassen) und zwar durch das

- **Anfangswertproblem (Cauchy-Problem):**

Für die Wellengleichung (DG 2.Ordnung in t) braucht man

⁶ Auslenkung und Geschwindigkeit zum Zeitpunkt t_0

Die Wellengleichung

$$u(x, t_0) = a(x) \quad \text{bzw.} \quad d_t u(x, t_0) = b(x)$$

d.h. *Anfangsauslenkung* bzw. *-geschwindigkeit*.

Ein Grenzfall des AWP's ist das **Austrahlungsproblem**, für das man eine Quelle braucht. Denn zur Zeit t_0 herrscht noch der Ruhezustand, so dass die Anfangsfunktion $u(x, t)$ sowie deren Ableitung Null ist.

- **Randwertproblem:**

Die Lösungsfunktion (bzw. deren Ableitung) hat am Rand des Definitionsgebietes bestimmte Bedingungen zu erfüllen.

Für das Anfangswertproblem findet man die allgemeine Lösung recht schnell. Dazu wenden wir die Anfangsbedingungen auf (5) an. Wir bekommen

$$\begin{aligned} t &= t_0 = 0 \Rightarrow \\ a(x) &= f(x) + g(x) \\ b(x) &= \left. \frac{du(x, t)}{dt} \right|_{t=0} = v \left(\frac{dg(x)}{dx} - \frac{df(x)}{dx} \right) \Rightarrow g(x) - f(x) = \frac{1}{v} \int_0^x b(y) dy + \text{const.} \end{aligned}$$

Wenn wir nach $f(x)$ bzw. $g(x)$ auflösen, folgt

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{2} \left(a(x) - \frac{1}{v} \int_0^x b(y) dy - \text{const.} \right) \\ g(x) &= \frac{1}{2} \left(a(x) + \frac{1}{v} \int_0^x b(y) dy + \text{const.} \right) \end{aligned}$$

so dass $u(x, t)$ gemäß (5) zu

$$u(x, t) = \frac{1}{2} [a(x + vt) + a(x - vt)] + \frac{1}{2v} \int_{x-vt}^{x+vt} b(y) dy$$

wird; die *Lösungsformel von d'Alembert*.

Im Falle eines Randwertproblems unterscheidet man zwischen folgenden Möglichkeiten

- **Dirichlet-Rb**

Es werden die Werte der Funktion am *Rand* ∂A des *Gebietes* A vorgegeben, d.h.

$$u(\partial A) = \dots$$

- **von Neumann-Rb**

Es werden die Werte der Ableitungen der Funktion am Rand vorgegeben, d.h.

$$\left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{\partial A} = \dots, \quad \left. \frac{\partial u}{\partial y} \right|_{\partial A} = \dots$$

		Typ der partiellen DG		
Randbedingung	Rand	Elliptisch	Hyperbolisch	Parabolisch
Dirichlet- bzw. von Neumann-	Offen	n.a.	n.a.	e.s.L.
	Geschlossen	L.n.e.	e.s.L.	L.ü.
Cauchy-	Offen	e.s.L.	L.i.	L.ü.
	Geschlossen	L.ü.	L.ü.	L.ü.

Tabelle 1: Übersicht über Randwertprobleme

(n.a. = nicht ausreichend, e.s.L. = Eindeutige, stabile Lösung, L.ü. = Lösung überbestimmt, L.n.e. = Lösung nicht eindeutig, L.i. = Lösung instabil)

- **Cauchy-Rb**

Dirichlet & von Neumann-Rb für die Normalableitung (z.B. in der Elektrostatik das Potential & die Normalkomponente der elektrischen Feldstärke)

- **Rand-Anfangswert-Problem**

Vorgegeben werden sowohl Anfangs- als auch Randwerte. Ein Beispiel wäre die Ausbreitung von Schallwellen in einer Röhre.

In Tabelle 1 geben wir eine Übersicht über (un-)mögliche Randwertprobleme.

Von einem sachgemäß gestellten Problem spricht man, wenn drei Eigenschaften gesichert sind:

- die Existenz einer lokalen Lösung
- die Eindeutigkeit der lokalen Lösung
- die stetige Abhängigkeit der lokalen Lösung von den Anfangswerten und/oder Randbedingungen

Die erste Bedingung kann dahingehend verstanden werden, als dass man nicht zu viel (d.h. sich widersprechende Eigenschaften) von der Lösung verlangen darf. Die zweite Forderung drückt aus, dass das Problem auf eine vollständige Art und Weise gestellt werden muss. Die dritte Forderung orientiert sich am Gedanken der Beschreibung realer Vorgänge. Das mathematische Problem beschreibt nämlich nur dann die Natur zufriedenstellend, wenn einer Veränderung der vorgegebenen Daten in hinreichend kleinem Spielraum ebenfalls eine kleine (d.h. auf einen vorgeschriebenen Spielraum beschränkte) Änderung der Lösung entspricht.

2.4 Analytisch exakte Lösungsverfahren

2.4.1 Integraldarstellung (Fourier-/Laplace-Transformation)

Für das Anfangswertproblem haben wir bereits die allgemeine Lösungsformel hergeleitet. Diese Formel wollen wir nun mittels Fourier-Transformation verifizieren. Danach wollen wir ein RAWP mittels Separation der Variablen lösen. Desweiteren skizzieren wir

Die Wellengleichung

die typische Behandlung des inhomogenen Problems.

Der Grundgedanke bei der Lösung mittels Integraldarstellung ist: Man transformiert die Ableitung nach einer Variable weg und reduziert somit die Anzahl der unabhängigen Variablen (vgl. Tabelle 2).

Wenden wir dies auf unsere Wellengleichung an! Wir gehen wieder von einem Anfangswertproblem aus

$$\begin{aligned} \partial_t^2 u - v^2 \partial_x^2 u &= 0 & u(x, 0) &= a(x) \\ d_t u(x, 0) &= b(x) \end{aligned}$$

Aus der Definition der Fouriertransformation

$$U(k, t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ikx} u(x, t) dx$$

sieht man unmittelbar, wie sich Differentialoperatoren transformieren (durch Ableiten)

$$\partial_x^2 u = -k^2 u \quad \text{bzw.} \quad \partial_t^2 u = \partial_t^2 U$$

so dass wir durch Einsetzen für unser AWP

$$\begin{aligned} \partial_t^2 U + (vk)^2 U &= 0 & U(k, 0) &= A(k) \\ d_t U(k, 0) &= B(k) \end{aligned}$$

erhalten.

Für $vk \neq 0$ lautet die Lösung dieses AWP

$$U(k, t) = A(k) \cos(vkt) + B(k) \frac{\sin(vkt)}{vk}$$

Mit der Identität $\cos(vkt) = \frac{1}{2}(e^{ivkt} + e^{-ivkt})$ folgt

$$U(k, t) = \frac{A(k)}{2} [e^{ivkt} + e^{-ivkt}] + B(k) \frac{\sin(vkt)}{vk}$$

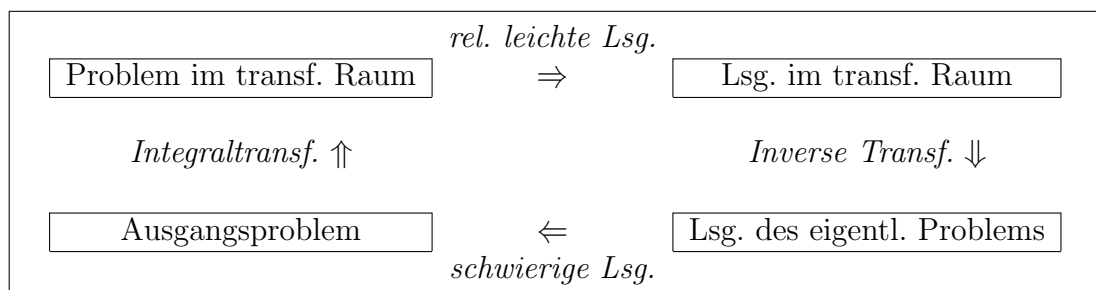


Tabelle 2: Das Prinzip der Integraltransformation

Die Rücktransformation (d.h. mit dem Kern $\exp(+ikx)$) ergibt

$$u(x, t) = \frac{1}{2} \int A(k)(e^{ik(x+vt)} + e^{ik(x-vt)})dk + \frac{1}{v} \int B(k) \frac{\sin(vkt)}{k} e^{ikx} dk$$

Mit der Transformationsvorschrift für den Rechtecksimpuls

$$\Pi(t) := \begin{cases} 1 & |t| \leq 1 \\ 0 & |t| > 1 \end{cases} \mapsto 2\text{sinc}(x) := \begin{cases} \frac{\sin x}{x} & x \neq 0 \\ 1 & x = 0 \end{cases}$$

und den Regeln $(f * g)(t) \mapsto F(\omega)G(\omega)$, $\text{FT}(\delta(t - c)) = e^{-i\omega c}$ folgt

$$u(x, t) = \frac{1}{2}[a(x - vt) + a(x + vt)] + \frac{1}{2v} \int_{x-vt}^{x+vt} b(y) dy$$

d.h. wieder die Lösungsformel von d'Alembert.

2.4.2 Separation der Variablen

Wir haben uns bislang nur mit dem Anfangswertproblem beschäftigt. Nun wollen wir das Randwertproblem besprechen und somit die Separation der Variablen. Die Idee dieses Lösungsverfahrens ist, dass man einen allgemeinen Ansatz in die DG einsetzt und schaut was passiert. Abhängig vom Typ der DG probiert man

spezielle Ansätze	$u(x, y) = f(ax + by)$
	$u(x, y) = v(x, y)e^{ax+by}$
	$u(x, y) = e^{g(x,y)}$
	...
Additive Trennung	$u(x, y) = f(x) + g(y)$
Trennung der Variablen	$u(x, y) = f(x)g(y)$

Wir wollen nicht lange fackeln und schauen uns gleich die Anwendung des Verfahrens an. Dazu betrachten wir wiederum eine schwingende, eingespannte Saite der Länge l . Zusätzlich geben wir Anfangslage und -geschwindigkeit vor. Unsere Ausgangssituation lautet daher formal

$$\partial_t^2 u - v^2 \partial_x^2 u = 0 \quad \text{AWP} \quad \begin{aligned} u(x, 0) &= a(x) \\ d_t u(x, 0) &= b(x) \end{aligned}$$

$$\text{RWP} \quad u(0, t) = u(l, t) = 0$$

Die Wellengleichung

Wir haben daher eine homogene Dirichlet-Randbedingung. Nun probieren wir eben den *Separationsansatz*

$$\boxed{u(x, t) = X(x)T(t)} \quad (6)$$

aus.

Dazu bilden wir die dazugehörigen Ableitungen, setzen diese in unsere Wellengleichung ein und dividieren durch XT . Es entsteht

$$\frac{1}{X}d_x^2X - \frac{1}{v^2T}d_t^2T = 0$$

was aufgrund der Abhängigkeiten von X , T äquivalent sein muss zu ($\lambda = \text{const.}$)

$$\begin{aligned} \frac{1}{X}d_x^2X &= \lambda \Rightarrow d_x^2X - \lambda X = 0 \\ \frac{1}{v^2T}d_t^2T &= \lambda \Rightarrow d_t^2T - v^2\lambda T = 0 \end{aligned} \quad (7)$$

Eigenwertprobleme sind also angesagt, und wir werden hierzu noch ein paar Bemerkungen machen, wenn wir unser Beispiel gelöst haben.

Die Randbedingungen für $u(x)$ umgewälzt auf $X(x)$ lauten $X(0) = X(l) = 0$. Für die Lösungsfunktion lohnt sich offenbar der Ansatz

$$X(x) = \sin(kx) \quad (8)$$

der sowohl den Randbedingungen als auch der Differentialgleichung gerecht wird.

In der Tat können wir aus der Bedingungsgleichung $X(l) = 0 = \sin(kl)$ die möglichen Werte für k ermitteln. Da die Sinus-Funktion für $n\pi$ den Wert Null annimmt, gilt offenbar

$$k_n = n\pi/l, \quad n \in \mathbb{N}$$

Setzen wir dies, zusammen mit den Ableitungen unseres Ansatzes, in Gleichung (7) ein, so können wir λ zu

$$\lambda_n = -\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2$$

bestimmen.

Die Zeitfunktion gehorcht der Schwingungsgleichung, und dementsprechend lautet die Lösungsfunktion

$$T(t) = c_n \sin\left(\frac{vn\pi}{l}t\right) + d_n \cos\left(\frac{vn\pi}{l}t\right) \quad (9)$$

Setzen wir jetzt Gleichung (8) bzw. (9) in unseren Separationsansatz (6) ein, so haben wir unser Randwertproblem gelöst. Unser Ergebnis lautet

$$u_n(x, t) = \sin\left(\frac{n\pi}{l}x\right)\left[c_n \sin\left(\frac{vn\pi}{l}t\right) + d_n \cos\left(\frac{vn\pi}{l}t\right)\right]$$

Die n *Eigenfunktionen* haben einen speziellen Namen, und zwar bezeichnet man $n = 1$ als *Grundschiwingung* bzw. Lösungen mit $n > 1$ als *Oberschwingungen*.

Nun wenden wir uns dem AWP zu. Dazu versuchen wir mittels Superposition

$$u(x, t) := \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x, t)$$

der Eigenschwingungen die Anfangsbedingungen

$$\begin{aligned} u(x, 0) &= X(x)T(0) = \sum_{n=1}^{\infty} d_n \sin\left(\frac{n\pi}{l}x\right) = a(x) \\ d_t u(x, 0) &= X(x)d_t T(0) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \frac{v n \pi}{l} \sin\left(\frac{n\pi}{l}x\right) = b(x) \end{aligned}$$

in $0 \leq x \leq l$ zu erfüllen.

Mit dem **Eindeutigkeitssatz für Fourierreihen**⁷ sind die c_n , d_n eindeutig als Koeffizienten der Fourier-Sinus-Reihen

$$a(x) = \sum a_n \sin\left(\frac{n\pi}{l}x\right) \quad \text{bzw.} \quad b(x) = \sum b_n \sin\left(\frac{n\pi}{l}x\right)$$

bestimmt und somit ist ein Koeffizientenvergleich möglich

$$d_n = a_n \quad \text{bzw.} \quad \left(\frac{v n \pi}{l}\right) c_n = b_n$$

Damit wird die Lösung (vgl. auch Abbildung 4) schlussendlich zu

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left[b_n \left(\frac{l}{v n \pi}\right) \sin\left(\frac{v n \pi}{l}t\right) + a_n \cos\left(\frac{v n \pi}{l}t\right) \right] \sin\left(\frac{n\pi}{l}x\right)$$

mit den *Fourier-Koeffizienten* a_n , b_n

$$a_n = \frac{2}{l} \int_0^l a(y) \sin\left(\frac{n\pi}{l}y\right) dy \quad \text{bzw.} \quad b_n = \frac{2}{l} \int_0^l b(y) \sin\left(\frac{n\pi}{l}y\right) dy$$

Nun zu der bereits erwähnten Anmerkung. Zunächst wollen wir die Grundsätzlichkeit des Ansatzes (6) besprechen. Wellen, die sich auf diese Art und Weise zerlegen lassen, werden als **stehende Wellen** bezeichnet. Der zeitabhängige Faktor beschreibt dabei im Normalfall eine Schwingung, wohingegen der ortsabhängige Faktor einerseits von der Wellengleichung, andererseits von den Randbedingungen abhängt. Typische Beispiele für Randbedingungen sind im eindimensionalen Fall feste oder freie Enden.

Das Charakteristikum der stehenden Wellen ist, dass die Maxima bzw. Minima ortsfest sind. Das Gegenteil zu dieser Wellenform ist die **fortschreitende Welle**, die im eindimensionalen Fall durch (5) (zu finden auf Seite 11) bestimmt ist.

Die soeben betrachtete eingespannte Saite ist ein Beispiel für das Auftreten von stehenden Wellen in der klassischen Mechanik. In der Quantenmechanik spielen sie vor allem bei der nichtrelativistischen Beschreibung eine große Rolle, und zwar z.B. bei der dementsprechenden Berechnung der Energiezustände des Wasserstoffatoms.

⁷ Haben zwei in $[0, T]$ stückweise stetige Funktionen g, h dieselben Fourierkoeffizienten und erfüllen sie beide die Mittelwertegenschaft $f(t) = \frac{1}{2}(f(t_-) + f(t_+))$ ($t \in \mathbb{R}$), so sind sie identisch.

Die Wellengleichung

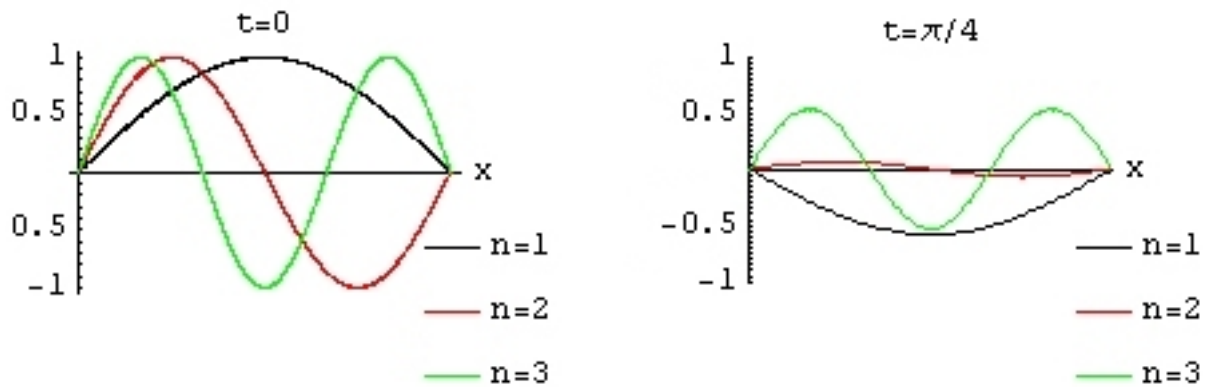


Abbildung 4: Illustration der Zeitentwicklung der Basisfunktionen $n = 1, 2, 3$, wobei alle Parameter Eins gesetzt wurden.

2.4.3 Lineare-, nichtlineare- & stehende Wellen

Wir wollen an dieser Stelle eine der unzählig denkbaren Klassifikationen von Wellen anführen. Wie wir gesehen haben, unterscheidet sich das reine Randwertproblem vom reinen Anfangswertproblem. In ersterem Fall gelangen wir zu Eigenwertproblemen für die (räuml.) Variable⁸. Wir wollen demgemäß zwischen

- linearen (fortschreitenden) Wellen
- nichtlinearen (fortschreitenden) Wellen
- stehenden Wellen

unterscheiden.

Der lineare Fall grenzt sich vom nichtlinearen folgendermaßen ab: Für den zur jeweiligen Differentialgleichung gehörenden *Differentialoperator* L gilt, dass er linear ist, wenn seine Wirkung auf beliebige *Funktionen* u, v und beliebige *Konstanten* c

- $L(u + v) = Lu + Lv$
- $L(cv) = cLu$

ist.

Lineare Wellen zeichnen sich durch das bereits verwendete **Superpositionsprinzip**⁹ bzw. durch das **Prinzip der ungestörten Überlagerung**¹⁰ aus. Die allgemeine Form der Differentialgleichung lautet

$$\sum_{k=0}^{\infty} \sum_{p=0}^{\infty} a_{kp} \frac{\partial^{k+p}}{\partial^k t \partial^p x} u(x, t) = 0$$

⁸ Wellen müssen sich in jedem Fall an die geometrischen Gegebenheiten anpassen. Zeitlich betrachtet gibt es jedoch auch erzwungene stehende Wellen; die Stationarität in unserem Beispiel ist nicht notwendig

⁹ d.h. die Eigenschaft, dass sich zwei gleichartige Wellenfelder additiv überlagern

¹⁰ bereits vorhandene Wellenfelder stören nicht die Ausbreitung eines Wellenfeldes

Nichtlinearer Natur sind z.B. die Stoßwellen¹¹, die im einfachsten Fall durch die Gleichung

$$\partial_t \mathbf{u} + \mathbf{a}(\mathbf{u}) \partial_x \mathbf{u} = 0$$

beschrieben werden.

Ein anderes Beispiel wären **Solitonen**, d.h. lokale Lösungen einer nichtlinearen PDG von der Form einer fortschreitenden Welle, die bemerkenswert stabil sind. Solitonen haben sowohl Teilchen- als auch Welleneigenschaften. Sie sind zu jedem Zeitpunkt örtlich lokalisiert, und der Bereich der Lokalisierung bzw. der Punkt, um den herum die Welle lokalisiert ist, bewegt sich wie ein freies Teilchen; insbesondere kann er auch ruhen. Solitonen treten beispielsweise als Lösung der *Korteweg-de-Vries-Gleichung*

$$\partial_t \mathbf{u} + \partial_x^3 \mathbf{u} + 6\mathbf{u} \partial_x \mathbf{u} = 0$$

oder der *Sinus-Gordon-Gleichung*

$$\partial_t^2 \mathbf{u} - \partial_x^2 \mathbf{u} + \sin \mathbf{u} = 0$$

auf. (Die Gleichung ist nichtlinear, da $\sin(\mathbf{u} + \mathbf{v}) \neq \sin(\mathbf{u}) + \sin(\mathbf{v})$)

In der Physik findet man Solitonen u.a.

- in Festkörpern (in anharmonischen Gittern, Josephson-Kontakten, in Glasfasern (optische Solitonen), bei der Wanderung von Bloch-Wänden, in quasi-eindimensionalen Leitern (Peierls-Phasenübergänge))
- in Flüssigkeiten als Oberflächenwellen (hohe Flutwellen in Flußmündungen, Tsunamis) bzw. als Spinwellen
- bei Wüstendünen als Barchane
- in Plasmen als Langmuir-Solitonen
- in linearen Molekülen (Proteinketten, z.B. α -Helix als Dawydow-Soliton)
- in der klassischen und Quantenfeldtheorie

Stehende Wellen können sowohl linear als auch nichtlinear sein. Zuletzt genannte erwachsen z.B. aus der Gleichung

$$\mathbf{u} \partial_x^2 \mathbf{u} + (\mathbf{a} - 1) \mathbf{u}_x^2 + f(x) \mathbf{u} \partial_x \mathbf{u} - g(x) \mathbf{u} \partial_t^2 \mathbf{u} = 0$$

¹¹ treten z.B. bei Explosionen, dem Verkehrsfluß, Gletscherwellen, dem Abbremsen von Flugzeugen, usw. auf

2.4.4 Lösung der inhomogenen Wellengleichung

Wir beschäftigen uns jetzt mit dem inhomogenen Fall. Die dementsprechende Wellengleichung lautet

$$\partial_t^2 u - v^2 \partial_x^2 u = f(x, t)$$

wobei $f(x, t)$ eine auf das System wirkende *Kraft* repräsentiert.

Die Lösbarkeit dieser Gleichung garantiert das **Prinzip von Duhamel**. Gemäß dieser Regel ist die inhomogene Gleichung bestimmbar, wenn das homogene Problem lösbar ist. In diesem Sinne erweitert sich die Formel von d'Alembert zu

$$u(x, t) = u_{\text{Homogen}} + \frac{1}{2v} \int_{\Delta} f(x, t) dx dt$$

Integriert wird dabei über das charakteristische Dreieck, sowie es von den Charakteristiken $x \pm vt$ eingeschlossen wird.

Zur Bestimmung der inhomogenen Lösung kann man auch die Greensche Funktion verwenden. Dazu betrachten wir einen linearen Differentialoperator $L[u] := a \partial_x^2 u + b \partial_{xy} u + c \partial_y^2 u + d \partial_x u + e \partial_y u + fu$, zu dem wir den *adjungierten Operator* M gemäß

$$vL[u] - uM[v] = \frac{\partial A}{\partial x} + \frac{\partial B}{\partial y} \quad (10)$$

bestimmen. ($u, v, A, B =$ beliebige *Funktionen*)

Hat der *Definitionsbereich* D einen hinreichend glatten Rand, so gilt der *Integralsatz von Green*

$$\int_{\partial D} \vec{v} d\vec{x} = \iint_D \left(\frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y} \right) dx dy$$

Wenden wir diesen Satz auf Gleichung (10) an ($v_y = A, v_x = -B$)

$$\iint_D vL[u] dx dy = \iint_D uM[v] dx dy + \int_{\partial D} A dy - B dx \quad (11)$$

Für ein RWP

$$L[u] = g(x, y) \text{ mit Randbedingungen an } u$$

bestimmt man nun zuerst für jedes $x', y' \in D$ die Lösung $G(x, y; x', y')$ des einfacheren RWP's

$$M[v] = \delta(x - x', y - y') \text{ mit Randbedingungen an } v \quad (12)$$

wobei die Randbedingungen so festgelegt werden, dass sie zusammen mit den Randbedingungen für u , die Berechnung des Randintegrals in (11) gestatten. $G(x, y; x', y')$ ist dabei die *Green-Funktion* des Differentialoperators L auf dem Gebiet D .

Mit $v = G(x, y; x', y')$ und (12) wird (11) zu

$$\begin{aligned} \iint_D G(x, y; x', y') g(x, y) dx dy &= \iint_D u(x, y) \delta(x - x', y - y') dx dy + \text{bekannt} \\ &= u(x', y') + \text{bekannt} \end{aligned}$$

wobei wir über die Deltafunktion integriert haben.

Durch Variablensubstitution erhalten wir schlussendlich

$$u(x, y) = \iint_D G(x', y'; x, y) g(x', y') dx' dy' + \text{Randintegral}$$

Die Bestimmung (der von D bzw. L abhängigen) Green-Funktion ist eine Thema für sich. Aber für wichtige Beispiele kann sie mittels Separation der Variablen, Laplace- oder Fourier-Transformation bestimmt werden.

Jetzt wollen wir das Verfahren auf unsere Wellengleichung anwenden. Wir haben folgendes Problem zu lösen

$$\partial_t^2 u - v^2 \partial_x^2 u = f(x, t) \quad \text{AWP} \quad \begin{aligned} u(x, 0) &= u_0(x) \\ d_t u(x, 0) &= v_0(x) \end{aligned}$$

$$\text{wobei} \quad \begin{aligned} -\infty < x < \infty \\ 0 \leq t \leq T \end{aligned}$$

Die Green-Funktion bestimmt sich nun als Lösung von

$$M[v] = \delta(x - x', y - y') \quad \text{mit} \quad v(x, T) = d_t v(x, T) = 0$$

via Fourier-Transformation (ohne Beweis) zu

$$\begin{aligned} G(x, t; x', t') &= \begin{cases} \frac{1}{2v} & |x - x'| < v(t - t') \\ 0 & |x - x'| > v(t - t') \end{cases} \\ &= u[(x - vt) - (x' - vt')]u[(x' + vt') - (x + vt)] \end{aligned}$$

$$\text{mit der Heaviside-Funktion } u(t) := \begin{cases} 0 & t < 0 \\ 1 & t > 0 \end{cases}$$

Die Lösung lautet

$$u(x', t') = \int_0^T \int_{-\infty}^{\infty} G(x, t; x', t') f(x, t) dx dt + \int_{-\infty}^{\infty} (Gv_0 - d_t G u_0)|_{t=0} dx$$

Wir können auch Randbedingungen einbauen. So entspricht z.B. die Beschränkung auf ein endliches Intervall $[0, l]$ der zusätzlichen Bedingung $v(0, t) = v(l, t) = 0$, usw.

Wir haben nun die Prinzipien einiger wichtiger analytischer Lösungsmethoden beschrieben. Für die Praxis sind sicherlich numerische Verfahren wichtiger. Hierzu erwähnen wir die

- **Methode der finiten Differenzen (kurz: Differenzenverfahren)**

Die Differentialquotienten werden durch Differenzenquotienten ersetzt, so dass die Differentialgleichung einschließlich Anfangs- und Randbedingungen in ein System von algebraischen Gleichungen umgewandelt wird.

Die Wellengleichung

- **Methode der finiten Elemente (kurz: FEM) für Randwertaufgaben**
Der Randwertaufgabe wird eine Variationsaufgabe zugeordnet.
- **Randintegralgleichungsmethode für spezielle Randwertaufgaben**
Die Randwertaufgabe wird als äquivalentes Integralgleichungsproblem über den Rand des Definitionsgebietes formuliert. Dazu werden Integralsätze der Vektoranalysis verwendet. Die verbleibenden Randintegrale werden mit Hilfe geeigneter Quadraturformeln numerisch gelöst.
- **Fast Fourier Transform (kurz: FFT)**
Eine effiziente numerische Anwendung der Integraltransformation. Das Prinzip des Lösungsverfahrens ist jedoch das Gleiche wie im bereits skizzierten analytischen Fall.

Eine weitere, ein wenig unkonventionelle Methode ist das physikalische Lösen von Differentialgleichungen. Dabei macht man von der Tatsache Gebrauch, dass recht unterschiedliche physikalische Erscheinungen mit ein und derselben Differentialgleichung beschrieben werden können. Um ein gegebenes Problem auf diesem Wege zu lösen, wird ein technisches Modell konstruiert, mit dessen Hilfe das gegebene Problem simuliert werden kann und an dem im Experiment Messungen vorgenommen werden, deren Werte die gesuchte Funktion darstellen.

2.5 Die allgemeine Lösung

2.5.1 Wellenpakete

Die beiden Grundlösungen der Wellengleichung (präziser: der denkbar einfachsten linearen Form) sind vom Typ

	$\partial_t^2 u - v^2 \partial_x^2 u = 0$	
$u(x, t) = A e^{\pm ax \pm bt}$		$u(x, t) = A e^{i(\pm ax \pm bt)}$

was wiederum durch Einsetzen verifiziert werden kann.

Mittels einfacher Identitäten für Winkelfunktionen können wir diese Lösungen auch durch hyperbolische bzw. trigonometrische Funktionen darstellen. In Prinzip haben wir wieder die beiden Situationen, die wir von der Schwingungsgleichung kennen. Entweder haben wir eine in der Raum-Zeit exponentiell beschleunigte Lösung oder wir haben eine periodische Lösung. Eine "Mischform" im Argument, d.h. iax & bt (bzw. umgekehrt) ist aus physikalischen Gründen auszuschließen, denn dann wäre die Phasengeschwindigkeit rein imaginär¹².

¹²Dies ist insbesondere dahingehend unmöglich, als dass wir uns, gemäß unserer Gleichung, in einem homogenen, isotropen Medium befinden.

Für die Physik ist sicherlich die komplexe Lösungsform wichtiger. Denn die dementsprechende physikalische Situation, das "Pendeln um eine Ruhelage", ist insgesamt doch öfters in der Natur zu beobachten, als denn z.B. das exponentielle Beschleunigen.

Wir verwenden daher vorwiegend periodische Funktionen als Basisfunktionen. Besser gesagt, haben wir in 2.4.2 diese Methode bereits verwendet. Man nennt die Entwicklung *Fourier-Reihe*, und ihre explizite Darstellung (für eine in +x-Richtung laufende Störung) lautet

$$u(x, t) = \frac{1}{2}A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos(k_n x - \omega_n t) + B_n \sin(k_n x - \omega_n t)$$

Die A_n , B_n entsprechen dabei den *Fourier-Koeffizienten*, die sich aus den Projektionen von $u(x, t)$ auf die jeweiligen Basisfunktionen ergeben.

Möglich ist diese Entwicklung für Funktionen, die

- periodisch sind, und zwar mit (beliebiger) Periode $2L$, d.h.

$$f(x) = f(x + 2L) = f(x + 2nL)$$

- im Periodizitätsintervall Lebesgue-integrierbar sind.

Die Basisfunktionen bezeichnet man auch als *harmonische Wellen*. Aperiodische Wellen/Funktionen können ebenfalls durch sie dargestellt werden, und zwar indem man die Periode der Funktion als Unendlich ($l \rightarrow \infty$) annimmt. Die Reihe wird dann zu einem Integral und wir überlagern unendlich viele Wellen. Damit kommen wir zum Konzept des **Wellenpaketes**, welches formal definiert ist durch

$$u(x, t_0) = \int_{-\infty}^{\infty} C(k) e^{ikx} dk \quad (13)$$

Die Form (Höhe und Abstand der Nebenmaxima) hängt entscheidend von der *Amplitudenverteilung* $C(k)$ ab. Ein sehr wichtiges Beispiel für $C(k)$ ist die *Gauß-Verteilung*

$$C(k) = C(k_0) e^{-\frac{(k-k_0)^2}{2(\Delta k)^2}}$$

In Abbildung 5 ist der Betrag der (komplexen) Funktion (13) dargestellt. Eine raffinierte Darstellung der Zeitentwicklung eines Wellenpaketes zielt auch die Titelseite dieses Dokumentes.

Der wesentlicher Unterschied zwischen Wellenpaket und harmonischen Wellen besteht darin, dass Ersteres etwas lokalisiertes darstellt, wohingegen die Basiswellen delokalisiert sind. Denn bei den harmonischen Wellen gibt es keine ausgezeichneten räumlichen Punkte. Am festen Orte wird eine Phasenlage nach einer gewissen Periode wieder eingenommen. Gemäß dieser Eigenschaft können die Basiswellen keine Information transportieren.

Physikalisch betrachtet ist die Aufsummierung über ein unendliches Frequenzband eine

Die Wellengleichung

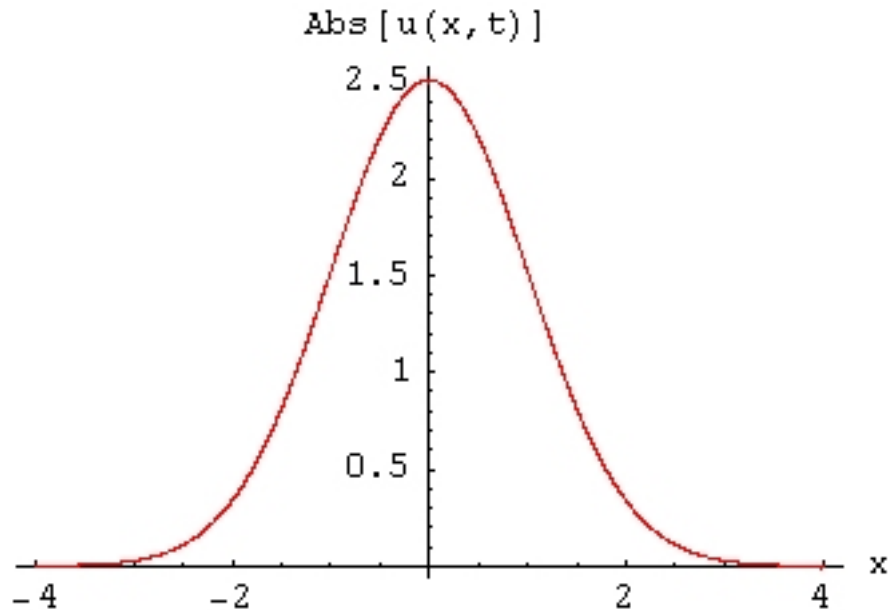


Abbildung 5: Das Gauß'sche Wellenpaket, wobei alle relevanten Parameter gleich Eins gesetzt wurden

Idealisierung. Dieser Aspekt wird sehr oft außer Acht gelassen, auch wenn er unmittelbar einsichtig ist. Denn $\text{Energie} \sim \text{Frequenz}$, und niemand verfügt über unendlich viel Energie.

In Zusammenhang mit Wellenpaketen gibt es auch eine Reihe von neueren Experimenten mit teilweise recht kontroversen Ergebnissen (Stichwort: Superluminales Tunneln).

2.5.2 Die Verallgemeinerung auf mehrere Dimensionen

Die Verallgemeinerung der Wellengleichung auf drei Raumdimensionen¹³ ist leider nicht ganz einfach. Lineare Wellen können superponieren und es entstehen neue Wellenformen. In Tabelle 3 geben wir das Schema der allgemeinen Lösung an.

In diesem Zusammenhang besprechen wir gleich eine weitere wesentliche Unterscheidungsmöglichkeit von (linearen bzw. stehenden) Wellen (vgl. Tabelle 6 auf Seite 29). Es handelt sich um die Klassifizierung nach der Geometrie der Welle, sowie sie aus den Randbedingungen, aber auch aus der Beschaffenheit der Quelle erwächst. Dabei unterscheiden wir zwischen den stehenden Wellen und dem Ausstrahlungsproblem (bei welchem $u(x, t)$ im Raumpunkt, in dem sich die Quelle befindet, eine Singularität aufweisen muss). Ein wesentlicher Aspekt ist, dass man die Kugel- bzw. Zylinderwellen durch die Superposition von ebenen Wellen gewinnt.

Für das verallgemeinerte AWP

$$\begin{aligned} \partial_t^2 u - v^2(\partial_x^2 + \partial_y^2 + \partial_z^2)u &= 0 & u(\vec{x}, 0) &= \mathbf{a}(\vec{x}) \\ d_t u(\vec{x}, 0) &= \mathbf{b}(\vec{x}) \end{aligned}$$

¹³sehr ausführlich wird dies im *Methods of theoretical physics* Bd.II, FESHBACH, MORSE, (1953) diskutiert

1d	$u(x, t) = f(x - vt) + g(x + vt)$
2d	$u(x, y, t) = \int_0^{2\pi} f(x \cos u + y \sin u - vt) du$
3d	$u(x, y, z, t) = \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} f(u, v \vec{k}\vec{r} - kvt) \sin u du dv$ <p style="text-align: center;">bzw.</p> $u(x, y, z, t) = \frac{1}{8\pi^3} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(a, b, c) e^{i(\vec{k}\vec{r} - kvt)} da db dc$ <p style="text-align: center;">($a, b, c = x, y, z$-Komponenten von \vec{k})</p>

Tabelle 3: Die allgemeine Form der Wellenlösung für verschiedene Raumdimensionen

lautet die Lösung ¹⁴

$$u(\vec{x}_0, t_0) = \frac{1}{4\pi v^2 t_0} \iint_S b(\vec{x}) dS + \partial_{t_0} \left(\frac{1}{4\pi v^2 t_0} \iint_S a(\vec{x}) dS \right)$$

Diese Lösungsformel wird auch als *Kirchhoff'sche Lösungsformel* bezeichnet.

In Worten besagt sie, dass der Wert $u(\vec{x}_0, t_0)$ nur von den Werten von $a(\vec{x})$ und $b(\vec{x})$ auf der *Kugeloberfläche* (*Sphäre*) $S = |\vec{x} - \vec{x}_0| = vt_0$, und nicht von den Werten $a(\vec{x})$, $b(\vec{x})$ im Inneren dieser Kugel, abhängt. Darin erkennt man das **Huygensche Prinzip**: Jeder Punkt einer Wellenfront verhält sich wie eine Punktquelle, die eine Kugelwelle emittiert. Das Feld an einem bestimmten Punkt zu einer späteren Zeit ist dann die Summe aller Felder und die neue Wellenfront ist die Einhüllende der von den Punktquellen erzeugten Elementarwellen. Wenn wir uns vergegenwärtigen, dass wir im Augenblick von der homogenen Wellengleichung sprechen, kann die Aussage auch folgendermaßen formuliert werden: Die Ausbreitungsgeschwindigkeit jeder Lösung der dreidimensionalen Wellengleichung entspricht der *Phasengeschwindigkeit* v .

Für Lichtwellen ($v = c$) erkennen wir hierin genau eines der Einsteinschen Postulate, die den Ausgangspunkt der speziellen Relativitätstheorie bildeten.

Das Prinzip erklärt die Ausbreitung von Wellen modellmäßig. Es sorgt auch dafür, dass ein scharf lokalisierter Anfangszustand an einer anderen Stelle zu einem späterem Zeitpunkt ebenso scharf auftritt. Es entstehen demnach keine Echos. Dem ist nicht im zweidimensionalen Fall, für den das Prinzip nicht gilt (allgemein: $2n + 1$ -Raumdimensionen: Huygen's P. = w.A., $2n$ -Raumdimensionen: Huygen's P. = f.A.). Ebenso gilt es nicht

¹⁴Details siehe z.B. *Partielle Differentialgleichungen*, STRAUSS, (1995)

Die Wellengleichung

für stehende Wellen (mit $\nu = \infty$). Hier kann man jedoch nicht von einer wirklichen Ausbreitung der Wellen sprechen.

2.6 Ergänzende Tabellen

	0.O(x)	1.O(x)	2.O(x)
0.O(t)		$d_x u(x) = 0$ (Def. eines räuml. Extremums)	$d_x^2 u(x) = \alpha(x)$ (Poisson-Gleichung) $d_x^2 u(x) + \alpha u(x) = 0$ (Helmholtz-Gleichung)
1.O(t)	$d_t u(t) = 0$ (Def. eines zeitl. Extremums) $d_t u(t) = \alpha u(t)$ (exp. Wachstum/Zerfall)	$\alpha \partial_t u^0(x, t) + \partial_x u^1(x, t) = 0$ (Kontinuitätsgleichung) ($u^0 = Ladungs-, u^1 = Stromdichte$) $(\alpha \partial_t u(x, t))^2 = \partial_x u(x, t)$ (Gleichgewicht zwischen E_{Pot} & E_{Kin}) $\partial_t u(x, t) + \alpha(x) \partial_x u(x, t) = 0$ (Transportgleichung)	$\alpha \partial_x^2 u(x, t) = \partial_t u(x, t)$ (Diffusionsgleichung)
2.O(t)	$d_t^2 u(t) = 0$ (Def. der linearen Bewegung) $d_t^2 u(t) + \alpha d_t u(t) + \beta u(t) = f(t)$ (allg. Schwingungsgleichung)		$(\partial_t - \alpha \partial_x)(\partial_t - \alpha \partial_x)u(x, t) = f(x, t)$ (Wellengleichung)

Tabelle 4: Einige wesentliche Gleichungen der physikalischen Beschreibung ($\alpha = const$)

Definition	Bezeichnung	Beschreibung
$i\hbar\partial_t\psi(x, t) = [-\frac{\hbar^2}{2m}\Delta + V(x, t)]\psi(x, t)$	Schrödinger-Gleichung	nichtrelativistische QM
$(\frac{1}{c^2}\partial_t^2 - \Delta)\psi(x, t) = (\frac{mc}{\hbar})^2\psi(x, t)$	Klein-Gordon-Gleichung	relativistische QM ohne Spin
$i\sum_{k=0}^3 \gamma^k \partial_k \psi(x, t) + \frac{mc}{\hbar} \psi(x, t) = 0$	Dirac-Gleichung	relativistische QM mit Spin
$(\frac{1}{c^2}\partial_t^2 - \Delta)u(x, t) + m^2u(x, t) = \sin(\mathbf{q}\mathbf{u}(x, t))$	Sinus-Gordon-Gleichung	z.B. Dynamik von Josephsonkontakten
$\partial_t u(x, t) + 6u(x, t)\partial_x u(x, t) + \partial_x^3 u(x, t) = 0$	Korteweg-de-Fries-Gleichung	nichtlineare Gleichung für Wasserwellen

Tabelle 5: Weitere wichtige Gleichungen der Physik.

Ebene Wellen	<p>Definition Phasenfl. = Ebenen senkrecht zur Ausbreitungsrichtung</p> $u(\vec{x}, t) = \sum u_n e^{i(\omega_n t - \vec{k}_n \vec{r})}$
Kugelwellen	<p>Definition Phasenfl. = Kugelflächen senkrecht auf die radiale Ausbreitungsrichtung</p> <p>Quelle (singular im Urspr.)</p> $u(\vec{x}, t) = \sum \frac{u_n}{r} e^{i(\omega_n t - \vec{k}_n \vec{r})}$ <p>Stehende Welle (regulär im Urspr.)</p> $u(\vec{x}, t) = \sum (A_{mn} \cos(m\phi) P_n^m(\cos \theta) j_m(kr) + B_{mn} \sin(m\phi) P_n^m(\cos \theta) j_m(kr)) e^{i\omega t}$ <p>($P_m^n(\cos \theta) = Legendre\text{-Polynome}$, $j_m(kr) = sphärische\ Bessel\text{-Funktionen}$)</p>
Zylinderwellen (Rot.symmetr.)	<p>Definition Phasenfl. = Zylinderflächen senkrecht auf die radiale Ausbreitungsrichtung</p> <p>Quelle</p> $u(\vec{x}, t) = \sum A_m H_m(kr) \cos(m\phi) e^{i\omega t}$ $H_m(kr) = Hankel\text{-Funktionen}$
	<p>Stehende Welle</p> $u(x, t) = \sum [A_m \cos(m\phi) + B_m \sin(m\phi)] J\left(\frac{\pi \beta_{m,r}}{a}\right) e^{i\omega t}$ <p>($J\left(\frac{\pi \beta_{m,r}}{a}\right) = Bessel\text{-Funktionen}$)</p>

Tabelle 6: Überblick über die Struktur der Wellenlösung

3 Das physikalische Modell

3.1 Grundlegendes

3.1.1 Die Kenngrößen einer Welle

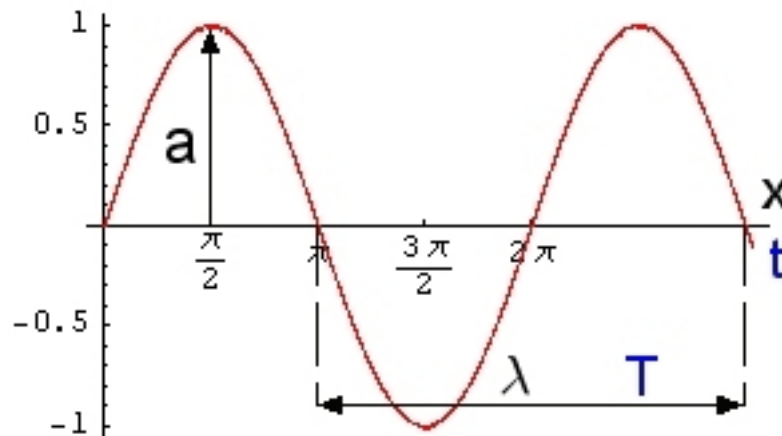


Abbildung 6: Die Kenngrößen einer harmonischen Welle

Wir haben nun einige mathematische Aspekte der Wellengleichung diskutiert. Jetzt wollen wir uns der physikalischen Anwendung des Modells zuwenden. Zunächst wollen wir den Größen der Lösungsfunktion eine physikalische Bedeutung zukommen lassen. Dazu betrachten wir jetzt das denkbar einfachste Beispiel, nämlich eine harmonische, ebene Welle

$$u(x, t) = a \sin\left(\frac{2\pi}{\lambda}(vt - x)\right) = a \sin\left(2\pi\left(ft - \frac{x}{\lambda}\right)\right) = a \sin\left(\omega\left(t - \frac{x}{v}\right)\right) = a \sin(\omega t - kx)$$

und die darin auftretenden Größen heißen (vgl. Abbildung 6)

- $u(x, t)$ momentane Auslenkung von der Ruhelage
- a Amplitude, d.h. der größte Absolutwert, den eine Größe annehmen kann, die sich periodisch in der Zeit bzw. im Raum ändert
- λ Wellenlänge, d.h. der Abstand im Raum zwischen zwei Punkten einer Welle, die sich im gleichen Schwingungszustand (Phase) befinden
SI-Einheit: [m]
- k Wellenzahl, d.h. $k = 2\pi/\lambda$
SI-Einheit: [m^{-1}]

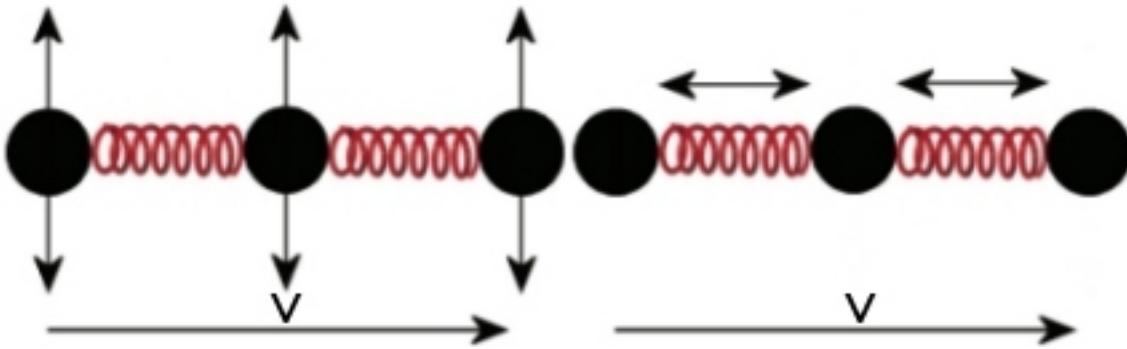


Abbildung 7: Zur transversalen bzw. longitudinalen Ausbreitung von Wellen

T	<i>Schwingungsdauer</i> , d.h. der zeitliche Abstand zwischen zwei Punkten gleicher Phase SI-Einheit: [s]
f	<i>Frequenz</i> , d.h. $f = 1/T$ SI-Einheit: [s^{-1}]
ω	<i>Kreisfrequenz</i> , d.h. $\omega = 2\pi f = 2\pi/T$ SI-Einheit: [s^{-1}]
v	<i>Phasengeschwindigkeit</i> , d.h. die Geschwindigkeit mit der sich eine Phase der Welle (z.B. der Wellenberg) ausbreitet. formal: $v = \omega/k = f\lambda = \lambda/T$ SI-Einheit: [ms^{-1}]

Damit haben wir unsere harmonische Welle vollständig festgelegt. Bei allgemeineren Konzepten (wie z.B. dem Wellenpaket) erweist es sich als sinnvoll, noch weitere Begriffe einzuführen. So definiert man die **Gruppengeschwindigkeit** (Geschwindigkeit des Schwerpunkts eines Wellenpaketes), die **Signalgeschwindigkeit** (Geschwindigkeit der Einhüllenden eines beliebig geformten Wellenpaketes), usw.

Wir betonen an dieser Stelle noch einmal, dass harmonische, ebene Wellen ein prinzipiell theoretisches Konstrukt sind. In der Praxis werden alle (zumindest die von Menschenhand erzeugten) Wellen von einer Quelle erzeugt, die tatsächlich irgendwann ein- und ausgeschaltet wird. Dies führt dazu, dass die Beschreibung als monofrequente Schwingung nur eine Approximation ist; präziser wäre die Darstellung mittels Fourieranalyse mit einem schmalbandigen Spektrum.

3.1.2 Die Einteilung in transversal/longitudinal

Die physikalisch wichtigste Klassifikation ist die Einteilung in "transversal/longitudinal". Die Unterscheidung lautet (vgl. auch Abbildung 7)

Die Wellengleichung

transversal Die für die Ausbreitung charakteristische Größe schwingt normal (transversal) zu ihrer Ausbreitungsrichtung (typisches Beispiel: elektromagnetische Welle).

longitudinal Die für die Ausbreitung charakteristische Größe schwingt in Richtung ihrer Ausbreitung (typisches Beispiel: Schallwellen).

Diese Einteilung ist im allgemeinen nur für isotrope Medien gültig. In anisotropen Medien können Wellen auftreten, die sowohl longitudinale als auch transversale Komponenten aufweisen. Dies trifft z.B. für Wasserwellen zu, wo sich die Wassermoleküle an der Oberfläche auf Kreisbahnen bewegen.

Das Kennzeichen von transversalen Wellen ist die **Polarisation**, d.h. die Ausrichtung der Schwingungsgröße in eine bestimmte Richtung. Wenn man z.B. in einen Karton einen hinreichend kleinen Schlitz macht, kann man damit Licht (d.h. elektromagnetische Wellen) polarisieren. Stellt man eine zweite Scheibe quer¹⁵ zum ersten Schlitz, so kann kein Licht durch beide Schlitze hindurch gehen.

Bei der Polarisation unterscheidet man noch zwischen

- linear
- zirkular
- elliptisch
- unpolarisiert

(d.h. nach der Änderung der Richtung bzw. des Betrages des für die Polarisation charakteristischen Feldvektors)

bzw.

- linkspolarisiert
- rechtspolarisiert

(d.h. nach dem eventuellen Drehsinn der Polarisation bezogen auf die Ausbreitungsrichtung)

3.1.3 Die physikalischen Charakteristika von Wellen

Wenn wir uns auf lineare Wellen beschränken, gilt das Superpositionsprinzip. Physikalisch führt diese Eigenschaft zum Begriff der **Interferenz**, d.h. das sich Wellen so überlagern, als dass sich die Amplituden der Einzelwellen am gleichen Ort und zur gleichen Zeit addieren. Im Prinzip gelangen wir gerade auf diesem Wege zu unserem Wellenpaket, und zwar genau dann, wenn wir Wellen mit verschiedener Frequenz überlagern. Um jedoch ein stationäres Wellenfeld zu erhalten, muss **Kohärenz** vorliegen. In anderen Worten: die Teilwellen müssen die gleiche Frequenz, gleiche Polarisation und einen am

¹⁵d.h. der relative Winkel zwischen beiden Schlitzen = 90 Grad

fixen Orte gleichbleibenden Phasenunterschied aufweisen.

Betrachten wir nun konkret die Überlagerung zweier harmonischer Wellen

$$\mathbf{u}(x, t) = \mathbf{u}_1(x, t) + \mathbf{u}_2(x, t) = A_1 e^{i(\omega t - kx)} + A_2 e^{i(\omega t - kx + \varphi_0)} = e^{i(\omega t - kx)} (A_1 + A_2 e^{i\varphi_0})$$

Die Addition der beiden konstanten Amplituden in der Klammer (unter Berücksichtigung des Phasenfaktors $e^{i\varphi_0}$) erfolgt am Einfachsten vektoriell in der komplexen Zahlenebene. Für das Dreieck der betreffenden Amplituden folgt mittels *Kosinus-Satz*¹⁶

$$\mathbf{u}(x, t) = \mathbf{u}_R(x, t) e^{i(\omega t - kx + \varphi'_0)}$$

mit

$$u_R(x, t) = \sqrt{u_1(x, t)^2 + u_2(x, t)^2 + 2u_1(x, t)u_2(x, t) \cos(\varphi_0)}$$

wobei

$$\tan \varphi'_0 = \frac{A_2 \sin \varphi_0}{A_1 + A_2 \cos \varphi_0}$$

Interferenz drückt sich in dieser Formel durch den Term $2u_1 u_2 \cos(\varphi_0)$ aus. Die beiden Extremfälle lauten

- $\varphi_0 = (2n + 1)\pi \Leftrightarrow$ destruktive Interferenz (gegenphasige Wellen)
- $\varphi_0 = 2n\pi \Leftrightarrow$ konstruktive Interferenz (gleichphasige Wellen)

Interferenz ist sehr Grundlegend. Wir können im Prinzip sogar stehende Wellen als Superposition zweier entgegengesetzter Wellen (gleicher Frequenz und Amplitude) auffassen.

Aus der Interferenz-Eigenschaft leitet sich die **Beugung** ab. Bei der Ausbreitung von Wellen kommt es nämlich zu einer Abweichung von der geradlinigen Fortbewegungsrichtung, und zwar an den Rändern von Öffnungen oder Hindernissen. Beides führt dabei zum gleichen Beugungsbild, vorausgesetzt das Hindernis hat die gleiche Form wie die Öffnung.

Die **Brechung**¹⁷ bzw. **Reflexion**¹⁸ ist nicht unbedingt charakterisierend. Vieles kann auch mit dem Teilchenbegriff verstanden werden (wie z.B. das Brechungsgesetz), aber nicht alles (wie z.B. die frustrierte Totalreflexion).

Der **Doppler-Effekt** hingegen, ist wieder ein typisches Wellenphänomen, und zwar verändert sich die Frequenz, wenn sich Quelle und Beobachter relativ zueinander bewegen. Dies kann für Schallwellen z.B. an einem vorbeifahrenden Auto beobachtet werden. Wie man aus dem Alltag weiß, verändert sich bei diesem Vorgang das Motorengeräusch.

¹⁶ zur lieben Erinnerung: $a^2 = b^2 + c^2 - 2ab \cos(\alpha)$

¹⁷ Änderung der Richtung einer Welle, wenn sie die Trennfläche zwischen zwei Medien durchdringt, in denen ihre Ausbreitungsgeschwindigkeit unterschiedlich ist.

¹⁸ Zurückwerfen der Welle an der Grenzfläche zwischen zwei Medien

Dispersion ist ein Phänomen, welches insbesondere bei Wellenpaketen auftritt, die durch lineare Wellengleichungen bestimmt sind. Sie gibt die Abhängigkeit der Phasengeschwindigkeit von der Wellenlänge wieder. Beispielsweise verursacht sie die Aufspaltung der Spektralfarben, wenn Licht durch ein Glasprisma geht. Bei der Dispersion unterscheidet man zwischen **normal** (d.h. die Phasengeschwindigkeit fällt mit zunehmender Frequenz) und **anormal** (Phasengeschwindigkeit steigt mit zunehmender Frequenz). Während lineare Wellenpakete aufgrund der Dispersion im Laufe der Zeit deformiert werden, können nichtlineare durchaus von hoher Beständigkeit sein; die bereits erwähnten Solitonen.

3.1.4 Beispiele für Wellen

Wir geben hier tabellarisch ein paar Beispiele für die Anwendung des Wellenkonzeptes. Diese sind zwar sehr symptomatisch, aber sie zeigen nicht die Vielfältigkeit der Lösungssituationen. Denn wir beschränken uns in Tabelle 7 auf den einfachsten Fall der linearen Wellengleichung.

3.2 Der Vergleich zwischen Wellen und Diffusionen

Wir besprechen nun kurz die Diffusion. Der formale Übergang zwischen Diffusion und Wellen wird besonders in der Quantenmechanik deutlich, und wir werden später noch darauf zurückkommen.

Diffusion bedeutet: das gegenseitige Durchdringen von anfangs getrennten Substanzen bei Abwesenheit von äußeren Kräften bzw. chemischen Reaktionen. Im ursprünglichen Sinne des Wortes wird Diffusion somit durch thermische (Brownsche) Bewegung der Teilchen verursacht, und die Bewegung erfolgt im allgemeinen gemäß einer möglichst gleichmäßigen Verteilung der (eventuell unterschiedlichen) Teilchen¹⁹. Im Spezialfall des Diffundierens durch eine poröse Wand spricht man von **Osmose**. Im weiteren Sinne des Wortes gibt es noch

- atomare Diffusion
- Impuls-Diffusion
- Elektronen-Diffusion
- Wärme-Diffusion

Sie tritt aber auch in einem abstrakteren Kontext auf, wie z.B. der Populationsdynamik. Diffusion ist ein typisches Transportphänomen, ebenso wie z.B. Strahlung. Sie charakterisiert somit keinen Gleichgewichtszustand und in der Diffusionsgleichung tritt deswegen eine explizite Zeitableitung auf. Zu unterscheiden ist sie insbesondere von der **Konvektion**, der Bewegung von Molekülen innerhalb von Gasen oder Flüssigkeiten aufgrund von Temperaturunterschieden.

Das formale Problem lautet ($k = \text{Diffusionskonstante}$)

¹⁹Gegenbeispiel: Phasenseparation

	L./T.	Wellengleichung	Phasengeschwindigkeit
Schallwellen (elast. W. in fluidem Kö.) <i>Druck p</i>	L	$\partial_t^2 p = \frac{1}{\kappa \rho} \partial_x^2 p$	$v = \sqrt{\frac{1}{\kappa \rho}}$ $\kappa = \text{Kompressibilität}$ $\rho = \text{Dichte}$
(elast. W. in festem Kö.) <i>Schubspannung σ</i>	L/T	$\partial_t^2 \sigma = \frac{E}{\rho} \partial_x^2 \sigma$	$v = \sqrt{\frac{E}{\rho}}$ $E = \text{Schubmodul für L}$ $G = \text{Schermodul für T}$
Elektromagn. Wellen <i>elektr. Feldstärke E</i> <i>magnet. Feldstärke B</i>	T	$\partial_t^2 \vec{E} = \frac{1}{\epsilon \epsilon_0 \mu \mu_0} \Delta \vec{E}$ $\partial_t^2 \vec{B} = \frac{1}{\epsilon \epsilon_0 \mu \mu_0} \Delta \vec{B}$	$v = \frac{1}{\sqrt{\epsilon \epsilon_0 \mu \mu_0}}$ $\epsilon = \text{Dielektr.konstante}$ $\epsilon_0 = \text{Influenzkonstante}$ $\mu = \text{Permiabilität}$ $\mu_0 = \text{Vakuumpermiabilität}$
Seilwelle <i>Auslenk. von Ruhelage z</i> (normal zu x)	T	$\partial_t^2 z = \frac{F}{\mu} \partial_x^2 z$	$v = \sqrt{\frac{F}{\mu}}$ $F = \text{Kraft der Saitenspannung}$ $\mu = \text{Massendichte}$
Transmissionslinie <i>Spannung U</i> <i>Stromstärke I</i>	L	$\partial_t^2 U = \frac{1}{\mu \epsilon} \partial_x^2 U$ $\partial_t^2 I = \frac{1}{\mu \epsilon} \partial_x^2 I$	$v = \frac{1}{\sqrt{\epsilon \mu}}$

Tabelle 7: Beispiele für Wellen (L = *Longitudinal*, T = *Transversal*)

Die Wellengleichung

$$\boxed{\frac{\partial u(x, t)}{\partial t} = k \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2}} \quad \text{AWP} \quad u(x, 0) = f(x)$$

$$x \in [-\infty, \infty] \\ t \in [0, \infty]$$

Gelöst wird dies durch

$$\boxed{u(x, t) = \int_{-\infty}^{\infty} G(x, t, x') f(x') dx'} \quad (14)$$

mit der *Greenschen Funktion*

$$\boxed{G(x, t; x', 0) = \frac{1}{2\sqrt{\pi t}} e^{-\frac{(x'-x)^2}{4a^2 t}}}$$

Die Diffusionsgleichung wird beispielsweise mit der Laplace-Transformation gelöst. Für den inhomogenen Fall verwendet man die Greensche Funktion und man erhält einen, zur Lösung der Wellengleichung vergleichbaren Zusatzterm. Dabei ist zu betonen, dass das Diffusionsproblem im allgemeinen nicht analytisch lösbar ist.

Um unserer Gleichung (14) eine semi-physikalische Bedeutung zukommen zu lassen, betrachten wir die eindimensionale Brownsche Molekularbewegung, d.h. die Partikel bewegen sich zufällig innerhalb einer langen Röhre. Für dieses Beispiel entspricht $f(x)$ der *Anfangswahrscheinlichkeitsdichte*²⁰ und $u(t, x)$ der *Wahrscheinlichkeitsdichte* zu allen späteren Zeitpunkten.

Abschließend wollen wir Wellen und Diffusionen tabellarisch vergleichen

Eigenschaft	Wellen	Diffusionen
Ausbreitungsgeschwindigkeit	Endlich	Unendlich
AWP		
korrekt für $t < 0$?	Ja	Ja (bei beschränkter Lsg.)
korrekt für $t > 0$?	Ja	Nein
Verhalten bei $t \rightarrow \infty$	nehmen nicht ab	gehen gegen 0 ($f(x) = \text{integrierbar}$)
Information	wird transportiert	geht allmählich verloren

Damit wenden wir uns der Quantenmechanik zu...

3.3 Die abstrakten Wellen der Quantenmechanik

3.3.1 Die Schrödinger-Gleichung

Als Ausklang wollen wir zwei Wellengleichungen der modernen Physik besprechen. Zunächst zur Schrödinger-Gleichung. Sie stellt die Grundgleichung der nichtrelativistischen Quan-

²⁰ Wahrscheinlichkeitsdichte = "Wahrscheinlichkeit pro Längeneinheit"

tenmechanik dar. Ausgangspunkt sind die abstrakten *de Broglie-Wellen*

$$\psi(\mathbf{x}, t) = A e^{i(\mathbf{k}\mathbf{x} - \omega t)} = A e^{(i/\hbar)(p\mathbf{x} - Et)} \quad (15)$$

mit den Ableitungen

$$\partial_{\mathbf{x}}^2 \psi = -\frac{1}{\hbar^2} p^2 A e^{(i/\hbar)(p\mathbf{x} - Et)} = -\frac{2m}{\hbar^2} E_{\text{kin}} \psi \quad \text{bzw.} \quad \partial_t \psi = -\frac{i}{\hbar} E_{\text{kin}} \psi$$

Diese beiden Ergebnisse können wir zu

$$\boxed{-\frac{\hbar^2}{2m} \partial_{\mathbf{x}}^2 \psi(\mathbf{x}, t) = i\hbar \partial_t \psi(\mathbf{x}, t)}$$

verbinden.

Dies ist die *eindimensionale, zeitabhängige Schrödinger-Gleichung*. Gelöst wird sie durch

$$\boxed{\psi(\mathbf{x}', t') = \sqrt{\frac{m}{2\pi i \hbar t}} \int e^{\frac{im(\mathbf{x}' - \mathbf{x})^2}{2\hbar t'}} \psi(\mathbf{x}, 0) d\mathbf{x}} \quad (16)$$

Ein paar Wesentlichkeiten dieser Gleichung sind

- die allgemeine Form der Schrödinger-Gleichung lautet:

$$\boxed{\left[-\frac{\hbar^2}{2m} \Delta + V(\mathbf{x}, t)\right] \psi(\mathbf{x}, t) = i\hbar \partial_t \psi(\mathbf{x}, t)}$$

- sehr oft hat man es mit Randwert- bzw. stationären Problemen zu tun. Ein sehr bekanntes Beispiel: Energie(eigen-)werte des Wasserstoffatoms
- die Schrödinger-Gleichung kann auch nichtlinear sein, z.B. für $V(\mathbf{x}, t) = -\hbar\gamma|\psi|^2$
- beschreibt nichtrelativistische Teilchen/Systeme

Ein wichtiges Merkmal der Schrödinger-Gleichung ist ihr Bezug zur Diffusionsgleichung. In der Tat können wir nämlich (bis auf die unterschiedlichen Konstanten) das Eine in das Andere überführen, und zwar durch eine **Wick-Rotation**. Darunter versteht man, die analytische Fortsetzung einer Theorie im (reellen) Euklidischen Raum zu einer Theorie im (komplexen) Minkowski-Raum. Im konkreten Fall führen wir die *imaginäre Zeit* $it = \tau$ ein. Einsetzen in Gleichung (16) ergibt

$$u(\mathbf{x}', -i\tau') = \sqrt{\frac{m}{2\pi\hbar\tau}} \int e^{-\frac{m(\mathbf{x}' - \mathbf{x})^2}{2\hbar\tau'}} u(\mathbf{x}, 0) d\mathbf{x}$$

und dies ist (bis auf **const.**) äquivalent zu Gleichung (14) (eingesetzt in $u(\mathbf{x}', t')$). Auf die gleiche Art und Weise kann man die Schrödinger- in die Diffusionsgleichung überführen. Dieser Zusammenhang hat dabei natürlich nur einen rein formalen Charakter, da es physikalisch gesehen nicht trivial ist, Konstanten einfach gleich Eins zu

Die Wellengleichung

setzen²¹. Apropos, über die Wick-Rotation ist auch die Schwingungs- mit der exponentiell beschleunigten Bewegung verknüpft.

Die de-Broglie-Wellen (vgl. Gleichung (15)) stellen ein weiteres Beispiel für überlichtschnelle Wellen dar. Denn für ein relativistisches Teilchen mit *Ruhemasse* m , welches sich mit der *Geschwindigkeit* v bewegt, lauten *Impuls* und *Energie*

$$\mathbf{p} = \frac{m\mathbf{v}}{\sqrt{1-(\frac{v}{c})^2}} \quad \text{bzw.} \quad E = \frac{mc^2}{\sqrt{1-(\frac{v}{c})^2}}$$

Für die *Phasengeschwindigkeit* v_{ph} ergibt sich zusammen mit $E = \hbar\omega$ und $\mathbf{p} = \hbar\mathbf{k}$

$$v_{\text{ph}} = \frac{\omega}{k} = \frac{E}{p} = \frac{c^2}{v}$$

Für Lichtwellen ist $v_{\text{ph}} = c$, wohingegen Teilchen mit Ruhemasse gerade eine Phasengeschwindigkeit größer als die Lichtgeschwindigkeit haben²² (da ja $v = v_{\text{Teilchen}} < c$). In einem gewissen Sinne scheint diese Superluminalität zur Mystik der Quantenmechanik zu gehören. Man begegnet ihr auch beim EPR-Paradoxon sowie beim Tunneleffekt.

Wenn wir hier von einem relativistischen Teilchen sprechen, so tragen wir de Broglie's Vorstellung Rechnung. Dem Rahmen der nichtrelativistischen Schrödinger-Gleichung entspricht eher ein Teilchen mit dem klassischen Impuls $\mathbf{p} = m\mathbf{v}$ bzw. der Energie $E = mv^2/2$. Berechnen wir nun wiederum die Phasengeschwindigkeit, so folgt durch Vergleich mit dem relativistischen Resultat

$$c' = \frac{1}{\sqrt{2}}v$$

Der nichtrelativistische Fall entspricht somit der Näherung für die *fiktive Lichtgeschwindigkeit* c' .

3.3.2 Die Klein-Gordon-Gleichung

Die Klein-Gordon-Gleichung entspringt dem *relativistischen Energieerhaltungssatz*

$$p^\mu p_\mu = \frac{E^2}{c^2} - \vec{p}\vec{p} = m^2c^2$$

wobei

$$\text{für den kontravarianten Impuls gilt:} \quad p^\mu = \left(\frac{E}{c}, \vec{p}\right)$$

$$\text{für den kovarianten Impuls gilt:} \quad p_\mu = \left(\frac{E}{c}, -\vec{p}\right)$$

²¹ In diesem Zusammenhang wäre eigentlich eine Reskalierung der Zeitachse (die die Konstanten "ineinander" überführt) angebracht.

²² Die zur Teilchengeschwindigkeit korrespondierende Wellengeschwindigkeit ist die Gruppengeschwindigkeit.

Dabei haben wir auch das *relativistische Skalarprodukt* $p^\mu p_\mu = \frac{E}{c} \frac{E}{c} - \vec{p} \vec{p}$ verwendet. Zusammen mit den "Korrespondenzen" $\vec{p} \rightarrow -i\hbar \nabla$, $E \rightarrow i\hbar \partial_t$ ergibt sich

$$-\hbar^2 \partial^\mu \partial_\mu = m^2 c^2$$

und nach rechtsseitiger Multiplikation mit ψ

$$\boxed{[\partial^\mu \partial_\mu + (\frac{mc}{\hbar})^2] \psi(x, t) = 0} \quad (17)$$

also die *Klein-Gordon-Gleichung* fürs freie Teilchen.

Die Lösung lautet (wiederum für $u(x, 0) = a(x)$, $d_t u(x, 0) = b(x)$)

$$\boxed{u(x, t) = \frac{1}{2} [a(x+ct) + a(x-ct)] - \frac{1}{2} \frac{mc^2}{\hbar^2} \int_{x-ct}^{x+ct} \frac{a(y) I_1[\frac{mc}{\hbar} \lambda]}{\lambda} dy + \frac{1}{2c} \int_{x-ct}^{x+ct} b(y) I_0[\frac{mc}{\hbar} \lambda] dy}$$

mit den *modifiz. Bessel-Funktionen*

$$\boxed{I_i[\frac{mc}{\hbar} \lambda] = I_i[\frac{mc}{\hbar} \sqrt{(x-y)^2 - c^2 t^2}]}$$

Die Bezeichnung lehnt sich an jener der d'Alembertschen Lösungsformel an. An dieser Stelle wieder nur einige Wesentlichkeiten...

- die *allgemeine Klein-Gordon-Gleichung* (d.h. die um die Kopplung ans elektromagnetische Feld erweiterte Gl.) lautet ($A =$ Vektorpotential)

$$\boxed{(p^\mu - \frac{e}{c} A^\mu)(p_\mu - \frac{e}{c} A_\mu) \psi(x, t) = (\frac{mc}{\hbar})^2 \psi(x, t)}$$

- da die Klein-Gordon-Gleichung durch den (skalaren) Energieerhaltungssatz ableitbar ist, beschreibt sie nur skalare, relativistische Teilchen (z.B. π -Mesonen).
- im Vgl. zur Schrödinger-Gleichung muss man die Lösung anders interpretieren. Denn man kann keine positiv-definite Definition einer Wahrscheinlichkeit finden. Die, gemäß der Kontinuitätsgleichung abgeleitete Wahrscheinlichkeitsdichte des nichtrelativistischen Falles, wird hier wieder zu einer Ladungsdichte.
- die freien Lösungen der Klein-Gordon-Gleichung lauten

$$\psi(x, t) = e^{-(i/\hbar)(Et - \vec{p}\vec{x})} \quad \text{mit} \quad E = \pm c \sqrt{m^2 c^2 + p^2}$$

Dabei beschreiben die Lösungen zu positiver Energie Teilchen, wohingegen die Lösungen zu negativer Energie Antiteilchen charakterisieren.

- Für die Ruhemasse $m = 0$ folgt die "gewöhnliche" Wellengleichung. Dies gilt in diesem Sinne für Photonen.

Abschließend wollen wir uns fragen: Können wir vielleicht einen Zusammenhang zwischen Schrödinger- und Klein-Gordon-Gleichung finden?

3.3.3 Schrödinger-GI in Klein-Gordon-Form & vice versa

Wir haben nun die beiden wichtigsten (skalaren) Gleichungen der Quantenmechanik kurz besprochen. Aber wie hängen sie zusammen? Lassen sie sich gar ineinander überführen? Nun, probieren wir unser Glück!

Dazu gehen wir von der allgemeinen Form für die Schrödinger-Gleichung (vgl. 3.3.1) aus. Die Zerlegung in einen Real- und einen Imaginärteil, d.h. der Ansatz $\psi(x, t) = u(x, t) + iv(x, t)$ führt auf

$$\partial_t u = \left(-\frac{\hbar^2}{2m}\Delta + V(x, t)\right)v \quad \text{bzw.} \quad -\partial_t v = \left(-\frac{\hbar^2}{2m}\Delta + V(x, t)\right)u$$

Bildung der zweiten Zeitableitung und Einsetzen der jeweiligen ersten Ableitung führt auf

$$\partial_t^2 v = -\left(-\frac{\hbar^2}{2m}\Delta + V(x, t)\right)^2 v \quad \text{bzw.} \quad \partial_t^2 u = -\left(-\frac{\hbar^2}{2m}\Delta + V(x, t)\right)^2 u$$

Dies ist unser Ergebnis. Die Schrödinger-Gleichung lässt sich somit in zwei Gleichungen 2. Ordnung in der Zeit zerlegen. Dadurch entstehen jedoch Terme 4. Ordnung in den Ableitungen nach der Ortsvariable.

Probieren wir jetzt noch den umgekehrten Weg! Dazu gehen wir von zwei Funktionen aus, die mit $\psi(x, t)$ folgendermaßen verknüpft sind.

$$u(x, t) = \psi(x, t) + \frac{i\hbar}{mc^2}\partial_t\psi(x, t) \quad \text{bzw.} \quad v(x, t) = \psi(x, t) - \frac{i\hbar}{mc^2}\partial_t\psi(x, t)$$

Daraus folgt

$$\psi = \frac{1}{2}(u + v) \quad \text{bzw.} \quad \partial_t\psi = \frac{mc^2}{2i\hbar}(u - v)$$

Damit ist Gleichung (17) äquivalent zu den Gleichungen

$$i\hbar\partial_t u = -\frac{\hbar^2}{2m}\Delta(u + v) + mc^2 u \quad \text{bzw.} \quad i\hbar\partial_t v = -\frac{\hbar^2}{2m}\Delta(u + v) + mc^2 v$$

Beweis? Nun Addition/Subtraktion der beiden Gleichungen ergibt

$$\begin{aligned} i\hbar\partial_t(u + v) &= mc^2(u - v) & (18) \\ i\hbar\partial_t(u - v) &= -\frac{\hbar^2}{2m}\Delta(u - v) + mc^2(u - v) \end{aligned}$$

Gleichung (18) führt durch Vergleich mit unserem Ansatz zur Trivialaussage $\partial\psi/\partial t = \partial\psi/\partial t$. Aus dem Ergebnis der Subtraktion können wir jedoch die Klein-Gordon-Gleichung gewinnen, und zwar indem wir unseren Ansatz im umgekehrten Sinne verwenden

$$i\hbar\partial_t\left(\frac{i\hbar}{mc^2}\partial_t\psi\right) = -\frac{\hbar^2}{m}\frac{1}{c^2}\partial_t^2\psi = -\frac{\hbar^2}{m}\Delta\psi + mc^2\psi$$

und somit folgt

$$\frac{1}{c^2}\partial_t^2\psi = \Delta\psi - \frac{m^2c^2}{\hbar^2}\psi$$

Damit haben wir auch den gegengleichen Weg beschritten und aus der Klein-Gordon-Gleichung (als DG 2. Ordnung in der Zeit) zwei Gleichungen 1. Ordnung in t gemacht. Was wir aus diesen Betrachtungen lernen können? Gute Frage; vielleicht denken Sie, geschätzter Leser, ein wenig darüber nach.

Hier schließt sich der Vorhang vor diesem Werk, und es öffnet sich ein anderer, und zwar in Form des Literaturverzeichnisses.

4 Postscriptum

4.1 Weiterführende Literatur

- Das mathematische Modell
 - *Höhere Mathematik* Bd.II, MEYBERG, VACHENAUER, (1997)
 - *Lineare und nichtlineare Schwingungen und Wellen*, KNEUBÜHL, (1995)
 - *Methoden der mathematischen Physik* Bd.II, COURANT, HILBERT, (1968)
 - *Methods of theoretical physics* Bd.I, FESHBACH, MORSE, (1953)
 - *Methods of theoretical physics* Bd.II, FESHBACH, MORSE, (1953)
 - *Partielle Differentialgleichungen*, STRAUSS, (1995)
- Das physikalische Modell
 - *Experimentalphysik* Bd.I, DEMTRÖDER, (1998)
 - usw.

4.2 Mail to author

Haben Sie in diesem Dokument einen Fehler entdeckt? Prima! Dann schreiben Sie mir doch sogleich! Bitte!

- e-m@il: pfannerg@stud.uni-graz.at
- web: <http://www-stud.uni-graz.at/~pfannerg/>

4.3 Ehrentafel

Für sachdienliche Hinweise bedanke ich mich recht herzlich bei

- AO. Univ. Prof. Dr. BERND THALLER
- THOMAS C. LANG
- SEBASTIAN KAPFER