

# Gleichstromführendes Koaxialkabel

Hendrik van Hees

15. Juni 2009

## Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Einleitung</b>	<b>1</b>
<b>2</b>	<b>Das elektrische Feld</b>	<b>2</b>
<b>3</b>	<b>Das Magnetfeld</b>	<b>4</b>
<b>4</b>	<b>Die Energiestromdichte (Poyntingvektor)</b>	<b>6</b>
<b>5</b>	<b>Zweiadriges Kabel</b>	<b>7</b>
<b>6</b>	<b>Voll relativistische Theorie</b>	<b>11</b>
6.1	Die kovariante Form der Maxwellgleichungen im Vakuum . . . . .	11
6.2	Die Materialgleichungen für ein homogenes und isotropes Medium . . . . .	16
6.3	Das Koaxialkabel (relativistisch) . . . . .	20
<b>A</b>	<b>Die Differentialoperatoren in Bipolarzylinderkoordinaten</b>	<b>22</b>

## 1 Einleitung

In diesem Artikel wollen wir die unlängst in `de.sci.physik` aufgekommene Frage nach dem Energietransport in einem gleichstromdurchflossenen Leiter klären. Dazu betrachten wir ein etwas idealisiertes Problem eines unendlichen langen zylindrischen Koaxialkabels. Wir legen es in  $z$ -Richtung eines Zylinderkoordinatensystems  $(\rho, \varphi, z)$ . Der Strom im Innenleiter ( $0 < \rho < a$ ) möge in positive  $z$ -Richtung fließen, im Außenleiter ( $b < \rho < c$  mit  $a < b$ ) in umgekehrte Richtung zurück. Die Leitfähigkeit sei  $\sigma$ . Im Inneren der vier Gebiete (Innenleiter, Zwischenraum, Außenleiter und Außenraum) lauten die zu lösenden Gleichungen

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \vec{E} &= 0, & \operatorname{div} \vec{E} &= 0, & \vec{j} &= \sigma \vec{E}, \\ \operatorname{rot} \vec{H} &= \vec{j}, & \operatorname{div} \vec{B} &= 0, & \vec{B} &= \mu \vec{H}. \end{aligned} \tag{1}$$

Wie wir sehen werden, bauen sich an den Leiteroberflächen notwendig Flächenladungsdichten auf, die durch die Sprünge der Radialkomponente von  $\vec{E}$  gegeben sind. Wir wollen die auf den

stationären Fall spezialisierten Maxwell-Gleichungen (1) vollständig lösen, also  $\vec{E}$  und  $\vec{B}$  aus diesen Gleichungen und den Stetigkeitsbedingungen ermitteln und sodann die Energiestromdichte (Poynting-Vektor) betrachten

$$\vec{S} = \vec{E} \times \vec{H}. \quad (2)$$

Aus (1) folgt

$$\operatorname{div} \vec{S} = \vec{\nabla}_E(\vec{E} \times \vec{H}) + \vec{\nabla}_H(\vec{E} \times \vec{H}) = \vec{H} \operatorname{rot} \vec{E} - \vec{E} \operatorname{rot} \vec{H} = -\vec{E} \vec{j}, \quad (3)$$

wobei wir zur Anwendung der Produktregel durch den Index am Nablaoperator gekennzeichnet haben, daß dieser nur auf das jeweils gekennzeichnete Feld wirken soll. Die Interpretation dieser Gleichung ergibt sich einfach aus dem Gaußschen Integralsatz: Integrieren wir nämlich die Gleichung über ein beliebiges Volumen  $V$ , ergibt sich

$$\int_V d^3 \vec{x} \operatorname{div} \vec{S} = \int_{\partial V} d\vec{A} \vec{S} = - \int_V d^3 \vec{x} \vec{E} \vec{j} = - \int_V d^3 \vec{x} \sigma \vec{E}^2. \quad (4)$$

Die durch die Oberfläche strömende Energie des elektromagnetischen Feldes wird also als Wärme in dem evtl. im Volumen liegenden Teil des Leiters dissipiert.

## 2 Das elektrische Feld

Da wir zur Berechnung des Magnetfeldes die Stromdichten in den Leitern benötigen, müssen wir uns zunächst der Bestimmung des elektrischen Feldes aus der ersten Zeile von Gl. (1) zuwenden. Da gemäß der ersten Gleichung  $\vec{E}$  wirbelfrei ist, gilt

$$\vec{E} = -\operatorname{grad} \Phi(\rho, z), \quad (5)$$

wobei wir gleich der Rotationssymmetrie um die  $z$ -Richtung Rechnung getragen haben. Da wir im inneren Leiter einen über den Leiterquerschnitt konstanten Strom in positiver  $z$ -Richtung annehmen wollen, können wir auch gleich vom vereinfachenden Ansatz

$$\Phi(\rho, z) = z\phi(\rho) \quad (6)$$

ausgehen. Drücken wir nun den Gradienten bzgl. der (normierten) rechtwinkligen Zylinderkoordinatenvektoren aus [Hee05], finden wir

$$\vec{E} = -z\phi'(\rho)\vec{e}_\rho - \phi(\rho)\vec{e}_z. \quad (7)$$

Die zweite Gleichung ergibt

$$\operatorname{div} \vec{E} = -\Delta \Phi = 0 \Rightarrow \frac{d}{d\rho} \left[ \rho \frac{d\phi(\rho)}{d\rho} \right] = 0. \quad (8)$$

Daraus folgt durch Integration, daß im Inneren eines jeden der vier Gebiete

- (1)  $0 \leq \rho < a$ ,
- (2)  $a \leq \rho < b$ ,
- (3)  $b \leq \rho < c$ ,

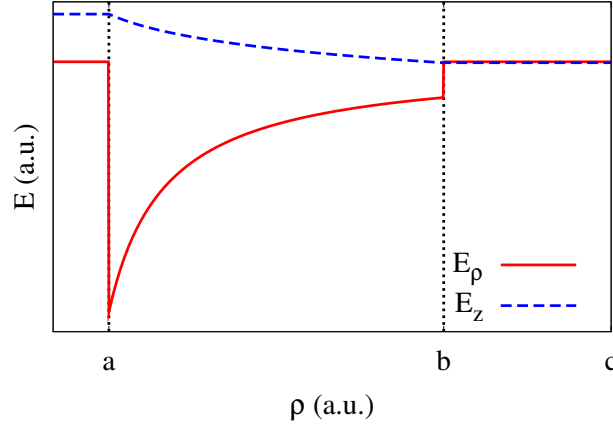


Abbildung 1: Das elektrische Feld.

$$(4) \quad c \leq \rho$$

gelten muß

$$\phi_k(\rho) = c_{1k} \ln(\rho/\rho_{0k}) + c_{2k}, \quad (9)$$

wobei  $c_{1k}$ ,  $c_{2k}$  und  $\rho_{0k}$  Konstante sind, wo  $k$  die oben bezeichneten vier Gebiete durchnummeriert. Freilich sind dabei nur jeweils zwei Konstanten voneinander unabhängig. Der aus Dimensionsgründen eingeführte Radius  $\rho_{0k}$  kann in jedem Gebiet willkürlich und möglichst bequem gewählt werden. Aus (9) folgt dann für das elektrische Feld aus (7)

$$\vec{E}_k = -c_{1k} \frac{z}{\rho} \vec{e}_\rho - [c_{1k} \ln(\rho/\rho_{0k}) + c_{2k}] \vec{e}_z. \quad (10)$$

Wir machen weiter den Ansatz, daß in den Leitern konstante Stromdichtevektoren in  $z$ -Richtung vorliegen, denn radiale zeitunabhängige Ströme müßten zu unendlichen Flächenladungsdichten auf den Zylinderoberflächen führen, was wir ausschließen wollen. Wir haben also in den Gebieten (1) und (3) für das elektrische Feld

$$\vec{E}_1 = \frac{I}{\pi a^2 \sigma} \vec{e}_z, \quad \vec{E}_3 = -\frac{I}{\pi(c^2 - b^2)\sigma} \vec{e}_z, \quad (11)$$

wobei wir den Gesamtstrom  $I$  im Innenleiter vorgegeben haben. Im Außenleiter muß wegen der Gesamtladungserhaltung derselbe entgegengesetzt gerichtete Strom fließen, was die Stromdichten  $\vec{j}$  über die jeweiligen Leiterquerschnittsflächen eindeutig bestimmt.

Da weiter  $E_z$  als Tangentialkomponente entlang der Leiterflächen stetig sein muß, muß im Außenraume, Gebiet 4, ebenfalls das konstante elektrische Feld

$$\vec{E}_4 = -\frac{I}{\pi(c^2 - b^2)\sigma} \vec{e}_z \quad (12)$$

herrschen. Es verbleibt also lediglich das elektrische Feld im Zwischengebiet (2) zu finden, und dieses wird durch die Stetigkeitsbedingungen für  $E_z$  bei  $\rho = a$  und  $\rho = b$  eindeutig bestimmt. Wie oben erläutert können wir zur Vereinfachung  $\rho_{02} = a$  setzen und dann  $c_{1k}$  und  $c_{2k}$  aus den besagten Stetigkeitsbedingungen bestimmen. Es ergibt sich daraus

$$c_{12} = \frac{I}{\sigma \pi \ln(b/a)} \left[ \frac{1}{a^2} + \frac{1}{c^2 - b^2} \right], \quad c_{22} = -\frac{I}{\sigma \pi a^2}, \quad (13)$$

und damit gemäß (10)

$$\vec{E}_2 = -\frac{I}{\sigma\pi \ln(b/a)} \left[ \frac{1}{a^2} + \frac{1}{c^2 - b^2} \right] \frac{z}{\rho} \vec{e}_\rho + \left\{ \frac{I}{\sigma\pi a^2} - \frac{I}{\sigma\pi \ln(b/a)} \left[ \frac{1}{a^2} + \frac{1}{c^2 - b^2} \right] \ln\left(\frac{\rho}{a}\right) \right\} \vec{e}_z. \quad (14)$$

Nunmehr haben wir die elektrische Feldstärke überall im Raume vollständig bestimmt und können uns der Berechnung des Magnetfeldes zuwenden.

### 3 Das Magnetfeld

Im Inneren der Leiter sowie im freien Raum ist  $\mu = \text{const}$ , und wir können aufgrund der daraus folgenden Quellenfreiheit von  $\vec{H}$  ein Vektorpotential für  $\vec{H}$  einführen:

$$\vec{H} = \text{rot } \vec{A}. \quad (15)$$

Es gilt also **in kartesischen Koordinaten**

$$\text{rot rot } \vec{H} = \text{grad div } \vec{A} - \Delta \vec{A} = \vec{j}. \quad (16)$$

Da  $\vec{A}$  selbst nur bis auf den Gradienten eines Skalarfeldes bestimmt ist, können wir als Nebenbedingung die **Coulombbeichbedingung** fordern:

$$\text{div } \vec{A} = 0 \Rightarrow \Delta \vec{A} = -\vec{j}. \quad (17)$$

Da der Strom in den nichtleitenden Gebieten 2 und 4 verschwindet und in den Leitern konstant in  $z$ -Richtung weist sowie Azimutalsymmetrie (d.h. Unabhängigkeit von  $\varphi$  für die Komponenten des Vektorpotentials bzgl. Zylinderkoordinaten) vorliegt, können wir sogleich den vereinfachenden Ansatz

$$\vec{A} = A_z(\rho) \vec{e}_z \quad (18)$$

machen. Das magnetische Feld ist dann gemäß (15)

$$\vec{H} = \text{rot } \vec{A} = -\frac{dA_z}{d\rho} \vec{e}_\varphi. \quad (19)$$

Da  $\vec{e}_z = \text{const}$  ist, können wir die bekannte Gleichung für den Laplaceoperator in Zylinderkoordinaten für ein Skalarfeld auf  $A_z$  anwenden. Für unseren Ansatz (18) gilt

$$\Delta \vec{A} = \frac{1}{\rho} \frac{d}{d\rho} \left( \rho \frac{dA_z}{d\rho} \right) \vec{e}_z. \quad (20)$$

Im Innenleiter, Gebiet 1, lautet also (17):

$$\frac{1}{\rho} \frac{d}{d\rho} \left( \rho \frac{dA_z}{d\rho} \right) = -\frac{I}{\pi a^2}. \quad (21)$$

Da additive Konstanten für  $A_z$  physikalisch irrelevant sind, lautet die Lösung dieser Gleichung

$$A_{1z} = -\frac{I}{4\pi a^2} \rho^2 + d_{11} \ln\left(\frac{\rho}{\rho_0}\right), \quad (22)$$

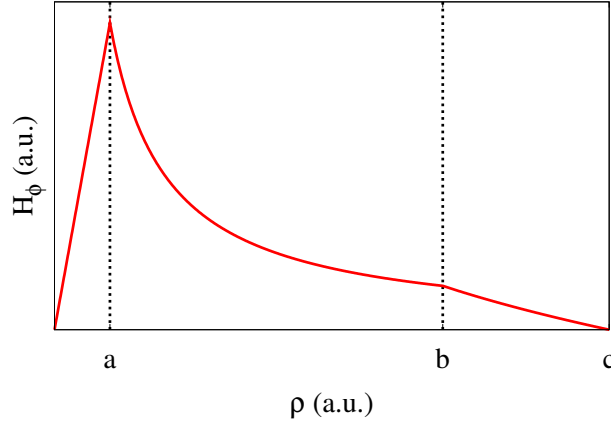


Abbildung 2: Das magnetische Feld.

wobei  $\rho_0$  unbestimmt und physikalisch irrelevant ist, denn es gibt unabhängig von der Integrationskonstanten  $d_{11}$  lediglich eine additive Konstante zu  $A_z$ . Da weiter  $H_\varphi$  bei  $\rho = 0$  nicht unendlich werden darf, muß  $d_{11} = 0$  sein. Es ist also im Innenleiter gemäß (19)

$$\vec{H}_1 = \frac{I}{2\pi a^2} \rho \vec{e}_\varphi. \quad (23)$$

Im Raum zwischen den Leitern, Gebiet 2, ist

$$\frac{1}{\rho} \frac{d}{d\rho} \left( \rho \frac{dA_z}{d\rho} \right) = 0. \quad (24)$$

Die Lösung muß wieder nur bis auf eine additive Konstante bestimmt werden, und damit ist

$$A_{2z} = d_{12} \ln \left( \frac{\rho}{\rho_0} \right), \quad (25)$$

und zusammen mit der Stetigkeit von  $H_\varphi$  bei  $\rho = a$  folgt

$$\vec{H}_2 = \frac{I}{2\pi \rho} \vec{e}_\varphi. \quad (26)$$

Im Außenleiter, Gebiet 3, ist

$$\frac{1}{\rho} \frac{d}{d\rho} \left( \rho \frac{dA_z}{d\rho} \right) = \frac{I}{\pi(c^2 - b^2)} \quad (27)$$

mit der Lösung

$$A_{3z} = \frac{I}{4\pi(c^2 - b^2)} \rho^2 + d_{13} \ln \left( \frac{\rho}{\rho_0} \right). \quad (28)$$

Die Stetigkeitsbedingung für  $H_\varphi$  bei  $\rho = b$  liefert dann

$$\vec{H}_3 = \frac{I}{2\pi(c^2 - b^2)} \left[ \frac{c^2}{\rho} - \rho \right] \vec{e}_\varphi. \quad (29)$$

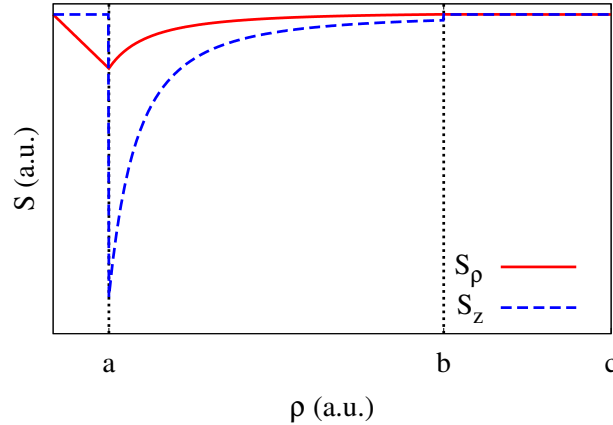


Abbildung 3: Die Energiestromdichte (Poyntingvektor).

Bei  $\rho = c$  erhalten wir  $\vec{H}_3 = 0$ , und damit ist auch in Gebiet 4, also im Außenraume des Koaxialkabels,

$$\vec{H}_4 = 0, \quad (30)$$

denn es gilt wieder (24), und die Stetigkeitsbedingung für  $H_\varphi$  liefert eindeutig (30). Es ist dies auch konsistent mit dem Ampèreschen Durchflutungsgesetz für einen Kreis um das gesamte Koaxialkabel, denn der Gesamtstrom für Hin- und Rückleiter ist wegen der globalen Stromerhaltung 0.

## 4 Die Energiestromdichte (Poyntingvektor)

Die Energiestromdichte ergibt sich nunmehr gemäß (2) zu

$$\vec{S} = S_\rho \vec{e}_\rho + S_z \vec{e}_z. \quad (31)$$

Dabei gilt für die Komponenten

$$S_\rho = \begin{cases} -\frac{I^2 \rho}{2\pi^2 a^4 \sigma} & \text{für } 0 \leq \rho < a \\ \frac{I^2}{2\pi^2 a^2 (c^2 - b^2) \rho \sigma \ln(b/a)} \{[(a^2 + c^2 - b^2) \ln(\rho/a) - (c^2 - b^2) \ln(b/a)]\} & \text{für } a \leq \rho < b \\ \frac{I^2 (c^2 - \rho^2)}{\pi^2 \rho \sigma (c^2 - b^2)^2} & \text{für } b \leq \rho < c \\ 0 & \text{für } c \leq \rho, \end{cases} \quad (32)$$

$$S_z = \begin{cases} 0 & \text{für } 0 \leq \rho < a \\ -\frac{I^2 (a^2 + c^2 - b^2)}{2\pi^2 \sigma \rho a^2 (c^2 - b^2) \ln(b/a)} \frac{z}{\rho} & \text{für } a \leq \rho < b \\ 0 & \text{für } b \leq \rho < c \\ 0 & \text{für } c \leq \rho. \end{cases}$$

Wir sehen also, daß der Energietransport in  $z$ -Richtung nur im Zwischenraume zwischen den Leitern erfolgt, nicht in den Leitern selbst. Der Energietransport erfolgt in diesem Sinne also nicht durch den elektrischen Strom in den Leitern sondern durch das elektromagnetische Feld. Dies erkennen wir auch, wenn wir die Gesamtleistung pro Längeneinheit berechnen. Legen wir

dazu einen zur Leitung coaxialen Zylinder mit Radius  $\rho_0 > c$  von  $z = 0$  bis  $z = L$  um den Leiter und integrieren den Poyntingvektor über dessen Randfläche. Da für  $\rho > c$  der Poyntingvektor verschwindet, trägt die Mantelfläche nichts zu dem Integral bei. Die Bodenfläche liefert ebenso keinen Beitrag, da bei  $z = 0$  die Longitudinalkomponente  $S_z = 0$  ist. Bleibt also die Deckfläche:

$$P = 2\pi \int_a^b d\rho \rho S_z = \frac{(a^2 + c^2 - b^2)L}{\pi\sigma a^2(c^2 - b^2)} I^2. \quad (33)$$

In der Tat ergibt dies den Gesamtwiderstand von Hin- und Rückleitung in dem betrachteten Abschnitt, nämlich

$$R = \frac{L}{\sigma} \left( \frac{1}{\pi a^2} + \frac{1}{\pi(c^2 - b^2)} \right) = \frac{(a^2 + c^2 - b^2)L}{\pi\sigma a^2(c^2 - b^2)} = \frac{P}{I^2}. \quad (34)$$

Wir können die gefundene Lösung auch als Näherung für eine endlich lange Leitung, wobei  $L \gg c$  anzunehmen ist, damit Randeffekte an den Enden der Leitung vernachlässigt werden können, interpretieren. Dabei liegt bei  $z = 0$  ein „Kurzschluß“ vor, während bei  $z = L$  eine Gleichspannungsquelle angeschlossen ist (positiver Pol am Außenleiter).

## 5 Zweiadriges Kabel

Das Koaxialkabel ist freilich nur ein einfaches Beispiel. Für Gleich- oder niederfrequenten Wechselstrom wie er im Haushalt Anwendung findet, werden eher einfache zweiadrige Kabel verwendet. Auch diese lassen sich noch geschlossen behandeln. Außerdem ist es eine schöne Anwendung funktionentheoretischer Methoden.

Betrachten wir also zunächst allgemein beliebige in  $z$ -Richtung eines kartesischen Koordinatensystems  $(x, y, z)$  translationssymmetrische Kabel. In den Kabeln mögen wie bei unserem Beispiel vom Koaxialkabel in  $z$ -Richtung fließende homogene Stromdichten vorliegen. Dann können wir beliebige (lokale) Koordinaten  $(u, v)$  der  $xy$ -Ebene einführen und das Potential des elektrischen Feldes ansetzen als

$$\Phi(u, v, z) = z\phi(u, v). \quad (35)$$

Außer an den Rändern der Leiter muß  $\Phi$  eine harmonische Funktion sein, d.h. es muß gelten

$$\Delta\Phi = \Delta_2\phi = 0. \quad (36)$$

Dabei bezeichnet  $\Delta_2$  den Laplaceoperator in der  $xy$ -Ebene. In kartesischen Koordinaten also  $\Delta_2 = \partial_x^2 + \partial_y^2$ .

Weiter gilt wieder

$$E_z = -\partial_z\Phi = -\phi, \quad (37)$$

so daß die Laplacegleichung im Äußeren der Leiter unter Annahme der entsprechenden Stetigkeitsbedingung für  $E_z$  anderen Rand zu lösen ist, d.h. entlang der Leiterränder muß

$$E_z|_{\text{Leiterrand}} = j_{\text{Leiter}}/\sigma = \text{const} \quad (38)$$

gelten. Damit haben wir ein Randwertproblem für die Laplacegleichung in der Ebene vorliegen. I.a. ist es schwierig, solche Randprobleme bei irgendwie vorgegebenen Geometrien zu lösen. Im ebenen Falle kommt uns allerdings die Eigenschaft zugute, daß Real- und Imaginärteil einer

komplexen Funktion  $f(\eta)$ , aufgefaßt als Funktionen von  $x$  und  $y$  mit  $\eta = x + iy$  harmonische Funktionen sind, also die Laplacegleichung erfüllen. Da nämlich  $f$  komplex differenzierbar ist, gilt

$$\frac{df}{d\eta} = \frac{\partial f}{\partial x} = -i \frac{\partial f}{\partial y}. \quad (39)$$

Setzen wir nun  $f = u + iv$ ,  $u, v \in \mathbb{R}$ , erhalten wir

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}. \quad (40)$$

Da weiter  $f$  als komplexe Funktion analytisch ist, ist sie insbesondere auch beliebig oft komplex differenzierbar und folglich können wir (40) nochmals nach  $x$  und  $y$  ableiten und „gemischte Ableitungen“ vertauschen. Daraus ergibt sich dann in der Tat sofort, daß

$$\Delta_2 u = \Delta_2 v = 0. \quad (41)$$

Aus (40) folgt aber außerdem noch, daß die Niveaulinien  $u = \text{const}$  und  $v = \text{const}$  orthogonal zueinander sind. Die Normalenvektoren dieser Niveaulinien sind ja durch die Gradienten von  $u$  bzw.  $v$  gegeben, und aus (40) folgt sofort

$$(\nabla u)(\nabla v) = 0. \quad (42)$$

Betrachten wir nun also die Abbildung  $(x, y) \mapsto (u, v)$  als (lokale) Koordinatentransformation, haben wir mit  $u$  und  $v$  (lokale) orthogonale Koordinaten, die zugleich harmonische Funktionen sind. Um also unser Randwertproblem zu lösen, können wir einfach eine komplexe Funktion  $f$  suchen, so daß bestimmte Niveaulinien  $u = \text{const}$  gerade die Ränder unserer Leiter darstellen!

Um eine solche Funktion für unser doppeladriges Kabel zu finden, betrachten wir zunächst aus diesem Blickwinkel den Innenleiter des Koaxialkabels. Wir denken uns also ein einfaches Kabel mit einer in positiver  $z$ -Richtung gerichteter homogener Stromdichte. Wie wir durch direkte Rechnung weiter oben gesehen haben ist dann die Lösung, für die  $E_\rho$  im Unendlichen verschwindet, durch

$$\phi = -\frac{I}{\pi a^2 \sigma} [\ln(\rho/a) + 1] \quad (43)$$

gegeben.

Freilich können wir nun nachträglich eine analytische Funktion  $f(\eta)$  finden, die genau diese Charakteristiken aufweist. Bis auf einen Faktor und die additive Konstante ist dies die Funktion

$$f(\eta) = \ln(\eta/a), \quad (44)$$

wo  $a$  ein beliebiger Parameter der Dimension Länge ist. Dabei benutzen wir den Hauptzweig des Logarithmus, dessen Imaginärteil definitionsgemäß im Intervall  $(-\pi, \pi)$  liegt und entlang der negativen reellen Achse einen Schnitt aufweist. Es ist klar, daß dann  $u$  und  $v$  im wesentlichen Polarkoordinaten sind. Schreiben wir nämlich  $\eta = \rho \exp(i\varphi)$  mit  $\varphi \in (-\pi, \pi)$ , ergibt sich

$$f = u + iv = \ln \left( \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{a} \right) + i\varphi, \quad (45)$$



also

$$\begin{aligned} u &= \ln \left( \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{a} \right), \\ v &= \varphi = \operatorname{sign} y \arccos \left( \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} \right). \end{aligned} \quad (46)$$

Umgekehrt finden wir

$$\begin{aligned} x &= \sqrt{x^2 + y^2} \cos \varphi = a \exp u \cos v, \\ y &= \sqrt{x^2 + y^2} \sin \varphi = a \exp u \sin v. \end{aligned} \quad (47)$$

Bis auf die Exponentialfunktion  $\rho = a \exp u$  haben wir also der Symmetrie des Problems entsprechend die Polarkoordinaten als die dem Randwertproblem für den Kreis mit Mittelpunkt im Ursprung des kartesischen Koordinatensystems rekonstruiert. Der Vorteil der Methode ist weiter, daß wir sogleich die allgemeine Lösung des Randwertproblems als

$$\phi(u, v) = Au + B \quad (48)$$

schreiben können, was freilich nach Berücksichtigung der konkreten Randbedingungen wieder auf (43) zurückführt.

Kommen wir nun also auf das zweiadrige Kabel. Wir wollen die Kabelquerschnitte als kreisförmig mit den Mittelpunkten auf der  $x$ -Achse bei  $x = \pm d/2$  gelegen und mit Radius  $R$  annehmen. Es liegt nahe, statt (44) eine Superposition zu versuchen, wobei die Singularitäten der Koordinaten bei  $x = \pm a$  und  $y = 0$  liegen. Dabei ist  $a$  ein zunächst unbestimmter Parameter, den wir später bei der Erfüllung der Randbedingungen festzulegen haben. Unser Ansatz lautet also

$$f(\eta) = \ln \left( \frac{\eta - a}{\eta + a} \right) \quad (49)$$

Schreiben wir

$$\eta - a = r_1 \exp(i\varphi_1), \quad \eta + a = r_2 \exp(i\varphi_2), \quad (50)$$

wird

$$u = \ln \left( \frac{r_1}{r_2} \right), \quad v = \varphi_1 - \varphi_2. \quad (51)$$

Als nächstes drücken wir die kartesischen Koordinaten durch die neuen sog. **Bipolarkoordinaten**  $(u, v)$  aus. Betrachten wir dazu in Fig. 4 die geometrische Bedeutung der in (50) gegebenen Größen. Es gilt

$$u = \ln \left( \sqrt{\frac{(x+a)^2 + y^2}{(x-a)^2 + y^2}} \right). \quad (52)$$

Daraus folgt nach einigen einfachen algebraischen Umformungen

$$\cosh u = \frac{x^2 + y^2 + a^2}{\sqrt{(x+a)^2 + y^2} \sqrt{(x-a)^2 + y^2}}, \quad \sinh u = \frac{2ax}{\sqrt{(x+a)^2 + y^2} \sqrt{(x-a)^2 + y^2}}. \quad (53)$$

Weiter ist

$$\cos v = \frac{x^2 + y^2 - a^2}{\sqrt{(x+a)^2 + y^2} \sqrt{(x-a)^2 + y^2}}, \quad \sin v = \frac{2ay}{\sqrt{(x+a)^2 + y^2} \sqrt{(x-a)^2 + y^2}}. \quad (54)$$

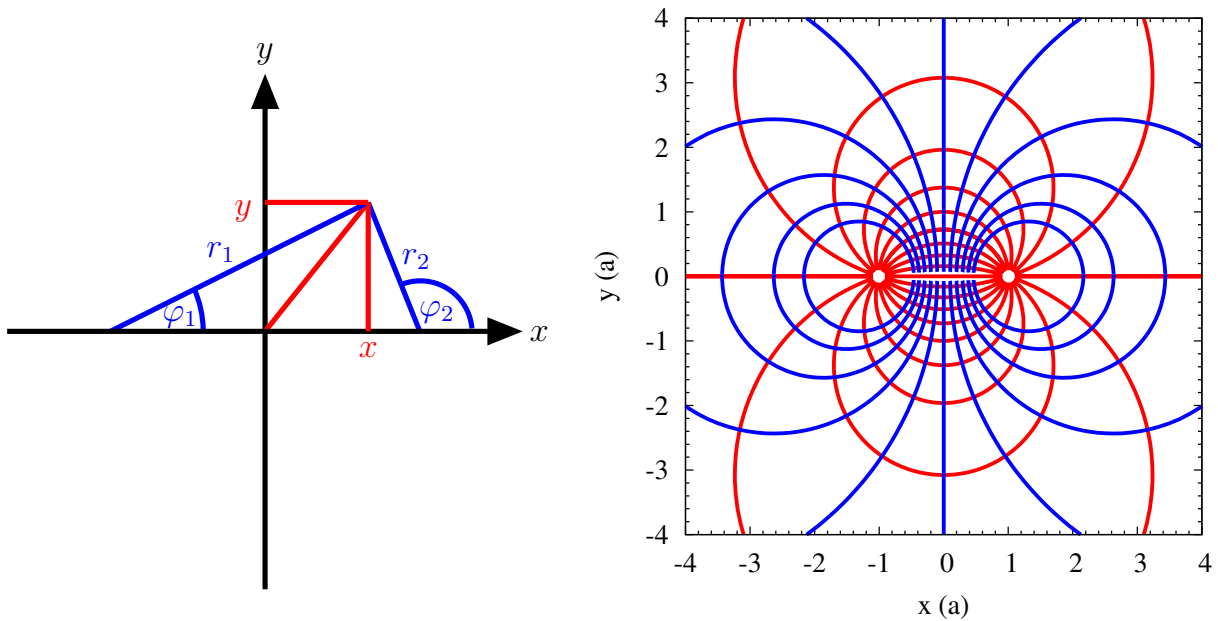


Abbildung 4: Links: Zur Definition der Bipolarkoordinaten. Rechts: Koordinatenlinien der Bipolarkoordinaten. Rot:  $v \in [0, 2\pi) = \text{const}$  im Abstand  $0.1\pi$  ( $u$ -Linien), blau:  $u \in [-3, 3] = \text{const}$  im Abstand  $0.2$  ( $v$ -Linien)

Daraus finden wir nun den gesuchten Zusammenhang zwischen den Bipolarkoordinaten und kartesischen Koordinaten durch geeignete Kombination der soeben hergeleiteten Ausdrücke (53-54):

$$x = \frac{a \sinh u}{\cosh u - \cos v}, \quad y = \frac{a \sin v}{\cosh u - \cos v}. \quad (55)$$

Betrachten wir nun die Koordinatenlinien  $u = \text{const}$ . Dazu formen wir (52) ein wenig um:

$$[(x - a)^2 + y^2] \exp(2u) = (x + a)^2 + y^2 \Rightarrow \left(x - \frac{a}{\tanh u}\right)^2 + y^2 = \left(\frac{a}{\sinh u}\right)^2. \quad (56)$$

Es liegen also für  $u = \text{const}$  in der Tat Kreise mit Mittelpunkt in  $(x = a/\tanh u, y = 0)$  und Radius  $R = a/|\sinh u|$  vor. Wählen wir also  $u_0 > 0$  und  $a$  so, daß

$$\frac{a}{\tanh u_0} = \frac{d}{2}, \quad \frac{a}{\sinh u_0} = R, \quad (57)$$

also

$$u_0 = \text{arcosh} \left( \frac{d}{2R} \right), \quad a = \frac{1}{2} \sqrt{d^2 - 4R^2}. \quad (58)$$

haben wir unser Randwertproblem durch

$$\phi(x, y) = \begin{cases} -\frac{I}{\pi\sigma R^2} & \text{für } (x, y) \text{ im rechten Leiter,} \\ +\frac{I}{\pi\sigma R^2} & \text{für } (x, y) \text{ im linken Leiter,} \\ = -\frac{I}{\pi\sigma R^2 u_0} \ln \left( \sqrt{\frac{(x+a)^2 + y^2}{(x-a)^2 + y^2}} \right) & \text{für } (x, y) \text{ außerhalb der Leiter.} \end{cases} \quad (59)$$

gelöst, wobei wir die Bipolarkoordinaten sogleich wieder in die vertrauteren kartesischen Koordinaten umgeschrieben haben. Die beiden Leiter sind durch  $u = \pm u_0$  bestimmt, wobei im rechten

Leiter ( $u = +u_0$ ) der Strom in positiver und im linken ( $u = -u_0$ ) in negativer  $z$ -Richtung fließt. Wir können uns eine bildliche Vorstellung von den elektrischen Feldlinien in der senkrecht zu den Leitern gelegenen  $(x, y)$ -Ebene machen, wenn wir die Koordinatenlinien  $v = \text{const}$  ( $u$ -Linien), die in der rechten Figur von Abb. 4 rot eingezeichnet sind, betrachten. Die Richtung der Feldlinien ist dabei vom linken zum rechten Leiter gerichtet, denn wir haben uns die linke Leitung mit dem Plus- die rechte mit dem Minuspol einer Batterie verbunden zu denken. Wie oben beim Koaxialkabel ist auch hier das Kabel bei  $z = 0$  kurzgeschlossen. Die in derselben Abb. blau gezeichneten Linien  $u = \text{const}$  ( $v$ -Linien) sind die oben besprochenen Äquipotentiallinien. Als ein symmetrisch gelegenes Paar der blauen Kreise haben wir die Kabel selbst anzusehen. Die singulären Punkte des Koordinatensystems bei  $\pm a\vec{e}_x$  liegen im Inneren der Kabel, wo das elektrische Feld per constructionem homogen ist, so daß sowohl das Potential als auch das  $\vec{E}$ -Feld überall nichtsingulär sind.

## 6 Voll relativistische Theorie

In einer interessanten Diskussion in `de.sci.physik` im Juni 2009 hat mich Ralf Kusmierz zu den folgenden Überlegungen zu einer vollständig relativistischen Theorie der makroskopischen Maxwelltheorie angeregt. Da ich einen ähnlichen Zugang in der Literatur nicht finden konnte, wäre ich an sachkundiger Kritik zu diesem Abschnitt besonders interessiert.

Der Punkt ist, daß die Gleichungen (1) durch die Materialgleichungen nicht relativistisch korrekt sind. Um die relativistisch korrekten makroskopischen Maxwell-Gleichungen mitsamt den einfachsten Materialgleichungen für homogene isotrope Medien für nicht zu starke Felder („linear response-Näherung“) zu finden, führen wir zunächst die Felder  $\vec{E}$  und  $\vec{B}$  sowie  $\vec{D}$  und  $\vec{H}$  ein.

### 6.1 Die kovariante Form der Maxwellgleichungen im Vakuum

Wir verwenden in diesem Abschnitt bequemerweise Heaviside-Lorentz-Einheiten (also rationalisierte Gaußeinheiten). Die Minkowski-Pseudometrik wählen wir nach der Westküstenkonvention ( $g^{\mu\nu} = g_{\mu\nu} = \text{diag}(1, -1, -1, -1)$ ). Kontravariante Zeit- und Raumkomponenten bzgl. eines Inertialsystems schreiben wir als Spaltenvektor in den folgenden Konventionen

$$x = (x^\mu) = \begin{pmatrix} x^0 \\ x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x^0 \\ \vec{x} \end{pmatrix}. \quad (60)$$

Dabei ist  $x^0 = ct$ . Dieser einleitende Unterabschnitt dient vornehmlich der weiteren Einführung unserer Notation. Ausführlich wird die relativistische Physik in kovarianter Form in der FAQ mehrfach behandelt [Dra06, Hee06]. Daher wollen wir uns hier kurz fassen.

Betrachten wir zunächst den Fall des Vakuums, also den Fall sehr kleiner Ladungs- und Strom-

verteilungen. Dann gilt  $\vec{E} = \vec{D}$ ,  $\vec{B} = \vec{H}$  und die Maxwellgleichungen lauten

$$\text{rot } \vec{E} + \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = 0 \quad (61)$$

$$\text{div } \vec{B} = 0, \quad (62)$$

$$\text{rot } \vec{B} = \frac{1}{c} \left( \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \vec{j} \right), \quad (63)$$

$$\text{div } \vec{E} = n_Q. \quad (64)$$

Dabei bezeichnet  $c$  die Vakuumlichtgeschwindigkeit und  $n_Q$  die Ladungsdichte.

Aus (62) folgt, daß es ein Vektorfeld  $\vec{A}$  gibt, so daß

$$\vec{B} = \text{rot } \vec{A}. \quad (65)$$

Dies in (61) eingesetzt ergibt

$$\text{rot} \left( \vec{E} + \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \right) = 0. \quad (66)$$

Es existiert also ein Skalarfeld  $\Phi$ , so daß

$$\vec{E} = -\text{grad } \Phi - \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}. \quad (67)$$

Die Gleichungen (61) und (62), die **homogenen Maxwellgleichungen**, werden durch die Einführung der Potentiale identisch erfüllt. Drücken wir also (63) und (64), die **inhomogenen Maxwellgleichungen**, vermöge (65) und (67) durch Skalar- und Vektorpotential aus, folgt

$$\begin{aligned} \text{grad} \left( \frac{1}{c} \frac{\partial \Phi}{\partial t} + \text{div } \vec{A} \right) &= -\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} + \Delta \vec{A} + \frac{1}{c} \vec{j}, \\ -\Delta \Phi - \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \text{div } \vec{A} &= n_Q. \end{aligned} \quad (68)$$

Es ist nun klar, daß sich die physikalisch beobachtbaren Felder  $\vec{E}$  und  $\vec{B}$  nicht ändern, wenn man statt  $\Phi$  und  $\vec{A}$  neue Felder

$$\Phi' = \Phi + \frac{1}{c} \frac{\partial \chi}{\partial t}, \quad \vec{A}' = \vec{A} + \text{grad } \chi \quad (69)$$

verwendet. Das ist die **Eichinvarianz der Maxwellschen Elektrodynamik**. Wir können nun (68) vereinfachen, wenn wir  $\chi$  so wählen, daß

$$\frac{1}{c} \frac{\partial \Phi'}{\partial t} + \text{div } \vec{A}' = 0 \quad (70)$$

gilt. Das ist die sog. Lorenzeichbedingung<sup>1</sup>. Verwenden wir diese Eichung in (68) und schreiben wieder  $\Phi$  und  $\vec{A}$  statt  $\Phi'$  und  $\vec{A}'$ , ergeben sich die Gleichungen

$$\square \Phi = n_Q, \quad \square \vec{A} = \frac{1}{c} \vec{j}, \quad (71)$$

<sup>1</sup>Gemeinhin wird diese Eichbedingung als Lorentzeichung, benannt nach dem holländischen Physiker H. A. Lorentz, bezeichnet. Es gibt aber gewichtige historische Gründe den Namen Lorenzeichung, benannt nach dem dänischen Physiker L. Lorenz, zu verwenden [JO01].

wobei wir zur Abkürzung den **d'Alembertoperator**

$$\square = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta \quad (72)$$

eingeführt haben.

Schreiben wir  $A^\mu = (\Phi, \vec{A})^t$  und  $j^\mu = (cn_Q, \vec{j})$ , können wir dies als vierdimensionale kovariante Vektorgleichung schreiben

$$\square A^\mu = \frac{1}{c} j^\mu. \quad (73)$$

Der d'Alembertoperator ist ein skalarer Differentialoperator, wenn wir  $x^\mu = (x^0 = ct, \vec{x})$  und die Minkowskimetrik

$$(\eta^{\mu\nu}) = \text{diag}(1, -1, -1, -1) \quad (74)$$

eingeführen. Dann ist wegen  $\partial_\mu = \partial/\partial x^\mu$

$$\square = \eta^{\mu\nu} \partial_\mu \partial_\nu \quad (75)$$

(73) tatsächlich eine manifest kovariante Gleichung.

Wegen ihrer Eichabhängigkeit ist das Vierervektorpotential  $A^\mu$  nicht unbedingt die bequemste Größe physikalischen Interpretation der Theorie. Wir können nun aber auch die Feldgrößen vierdimensional kovariant zusammenfassen. Von der Beziehung (65) inspiriert führen wir den **Feldstärketensor**

$$B_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu \quad (76)$$

ein. Dieser ist offensichtlich invariant unter Eichtransformationen der Form (69), die manifest kovariant

$$A'_\mu = A_\mu + \partial_\mu \chi \quad (77)$$

lauten.

Wir finden die Beziehung zu den dreidimensionalen Feldgrößen, indem wir auf zeitliche und räumliche Komponenten spezialisieren. Für  $m, n \in \{1, 2, 3\}$  finden wir

$$\begin{aligned} -\frac{\partial A^n}{\partial x^m} B_{0n} &= \partial_0 A_n - \partial_n A_0 = -\frac{1}{c} \frac{\partial A^n}{\partial t} - \frac{\partial \Phi}{\partial x^n} = E_n, \\ B_{mn} &= \partial_m A_n - \partial_n A_m = -\left( \frac{\partial A^n}{\partial x^m} - \frac{\partial A^m}{\partial x^n} \right) = -\epsilon^{mnk} B^k. \end{aligned} \quad (78)$$

Etwas übersichtlicher werden diese Beziehungen in Matrixform. Die kontra- und kovarianten Komponenten lauten

$$(B^{\mu\nu}) = \begin{pmatrix} 0 & -E^1 & -E^2 & -E^3 \\ E^1 & 0 & -B^3 & B^2 \\ E^2 & B^3 & 0 & -B^1 \\ E^3 & -B^2 & B^1 & 0 \end{pmatrix}, \quad (B_{\mu\nu}) = \begin{pmatrix} 0 & E^1 & E^2 & E^3 \\ -E^1 & 0 & -B^3 & B^2 \\ -E^2 & B^3 & 0 & -B^1 \\ -E^3 & -B^2 & B^1 & 0 \end{pmatrix}. \quad (79)$$

Gerade für die makroskopische (klassische) Elektrodynamik, ist es bequemer mit dem Feldstärketensor  $B^{\mu\nu}$  als mit dem eichabhängigen Vierervektorpotential  $A^\mu$  zu arbeiten. Wir schreiben

daher die Vakuum-Maxwellgleichungen (61-64) in kovarianter Form. Die inhomogenen Maxwellgleichungen sind nun in (73) zusammengefaßt. Um diese Gleichung mit Hilfe der Feldkomponenten auszudrücken bilden wir die Viererdivergenz von Gl. (76):

$$\partial^\mu B_{\mu\nu} = \square A_\nu - \partial_\nu \partial^\mu A_\mu = \square A_\nu = \frac{1}{c} j_\nu. \quad (80)$$

Dabei haben wir im vorletzten Schritt von der Lorenzbedingung (70) Gebrauch gemacht, die in kovarianter Form

$$\partial_\mu A^\mu = 0 \quad (81)$$

lautet, wie man durch Ausschreiben in zeitliche und räumliche Komponenten unmittelbar erkennt.

Es fehlt uns nun noch das homogene Maxwellgleichungspaar (61) und (62). Um dieses zu finden, ist es einfacher, typische Überlegungen hinsichtlich der Kovarianz anzustellen als mühsam die zeit-räumlichen Komponenten zu vergleichen. Die Maxwellgleichungen sind Differentialgleichungen erster Ordnung. Da sie relativistisch kovariante Gleichungen sind, müssen sie sich also mit dem Differentialoperator  $\partial_\mu$  formulieren lassen. Die vier Komponenten der Gleichung linken Seiten der Gleichungen müssen einen Vierervektor bilden, so daß wir also erwarten dürfen, daß es sich um die Kontraktion eines Tensors zweiter Stufe handeln muß. Weiter treten rot  $\vec{E}$  und div  $\vec{B}$  auf. Dies ist recht ähnlich zu den inhomogenen Gleichungen, nur daß  $\vec{E}$  und  $\vec{B}$  vertauscht erscheinen. Wir benötigen also einen Tensor zweiter Stufe, der sich aus dem Feldstärketensor (79) durch Tensormanipulationen mit invarianten Tensorkomponenten ergibt, d.h. solchen Tensoren, die keine Ableitungen oder irgendwie ausgezeichnete Vektoren beinhalten, denn solche Größen kommen ja in den inhomogenen Maxwellgleichungen nicht vor. Im Minkowskiraum haben wir dazu freilich die Minkowskimetrik  $g_{\mu\nu}$  zur Verfügung, aber diese kann nicht  $\vec{E}$  und  $\vec{B}$  in (79) vertauschen. Es gibt aber noch das **Levi-Civita-Symbol**

$$\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} = 1 \text{ für } (\mu, \nu, \rho, \sigma) = (0, 1, 2, 3). \quad (82)$$

Für alle anderen Indexkombinationen ist dann dieses Symbol dadurch definiert, daß es total antisymmetrisch unter Permutationen seiner Indizes ist. Insbesondere verschwindet es, wenn zwei oder mehrere Indizes gleich sind. Das Levi-Civita-Symbol bildet nicht die Komponenten eines Tensors im strikten Sinne, weil es bei einer Lorentztransformation  $\Lambda$  mit der  $\det \Lambda = \pm 1$  multipliziert wird. Es ist also ein Tensor bzgl. der eigentlichen Lorentzgruppe  $SO(1,3)$ , aber dies ist legitim, da wir physikalisch ohnehin nur Lorentzinvarianz bzgl. der eigentlich orthochronen Lorentzgruppe zu fordern brauchen<sup>2</sup>. Es ist noch wichtig zu bemerken, daß die kovarianten Komponenten von (82)

$$\epsilon_{\mu\nu\rho\sigma} = g_{\mu\mu'} g_{\nu\nu'} g_{\rho\rho'} g_{\sigma\sigma'} \epsilon^{\mu'\nu'\rho'\sigma'} = \det(g) \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} = -\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \quad (83)$$

lauten. Nun können wir den sogenannten **dualen Feldstärketensor** bilden

$$(\dagger B)_{\mu\nu} = \frac{1}{2} \epsilon_{\mu\nu\rho\sigma} B^{\rho\sigma}. \quad (84)$$

---

<sup>2</sup>Die schwache Wechselwirkung bricht auch die Invarianz der Naturgesetze unter Raum- und Zeitspiegelungen, so daß die physikalische Lorentzgruppe ohnehin nur die eigentlich orthochrone ist!

In Matrixschreibweise lauten seine kovarianten Komponenten

$$[(\dagger B)^{\mu\nu}] = \begin{pmatrix} 0 & -B^1 & -B^2 & -B^3 \\ B^1 & 0 & E^3 & -E^2 \\ B^2 & -E^3 & 0 & E^1 \\ B^3 & E^2 & -E^1 & 0 \end{pmatrix}, \quad [(\dagger B)_{\mu\nu}] = \begin{pmatrix} 0 & B^1 & B^2 & B^3 \\ -B^1 & 0 & E^3 & -E^2 \\ -B^2 & -E^3 & 0 & E^1 \\ -B^3 & E^2 & -E^1 & 0 \end{pmatrix}. \quad (85)$$

In der Tat entsteht also  $\dagger B$  aus  $B$  durch Ersetzen von  $\vec{E}$  mit  $\vec{B}$  und von  $\vec{B}$  mit  $-\vec{E}$ . Schreiben wir abkürzen  $B = (\vec{E}, \vec{B})$ , so ist in der analogen Notation also  $\dagger B = (\vec{B}, -\vec{E})$ .

Die homogenen Maxwellgleichungen können also nur

$$\partial_\mu (\dagger B)^{\mu\nu} = 0 \quad (86)$$

lauten. In der Tat findet man durch Ausschreiben dieser Gleichung in Komponenten, daß dies tatsächlich den homogenen Maxwellgleichungen (61) und (62) entspricht. In der Tat ist

$$(\partial_\mu (\dagger B)^{\mu\nu}) = \begin{pmatrix} \operatorname{div} \vec{B} \\ -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} - \operatorname{rot} \vec{E} \end{pmatrix}. \quad (87)$$

(86) hätte man auch aus dem allgemeinen Poincaréschen Lemma als lokale Bedingung für die Darstellbarkeit von  $B_{\mu\nu}$  aus einem Vektorpotential gemäß (76) schließen können.

Die Maxwellgleichungen für das Vakuum lauten also in manifest kovarianter Form

$$\partial_\mu (\dagger B)^{\mu\nu} = 0, \quad \partial_\mu B^{\mu\nu} = \frac{1}{c} j^\nu. \quad (88)$$

Die Stromerhaltung folgt sofort aus (88) und der Antisymmetrie des Feldstärketensors:

$$\partial_\nu j^\nu = \frac{\partial n_Q}{\partial t} + \operatorname{div} \vec{j} = 0. \quad (89)$$

Wir betrachten nun noch die Transformation, wenn wir von unserem bisherigen Inertialsystem  $I$  zu einem neuen Inertialsystem  $I'$ , das sich gegenüber  $I$  mit der Geschwindigkeit  $\vec{v}$  bewegt. Dann sind die Raumzeitkoordinaten bzgl.  $I'$  mit denen bzgl.  $I$  durch den **Lorentzboost**

$$x'^\mu = \Lambda(\vec{v})^\mu{}_\nu x^\nu \quad (90)$$

mit

$$[\Lambda(\vec{v})^\mu{}_\nu] = \begin{pmatrix} \gamma & -\gamma \vec{v}^t/c \\ -\gamma \vec{v}/c & \mathbb{K} + (\gamma - 1) \vec{v} \otimes \vec{v}/v^2 \end{pmatrix} \quad \text{mit} \quad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}. \quad (91)$$

wobei wir uns einer unmittelbar verständlichen Blockschreibweise bedient haben. Für eine genauere Herleitung dieser speziellen Lorentztransformation sei wieder auf [Dra06, Hee06] verwiesen.

Als Vierervektoren transformieren sich Ladungs- und Stromdichte gemäß

$$(j'^\mu) = (\Lambda(\vec{v})^\mu{}_\nu j^\nu) = \begin{pmatrix} \gamma(cn_Q - \vec{v}\vec{j}/c) \\ \vec{j} + (\gamma - 1) \frac{\vec{v}\vec{j}}{v^2} \vec{v} \end{pmatrix} \quad (92)$$

und der elektromagnetische Feldstärketensor gemäß

$$B'^{\mu\nu} = \Lambda(\vec{v})^\mu{}_\rho \Lambda(\vec{v})^\nu{}_\sigma B^{\rho\sigma}, \quad (93)$$

was aufgrund von (79) in Dreierschreibweise die Gestalt

$$\begin{aligned}\vec{E}' &= \gamma \vec{E} + (1 - \gamma) \frac{\vec{v} \vec{E}}{v^2} \vec{v} + \gamma \frac{\vec{v}}{c} \times \vec{B}, \\ \vec{B}' &= \gamma \vec{B} + (1 - \gamma) \frac{\vec{v} \vec{B}}{v^2} \vec{v} - \gamma \frac{\vec{v}}{c} \times \vec{E}.\end{aligned}\tag{94}$$

Diese Gleichungen kann man auch wie folgt schreiben

$$\vec{E}' = \vec{E}_{\parallel} + \gamma \vec{E}_{\perp} + \gamma \frac{\vec{v}}{c} \times \vec{B}, \quad \vec{B}' = \vec{B}_{\parallel} + \gamma \vec{B}_{\perp} - \gamma \frac{\vec{v}}{c} \times \vec{E}.\tag{95}$$

Dabei haben wir die Vektoren in die Anteile parallel und senkrecht zu  $\vec{v}$  zerlegt, d.h.

$$\begin{aligned}\vec{E}_{\parallel} &= \frac{\vec{v} \vec{E}}{v^2} \vec{v}, & \vec{E}_{\perp} &= \vec{E} - \frac{\vec{v} \vec{E}}{v^2} \vec{v}, \\ \vec{B}_{\parallel} &= \frac{\vec{v} \vec{B}}{v^2} \vec{v}, & \vec{B}_{\perp} &= \vec{B} - \frac{\vec{v} \vec{B}}{v^2} \vec{v}.\end{aligned}\tag{96}$$

## 6.2 Die Materialgleichungen für ein homogenes und isotropes Medium

Betrachten nunmehr die elektromagnetischen Erscheinungen in Medien, konzentrieren uns aber sogleich auf den einfachsten Fall eines homogenen und isotropen Stoffes, wobei wir von Dispersion absehen. Dies ist für unsere Zwecke vollauf gerechtfertigt, da wir uns ja mit dem Fall stationärer Ströme in metallischen (nicht ferromagnetischen) Leitern beschäftigen wollen<sup>3</sup>.

Am besten werden die elektromagnetischen Erscheinungen in Metallen verständlich, wenn wir kurz den grundlegenden Aufbau rekapitulieren: Ein Metall ist im wesentlichen ein Kristallgitter aus positiv geladenen Ionen (Atomkerne+, „Rumpfelektronen“), in welchem im Falle einer von außen anliegenden konstanten elektrischen Spannung die Leitungselektronen den stationären elektrischen Strom ausmachen. In Abwesenheit von Strömen ist der Leiter insgesamt elektrisch neutral. Daher ist für den Fall, das kein Strom fließt,  $n_{Q0} = 0$ .

Es sei  $\vec{v}(x)$  das Geschwindigkeitsfeld der Ladungsträger im Sinne der Hydrodynamik. Um kovariante Materialgleichungen aufzustellen, ist es bequemer, mit kovarianten Größen zu arbeiten. Die Vierergeschwindigkeit wird durch

$$(u^{\mu}) = \gamma \begin{pmatrix} c \\ \vec{v} \end{pmatrix} \quad \text{mit} \quad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}\tag{97}$$

definiert. Es handelt sich dabei um die Änderung des Vierervektors pro Eigenzeitintervall des Fluidelements.

---

<sup>3</sup>Wir wollen gleich betonen, daß diese Betrachtungen von rein akademischen Interesse sind, denn die Driftgeschwindigkeit der Elektronen in einem Draht ist bei gewöhnlichen „Haushaltströmen“ verschwindend gering gegen die Lichtgeschwindigkeit, so daß die Genauigkeit der üblichen nichtrelativistischen Materialgleichung völlig ausreichend ist. Zur Abschätzung dieser Driftgeschwindigkeit bemerken wir, daß (in nichtrelativistischer Näherung) der Strom durch  $\vec{j} = -en\vec{v}$ , wo  $n$  die Elektronendichte (Anzahl von Leitungselektronen pro Volumen) gegeben ist. Stellen wir uns einen Draht von kleinem Querschnitt  $A$  vor, können wir den Gesamtstrom als  $I = jA = envA$  schreiben. Daraus folgt, daß  $v = I/(enA)$  ist. Schätzt man die Größen für einen Kupferdraht mit typischen Durchmessern von 1mm ab, folgt für Ströme im Bereich von 1A eine Driftgeschwindigkeit der Größenordnung  $v \sim 10^{-3}$ m/s.



Beginnen wir mit dem Zusammenhang zwischen Strom und elektromagnetischem Feld, also der Verallgemeinerung des Ohmschen Gesetzes, das im Ruhesystem  $\vec{j}_{\text{ruh}} = \sigma \vec{E}_{\text{ruh}}$  lautet. Im lokalen Ruhesystem des Mediums gilt

$$u_\mu j^\mu = n_{Q0} c^2, \quad (98)$$

wobei wir zunächst davon absehen wollen, daß im Falle eines gewöhnlichen Leiters  $n_{Q0} = 0$  ist. Da (98) eine kovariante Gleichung ist, muß sie für jedes Bezugssystem gelten. Man beachte dabei, daß die auf das Ruhesystem bezogene Ladungsdichte  $n_{Q0}$  ein Skalarfeld ist, nicht die Ladungsdichte in einem allgemeinen Bezugssystem. Diese ist, wie wir oben bei der Betrachtung der kovarianten Formulierung der Maxwellgleichungen im Vakuum gesehen haben, bis auf den Faktor  $c$  identisch mit der Zeitkomponente der Viererstromdichte  $j$ . Der Leitungsstrom  $j_L^\mu$  muß  $\propto B^{\mu\nu}$  sein, und aus einem Tensor zweiter Stufe kann man nur einen Vektor machen, indem man ihn mit einem Vektor überschiebt, und dazu steht und nur die Vierergeschwindigkeit (97) zur Verfügung. Wir haben also

$$j_L^\mu = \sigma B^{\mu\nu} \frac{u_\nu}{c}. \quad (99)$$

Offenbar gilt  $u_\mu j_L^\mu = 0$ , so daß wir gemäß (98) für die Gesamtstromdichte

$$j^\mu = n_{Q0} u^\mu + \sigma B^{\mu\nu} \frac{u_\nu}{c} \quad (100)$$

zu schreiben haben.

Wir setzen nun wieder, unserem Leiterproblem entsprechend  $n_{Q0} = 0$ . Wir wollen als nächstes zeigen, daß hier die (notwendig viererskalare) Größe  $\sigma$  im Grenzfalle sehr kleiner Geschwindigkeiten  $|\vec{v}| \ll c$  der Elektronen mit der Definition der Leitfähigkeit des Mediums [s. (1)] übereinstimmt. Setzen wir (97) in (99) ein, finden wir

$$j = \begin{pmatrix} cn_Q \\ \vec{j} \end{pmatrix} = \sigma \gamma \begin{pmatrix} \vec{v} \cdot \vec{E}/c \\ \vec{E} + \frac{\vec{v}}{c} \times \vec{B} \end{pmatrix}. \quad (101)$$

Multiplizieren wir die räumlichen Komponenten dieser Gleichung mit  $\vec{v}$  und vergleichen mit der zeitlichen Komponente erhalten wir

$$\vec{j} \vec{v} = \sigma \gamma \vec{v} \vec{E} = c^2 n_Q. \quad (102)$$

Andererseits ist die Stromdichte

$$\vec{j} = n_{\text{cond}} \vec{v}, \quad (103)$$

wobei  $n_{\text{cond}}$  die auf unser Inertialsystem bezogene Dichte der Leitungselektronen ist. Wir haben also

$$n_Q = \frac{\vec{v}^2}{c^2} n_{\text{cond}}. \quad (104)$$

Tatsächlich ist also die Ladungsdichte im Inneren des Leiters um den Faktor  $\beta^2 = \vec{v}^2/c^2$  kleiner als die Leitungselektronenstromdichte und damit für gewöhnliche Ströme in metallischen Leitern, für die die Driftgeschwindigkeit in der Ordnung  $10^{-3}$  m/s beträgt, völlig vernachlässigbar. Die nichtrelativistische Behandlung, die wir oben besprochen haben, ist also eine hervorragende Näherung.

Nun müssen wir noch die Materialgleichungen für den Zusammenhang zwischen den Erregungsgrößen  $\vec{D}$  und  $\vec{H}$  und den Feldstärken  $\vec{E}$  und  $\vec{B}$  kovariant erfassen. Wie wir sehen werden, ist

selbst in dem Falle, daß das Medium weder elektrisch noch magnetisch polarisierbar ist, wenn also  $\epsilon = \mu = 1^4$  gilt,  $B_{\mu\nu}$  und  $H_{\mu\nu}$  nicht übereinstimmen. Die inhomogenen Maxwellgleichungen sind dabei anstatt mit  $(B^{\mu\nu}) = (\vec{E}, \vec{B})$  mit  $(H^{\mu\nu}) = (\vec{D}, \vec{H})$  anzusetzen. Unsere Maxwellgleichungen in kovarianter Form haben also

$$\partial_\mu (\dagger B)^{\mu\nu} = 0, \quad \partial_\mu H^{\mu\nu} = \frac{1}{c} j^\nu \quad (105)$$

zu lauten. In der Dreierformulierung ausgedrückt, heißt das

$$\text{rot } \vec{E} + \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = 0 \quad (106)$$

$$\text{div } \vec{B} = 0, \quad (107)$$

$$\text{rot } \vec{H} - \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} = \vec{j}, \quad (108)$$

$$\text{div } \vec{D} = n_Q. \quad (109)$$

Wir nehmen nun wieder den einfachsten Fall an, d.h. daß das elektromagnetische Feld so schwach ist, daß der Zusammenhang zwischen  $B^{\mu\nu}$  und  $H^{\mu\nu}$  linear ist. Wir benötigen dazu offenbar eine Tensorgröße  $M_{\mu\nu\rho\sigma}$ , so daß

$$H_{\mu\nu} = \frac{1}{2} M_{\mu\nu\rho\sigma} B^{\rho\sigma} \quad (110)$$

ist. Dabei kann  $M$  nur aus auf den Leiter bezogene physikalische Größen und allgemein invariante Tensorausdrücke aufgebaut sein. Dazu stehen uns wegen der vorausgesetzten Homogenität und Isotropie des Leiters ohne Stromfluß lediglich  $g_{\mu\nu}$ ,  $u^\mu$  und im Prinzip auch  $\epsilon_{\mu\nu\rho\sigma}$  zur Verfügung. Da aber die elektromagnetische Wechselwirkung invariant unter Raumspiegelungen ist, muß der Term mit  $\propto \epsilon_{\mu\nu\rho\sigma}$  verschwinden. Wir müssen allerdings annehmen, daß  $M_{\mu\nu\rho\sigma}$  beim Vertauschen seiner ersten beiden Indizes das Vorzeichen wechselt, da  $H_{\mu\nu}$  ein antisymmetrischer Tensor ist.  $M_{\mu\nu\rho\sigma}$  kann auch antisymmetrisch der Indizes  $\rho, \sigma$  gewählt werden, da ja auch  $B^{\rho\sigma}$  ein antisymmetrischer Tensor ist. Demnach muß  $M_{\mu\nu\rho\sigma}$  von der Form

$$M_{\mu\nu\rho\sigma} = C_1 (g_{\mu\rho} g_{\nu\sigma} - g_{\nu\rho} g_{\mu\sigma}) + \frac{C_2}{2} (g_{\mu\rho} u_\nu u_\sigma - g_{\nu\rho} u_\mu u_\sigma - g_{\mu\sigma} u_\nu u_\rho + g_{\nu\sigma} u_\mu u_\rho) \quad (111)$$

sein. Die Skalare  $C_1$  und  $C_2$  müssen dabei durch  $\epsilon$  und  $\mu$  ausgedrückt werden können. Dazu setzen wir (111) in (110) ein und vergleichen im Limes  $|\vec{v}|/c \rightarrow 0$  mit den nichtrelativistischen Materialgleichungen  $\vec{D} = \epsilon \vec{E}$ ,  $\vec{B} = \mu \vec{H}$ . Führt man die Doppelsumme (110) aus, findet man durch Vergleich der Komponenten auf beiden Seiten die Beziehungen

$$\begin{aligned} \vec{D} &= (C_1 + \gamma^2 C_2) \vec{E} + \gamma^2 C_2 \left( \frac{\vec{v}}{c} \times \vec{B} - \frac{\vec{v} \cdot \vec{E}}{c} \frac{\vec{v}}{c} \right), \\ \vec{H} &= [C_1 + C_2 (\gamma^2 - 1)] \vec{B} + \gamma^2 C_2 \left( \frac{\vec{v}}{c} \times \vec{E} - \frac{\vec{v} \cdot \vec{B}}{c} \frac{\vec{v}}{c} \right). \end{aligned} \quad (112)$$

Entwickeln wir dies bis zur ersten Ordnung nach  $|\vec{v}|/c$ , ergibt sich

$$\vec{D} = (C_1 + C_2) \vec{E} + C_2 \frac{\vec{v}}{c} \times \vec{B} + \mathcal{O}(\vec{v}^2/c^2), \quad \vec{H} = C_1 \vec{B} + C_2 \frac{\vec{v}}{c} \times \vec{E} + \mathcal{O}(\vec{v}^2/c^2). \quad (113)$$

<sup>4</sup>Man beachte, daß in dem hier verwendeten Einheitensystem das Vakuum die Dielektrizitätskonstante und Permeabilität  $\epsilon_{\text{vac}} = \mu_{\text{vac}} = 1$  besitzt.

Vernachlässigen wir hierin auch noch die führenden relativistischen Korrekturen zur Ordnung  $\mathcal{O}(|\vec{v}|/c)$ , finden wir durch Vergleich mit den nichtrelativistischen Materialgleichungen

$$C_1 + C_2 = \epsilon, \quad C_1 = \frac{1}{\mu} \rightarrow C_2 = \epsilon - \frac{1}{\mu}. \quad (114)$$

Die Gleichungen (112) sind recht kompliziert, aber auch in dieser Form nicht notwendig, denn wir benötigen im Grunde nur Gleichungen, die  $\vec{D}$  und  $\vec{H}$  eindeutig durch  $\vec{E}$  und  $\vec{B}$  ausdrücken. Dies ist zwar durch (112) bereits in gelöster Form ausgeschrieben, aber diese Beziehungen lassen sich durch einfachere Gleichungen erfassen. Dazu bemerken wir, daß der Materialtensor (111) einfache Eigenschaften hinsichtlich der Vierergeschwindigkeit  $u^\mu$  besitzt. Zunächst gilt

$$M^{\mu\nu\rho\sigma} u_\nu = \epsilon(g^{\mu\rho} u^\sigma - g^{\mu\sigma} u^\rho). \quad (115)$$

Das bedeutet aber wegen (110)

$$H^{\mu\nu} u_\nu = \epsilon B^{\mu\nu} u_\nu. \quad (116)$$

Dividiert man hier noch beide Seiten durch  $u_0/c = \gamma$ , erhält man in dreidimensionaler Form

$$\vec{D} + \frac{\vec{v}}{c} \times \vec{H} = \epsilon \left( \vec{E} + \frac{\vec{v}}{c} \times \vec{B} \right). \quad (117)$$

Die Gleichung für  $\mu = 0$  ist übrigens redundant, denn sie lautet

$$\vec{v} \cdot \vec{D} = \epsilon \vec{v} \cdot \vec{E}, \quad (118)$$

und diese Gleichung folgt sofort aus (117) durch skalare Multiplikation mit  $\vec{v}$ . Die Gleichung (116) erhält man übrigens einfacher, indem man die Gleichung an dem gegebenen Raumzeitpunkt, in dem Bezugssystem betrachtet, in dem dort  $\vec{v} = 0$  ist. In diesem Bezugssystem gilt nämlich  $\vec{D} = \epsilon \vec{E}$ . Da in diesem Falle  $u = (c, 0, 0, 0)^t$  ist, kann man sie sofort kovariant in der Form (116) ausdrücken. Da dies eine Tensorgleichung ist, gilt sie aber in jedem Bezugssystem.

Die entsprechende Beziehung für den Zusammenhang zwischen magnetischer Feldstärke und Erregung können wir herleiten, indem wir (110) mit Hilfe des Levi-Civita-Symbols in eine Tensorgleichung für den dualen Erregungstensor überführen. Dieser Aufwand ist aber unnötig, und wir können gleich unser einfacheres Kovarianzargument anwenden. Im lokalen Ruhssystem der Fluidzelle am gerade betrachteten Raumzeitpunkt lautet die Materialgleichung ja  $\vec{H} = \mu \vec{B}$ , und sie schreibt sich kovariant in der Form

$$(\dagger B)^{\mu\nu} u_\nu = \mu (\dagger H)^{\mu\nu} u_\nu \quad (119)$$

oder in dreidimensionaler Form ausgedrückt

$$\vec{B} - \frac{\vec{v}}{c} \times \vec{E} = \mu \left( \vec{H} - \frac{\vec{v}}{c} \times \vec{D} \right). \quad (120)$$

Für die Zeitkomponente der Vierertensorgleichung (119) gilt das Analoge wie oben für (116) und (117).

Es ist klar, daß wir (112) aus (117) und (120) erhalten können, indem wir die letzteren Gleichungen zum einen skalar, zum anderen vektoriell mit  $\vec{v}$  addieren und dann die Felder in Komponenten

parallel und senkrecht zu  $\vec{v}$  zerlegen. Unsere vollrelativistischen makroskopischen Maxwellgleichungen lauten also

$$\text{rot } \vec{E} + \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = 0, \quad \text{div } \vec{B} = 0, \quad (121)$$

$$\text{rot } \vec{H} - \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} = \frac{1}{c} \vec{j}, \quad \text{div } \vec{D} = n_Q, \quad (122)$$

$$\vec{D} + \frac{\vec{v}}{c} \times \vec{H} = \epsilon \left( \vec{E} + \frac{\vec{v}}{c} \times \vec{B} \right), \quad (123)$$

$$\vec{B} - \frac{\vec{v}}{c} \times \vec{E} = \mu \left( \vec{B} - \frac{\vec{v}}{c} \times \vec{D} \right) = 0, \quad (124)$$

$$\vec{j} = \gamma \sigma \left( \vec{E} + \frac{\vec{v}}{c} \times \vec{B} \right). \quad (125)$$

### 6.3 Das Koaxialkabel (relativistisch)

Betrachten wir wieder das Koaxialkabel vom Beginn des Artikels. Wir setzen wieder der Einfachheit  $\epsilon = \mu = 1$ , betrachten also das Leiterinnere als elektrisch und magnetisch unpolarisierbar. Dann vereinfachen sich wegen  $B = 0$  die Materialgleichungen (112) auf

$$\vec{D} = \vec{E}, \quad \vec{H} = \vec{B}. \quad (126)$$

Weiter betrachten wir den stationären Fall, d.h. alle Felder sind zeitunabhängig. Damit vereinfachen sich (121-125) zu

$$\text{rot } \vec{E} = 0, \quad (127)$$

$$\text{div } \vec{B} = 0, \quad (128)$$

$$\text{div } \vec{E} = n_Q, \quad (129)$$

$$\text{rot } \vec{B} = \frac{1}{c} \vec{j} \quad (130)$$

$$\vec{j} = \sigma \gamma \left( \vec{E} + \frac{\vec{v}}{c} \times \vec{B} \right). \quad (131)$$

In der nichtrelativistischen Näherung war  $\vec{j} = \text{const} = j_z \vec{e}_z$  und auch  $n_{\text{cond}} = \text{const}$ , so daß schließlich auch  $\vec{v} = v_z \vec{e}_z = \text{const}$  ist. Wir versuchen nun, mit diesem Ansatz auch die vollrelativistischen Gleichungen (127-131) zu lösen.

Als erstes bilden wir die Divergenz von (130), was  $\text{div } \vec{j} = 0$  liefert. Da weiter wegen  $\vec{v} = \text{const}$

$$\text{div} (\vec{v} \times \vec{B}) = -\vec{v} \text{rot } \vec{B} = -\frac{\vec{v}}{c} \vec{j} \quad (132)$$

ist, muß folglich

$$\text{div } \vec{E} = n_Q = \frac{\vec{v}}{c^2} \vec{j} = \frac{\vec{v}^2}{c^2} n_{\text{cond}}. \quad (133)$$

Dies hatten wir auch schon aus der kovarianten Gl. (104) gefolgert. Die relativistischen Gleichungen sind also mit unserer Annahme einer konstanten Leitungselektronengeschwindigkeit und konstanter Leitungselektronendichte verträglich.

Es ist klar, daß sich (bis auf unser geändertes Einheitensystem) für das Magnetfeld dieselben Lösungen wie im nichtrelativistischen Fall ergeben. Wir haben also unter Berücksichtigung der geänderten Einheitenkonvention der Reihe nach im Innenleiter (Gebiet 1), im Zwischenraum zwischen den Leitern (Gebiet 2), im Außenleiter (Gebiet 3) und schließlich im Außenraum gem. (23,26,29,30)

$$\begin{aligned}
\vec{B}_1 &= \frac{I}{2\pi a^2 c} \rho \vec{e}_\varphi, \\
\vec{B}_2 &= \frac{I}{2\pi \rho c} \vec{e}_\varphi, \\
\vec{B}_3 &= \frac{I}{2\pi(\tilde{c}^2 - b^2)c} \left[ \frac{\tilde{c}^2}{\rho} - \rho \right] \vec{e}_\varphi \\
\vec{B}_4 &= 0.
\end{aligned} \tag{134}$$

Dabei haben wir nun den Radius des Außenleiters mit  $\tilde{c}$  bezeichnet, um einen Konflikt mit der Bezeichnung  $c$  für die Lichtgeschwindigkeit zu vermeiden.

Im Inneren der Leiter ist damit vermöge (131) die elektrische Feldstärke bereits vollständig bestimmt. Zum einen muß es nun eine Feldstärke in  $\vec{e}_\rho$ -Richtung geben, um den entsprechenden Term vom Magnetfeld auf der rechten Seite zu kompensieren. Zum anderen muß es auch eine konstante  $z$ -Komponente geben, die durch die Stromdichte im Leiter vollständig bestimmt ist. Es gilt also

$$\begin{aligned}
\vec{E}_1 &= \frac{v_{1z}}{c} B_{1\varphi} \vec{e}_\rho + \frac{I}{\sigma \gamma_1 \pi a^2} \vec{e}_z, \\
\vec{E}_3 &= \frac{v_{3z}}{c} B_{3\varphi} \vec{e}_\rho - \frac{I}{\sigma \gamma_3 \pi (\tilde{c}^2 - b^2)} \vec{e}_z.
\end{aligned} \tag{135}$$

Zur konkreten Bestimmung der Geschwindigkeiten der Leitungselektronen kommen wir unten noch zu sprechen. In den freien Räumen zwischen den Leitern und im Außenraum sagt die Materialgleichung  $\vec{E}$  nichts aus, da dort ja  $\sigma = 0$  ist. Freilich gilt aber dort auch  $n_Q = 0$ , und damit erhalten wir die Lösung wie im nichtrelativistischen Fall, nur daß in der Stetigkeitsbedingung für  $E_z$  an den Zylindermänteln gem. (135) der jeweilige Faktor  $1/\gamma$  zu berücksichtigen ist. Es gilt also

$$\begin{aligned}
\vec{E}_2 &= -\frac{I}{\sigma \pi \ln(b/a)} \left[ \frac{1}{\gamma_1 a^2} + \frac{1}{(\tilde{c}^2 - b^2) \gamma_3} \right] \frac{z}{\rho} \vec{e}_\rho \\
&+ \left\{ \frac{I}{\sigma \gamma_1 \pi a^2} - \frac{I}{\sigma \pi \ln(b/a)} \left[ \frac{1}{a^2 \gamma_1} + \frac{1}{(\tilde{c}^2 - b^2) \gamma_3} \right] \ln\left(\frac{\rho}{a}\right) \right\} \vec{e}_z
\end{aligned} \tag{136}$$

und

$$\vec{E}_4 = -\frac{I}{\sigma \gamma_3 \pi (\tilde{c}^2 - b^2)} \vec{e}_z. \tag{137}$$

Zur Bestimmung der Driftgeschwindigkeiten  $v_{1z}$  bzw.  $v_{3z}$  der Leitungselektronen innerhalb der Leiter müssen wir die Leitungselektronendichte kennen. Es ist klar, daß diese am bequemsten durch die positive Ladungsdichte der ruhenden Rumpffionen auszudrücken ist. Fließt kein Strom, sind also die Elektronen in Ruhe, muß die Leitungselektronendichte  $n_{\text{cond}0} = -n_{Q,+0}$  sein, wobei der Index 0 angibt, daß die Dichte im **Ruhsystem** der Elektronen zu bestimmen ist und dort vom Betrage her mit der Ruhedichte der positiven Rumpffionen übereinstimmt.

Im Ruhssystem der Elektronen des Innenleiters besitzen diese ein elektrisches Feld der Gestalt

$$\vec{E}'_{1-} = -\frac{n_{Q,+0}\rho}{2}\vec{e}_\rho, \quad (138)$$

besitzen aber kein magnetisches Feld:  $\vec{B}'_{1-} = 0$ .

Im Ruhssystem des Leiters ergibt sich dann das elektrische und magnetische Feld, das von diesen Elektronen herrührt, durch den zu (94) inversen Lorentzboost. Wegen  $\Lambda^{-1}(\vec{v}) = \Lambda(-\vec{v})$  heißt das

$$\vec{E}_{1-} = -\frac{\gamma_1 n_{Q,+0}\rho}{2}\vec{e}_\rho, \quad \vec{B}_1 = \gamma_1 \frac{\vec{v}_1}{c} \times \vec{E}'_{1-}, \quad n_{\text{cond}} = \gamma_1 n_{\text{cond}0} = -\gamma_1 n_{Q,0+}. \quad (139)$$

Vergleich mit unserem makroskopischen Resultat (134) zusammen mit (103) sowie die analoge Überlegung für den Außenleiter ergibt dann

$$\gamma_1 v_{1z} = -\frac{I}{\pi a^2 n_{Q,+0}}, \quad \gamma_3 v_{3z} = +\frac{I}{\pi(\tilde{c}^2 - a^2)n_{Q,+0}}. \quad (140)$$

Berechnet man auch das elektrische Feld der Leitungselektronen, sieht man, daß es noch ein zusätzliches Radialfeld geben muß, d.h. das gesamte elektrische Feld ist nicht einfach durch das geboostete Feld der Elektronen und das statische Feld der Ionenrümpfe gegeben. Dieses Zusatzfeld wird benötigt, um wie in der makroskopischen Rechnung den Ansatz für die allein in  $z$ -Richtung weisende Stromdichte konsistent mit der Materialgleichung (131) zu machen. Dieses mit dem Magnetfeld zusammenhängende elektrostatische Zusatzfeld rührt vom Halleffekt her, d.h. die sich bewegenden Elektronen werden aufgrund der Lorentzkraft ein wenig ins Leiterinnere gedrängt, und zwar gerade soviel, daß das gesamte elektrostatische radiale Zusatzfeld genau die Lorentzkraft kompensiert. Aus den rein makroskopischen Gleichungen konnten wir daher noch nicht einmal das Vorzeichen der Ladungsdichte bestimmen, da dazu Kenntnis der  $v_z$ , d.h. die Geschwindigkeit der strömenden Ladungen notwendig ist. Erst unser einfaches mikroskopisches Modell der im Hintergrund der ruhenden positiv geladenen Rumpffionen fließenden Leitungselektronen hat (140) ergeben, und diese Gleichung ermöglicht uns bei Kenntnis der Ionenrumpfladungsdichte die Berechnung der Geschwindigkeiten und damit der „Nettoladungsdichten“ aus (133)

$$n_{Q1} = -\gamma_1 \frac{\vec{v}_1^2}{c^2} n_{Q,+0}, \quad n_{Q3} = -\gamma_3 \frac{\vec{v}_3^2}{c^2} n_{Q,+0}. \quad (141)$$

Da die negativ geladenen Elektronen sich bewegen, ergibt das Vorzeichen der Lorentzkraft in der Tat sofort, daß die Nettoladungsdichten jeweils negativ sein müssen. Wären die positiven Ionen für die Leitung verantwortlich, müßten diese Nettoladungen entsprechend positiv sein.

## A Die Differentialoperatoren in Bipolarzylinderkoordinaten

In diesem Anhang leiten wir noch die Ausdrücke für die Differentialoperatoren  $\text{div}$ ,  $\text{grad}$ ,  $\text{rot}$  und  $\Delta$  her. Dazu beginnen wir mit der Berechnung der orthonormierten Bipolarzylinderkoordinateneinheitsvektoren. Gemäß (55) ist

$$\vec{r} = \frac{a \sinh u}{\cosh u - \cos v} \vec{e}_x + \frac{a \sin v}{\cosh u - \cos v} \vec{e}_y + z \vec{e}_z. \quad (142)$$

Wir werden gleich sehen, daß die Koordinaten in der Reihenfolge  $(v, u, z)$  zu nehmen sind, damit wir rechtshändig orientierte Dreibeine als Basisvektoren erhalten und daher sogleich die Koordinaten in dieser Reihenfolge behandeln

$$\begin{aligned}\partial_v \vec{r} &= \frac{a}{(\cosh u - \cos v)^2} [-\sinh u \sin v \vec{e}_x + (\cosh u \cos v - 1) \vec{e}_y], \\ \partial_u \vec{r} &= \frac{a}{(\cosh u - \cos v)^2} [(1 - \cosh u \cos v) \vec{e}_x - \sinh u \sin v \vec{e}_y], \\ \partial_z \vec{r} &= \vec{e}_z.\end{aligned}\tag{143}$$

Wir folgen weiter den Bezeichnungen in [Hee05]. Es gilt

$$h_v = h_u = \frac{a}{\cosh u - \cos v}, \quad h_z = 1.\tag{144}$$

Die Einheitsvektoren sind also

$$\begin{aligned}\vec{e}_v &= \frac{1}{\cosh u - \cos v} [-\sinh u \sin v \vec{e}_x + (\cosh u \cos v - 1) \vec{e}_y], \\ \vec{e}_u &= \frac{1}{\cosh u - \cos v} [(1 - \cosh u \cos v) \vec{e}_x - \sinh u \sin v \vec{e}_y], \\ \vec{e}_z &= \vec{e}_z.\end{aligned}\tag{145}$$

Für den Gradienten eines Skalarfeldes  $\Phi(v, u, z)$  ergibt sich also

$$\text{grad } \Phi = \frac{\cosh u - \cos v}{a} (\vec{e}_v \partial_v \Phi + \vec{e}_u \partial_u \Phi) + \vec{e}_z \partial_z \Phi\tag{146}$$

und für Rotation und Divergenz eines Vektorfeldes  $\vec{A} = A_v \vec{e}_v + A_u \vec{e}_u + A_z \vec{e}_z$

$$\begin{aligned}\text{rot } \vec{A} &= \vec{e}_v \left( \frac{\cosh u - \sin v}{a} \partial_u A_z - \partial_z A_u \right) \\ &+ \vec{e}_u \left( \partial_z A_v - \frac{\cosh u - \sin v}{a} \partial_v A_z \right) \\ &+ \vec{e}_z \frac{(\cosh u - \cos v)(\partial_v A_u - \partial_u A_v) + A_v \sinh u - A_u \sin v}{a}, \\ \text{div } \vec{A} &= \frac{1}{a} [(\cosh u - \cos v)(\partial_v A_v + \partial_u A_u) - A_v \sin v - A_u \sinh u] + \partial_z A_z.\end{aligned}\tag{147}$$

Für den Laplaceoperator erhalten wir schließlich durch Kombination von (146) und der letzten Gleichung in (147)

$$\Delta \Phi = \frac{(\cosh u - \cos v)^2}{a^2} (\partial_v^2 \Phi + \partial_u^2 \Phi) + \partial_z^2 \Phi.\tag{148}$$

## Danksagung

Ich bedanke mich bei den Herren Kusmierz, Filla und Vogel für's Korrekturlesen, sowie für in der Newsgroup und via E-mail übermittelte Hinweise und Fragen, die hoffentlich geholfen haben, das Skript in einigen Teilen ein wenig verständlicher zu machen.

## Literatur

- [Dra06] N. Dragon, Geometrie der Relativitätstheorie, FAQ der Newsgroup de.sci.physik (2006), <http://theory.gsi.de/~vanhees/faq/relativity/relativ.html>.
- [Hee05] H. van Hees, Klassische Vektoranalysis, FAQ der Newsgroup de.sci.physik (2005), <http://theory.gsi.de/~vanhees/faq/vekanal/vekanal.html>.
- [Hee06] H. van Hees, Allgemeine Relativitätstheorie und Kosmologie, FAQ der Newsgroup de.sci.physik (2006), <http://theory.gsi.de/~vanhees/faq/cosmo/cosmo.html>.
- [JO01] J. Jackson and L. Okun, Historical roots of gauge invariance, Reviews of Modern Physics **73**, 663 (2001), <http://link.aps.org/doi/10.1103/RevModPhys.73.663>.