

# Cooper-Paare

Michael Hartwig

16. September 1998

## Zusammenfassung

Cooper-Paare sind Elektronenpaare mit dem Gesamtimpuls Null, sie sind die Träger der Supraleitung. Sie wechselwirken durch den Austausch von Phononen, die Bedingungen in einem Supraleiter sind dabei so, daß diese Wechselwirkung die Abstoßung der Elektronen aufgrund der elektrostatischen Kräfte überwiegt. Die Existenz der Cooper-Paare ist durch die Flußquantelung experimentell bestätigt

## 1 Die Elektron - Phonon - Wechselwirkung

1950/51 wurde gleichzeitig von Fröhlich und unabhängig davon von Bardeen eine Wechselwirkung der Elektronen über die Schwingungen des Gitters angegeben, die zu einem grundsätzlichen Verständnis der Supraleitung führte.

Wie kann man sich diese Wechselwirkung vorstellen ?

Vereinfacht gesagt tritt ein Elektron mit dem Gitter in Wechselwirkung und deformiert es. Ein zweites Elektron "sieht" das deformierte Gitter und nutzt diese Deformation aus, um seine Energie zu erniedrigen. Der Gitterzustand ist eine Überlagerung von Eigenschwingungen. Diese Eigenschwingungen sind in Phononen gequantelt. Die zwei Elektronen sind also über den virtuellen Austausch von Phononen gekoppelt. Ergänzend kann man noch anführen, daß dieser Mechanismus im Innern der Fermikugel unwirksam ist. Dies ist aber unmittelbar einleuchtend, da dort keine unbesetzten Zustände vorhanden sind, Phononen können also weder absorbiert noch emittiert werden.

Um in das statische Modell Dynamik zu bringen, kann man sich vorstellen, daß das zweite Elektron in der Polarisationsspur des ersten fliegt und dabei seine Energie abgesenkt wird, weil das Gitter ja schon in einem polarisierten Zustand ist. Diese so korrelierten Elektronen bilden ein Paar mit dem Gesamtimpuls Null. Man nennt sie Cooper-Paare, weil Cooper als erster zeigen konnte, daß eine derartige Korrelation zu einer Absenkung der Gesamtenergie führt.

Ein Cooper-Paar besteht also aus zwei Elektronen mit entgegengesetzten, gleich großen Impulsen und entgegengesetztem Spin:

$$\text{Cooper-Paar} : \{ \vec{p} \uparrow, -\vec{p} \downarrow \}$$

Betrachten wir nun die Gesamtheit der Cooper-Paare.

Die Paare sind starr korreliert - sie befinden sich alle im gleichen Quantenzustand, dies kann man aufgrund der experimentellen Erfahrung fordern. Daraus ergibt sich die wohl (technisch) wichtigste Eigenschaft des Supraleiters - der verlustfreie Transport des Stromes. Wenn sich die Cooper-Paare im gleichen Quantenzustand befinden, stimmen sie in allen physikalischen Größen überein. So gilt für jedes Cooper-Paar die Forderung: Gesamtimpuls gleich Null. Bringt man die Paare in ein elektrisches Feld, erhalten sie einen Impuls

- sie werden beschleunigt. Dieser Impuls muß aber für alle Paare gleich sein. Würde ein Cooper-Paar mit dem Gitter wechselwirken, würde es dadurch in einen anderen Zustand übergehen, dies ist aber nicht zulässig. Ein Cooper-Paar kann nur dann mit dem Gitter in Wechselwirkung treten, wenn es aufgebrochen wird. Dazu ist eine bestimmte Energie - die Bindungsenergie der Paarkorrelation notwendig. Daraus folgt sofort der verlustfreie Ladungstransport durch das Gitter.

## 2 Flußquantisierung

Der magnetische Fluß durch einen supraleitenden Ring kann nur quantisierte Werte annehmen. Die Flußquantisierung ist übrigens ein Beispiel für einen langreichweitigen Quanteneffekt, denn die Kohärenz des supraleitenden Zustandes reicht über den ganzen Ring.

Für die Geschwindigkeit eines Teilchen gilt nach Hamilton:

$$\vec{v} = \frac{1}{m} \left( \vec{p} - \frac{q}{c} \vec{A} \right) = \frac{1}{m} \left( -i\hbar \nabla - \frac{q}{c} \vec{A} \right)$$

Der Teilchenfluß ist gegeben durch

$$\psi^* \vec{v} \psi = \frac{n}{m} \left( \hbar \nabla \theta - \frac{q}{c} \vec{A} \right) \quad (1)$$

Hierbei ist

$$\psi = n^{\frac{1}{2}} e^{i\theta(\vec{r})}; \quad \psi^* = n^{\frac{1}{2}} e^{-i\theta(\vec{r})}$$

Für die elektrische Stromdichte folgt dann:

$$\vec{j} = q \psi^* \vec{v} \psi = \frac{nq}{m} \left( \hbar \nabla \theta - \frac{q}{c} \vec{A} \right) \quad (2)$$

Bildet man auf beiden Seiten die Rotation, erhält man die Londongleichung

$$\text{rot} \vec{j} = -\frac{nq^2}{mc} \vec{B} \quad (3)$$

Dabei wurde benutzt, daß die Rotation des Gradienten eines Skalars verschwindet. Sei nun C ein geschlossen Weg der im Inneren des supraleitenden Ringes liegt. Wegen des Meißner-Effekts können wir sagen, daß  $\vec{B}$  und  $\vec{j}$  im Innern Null sind. Gleichung (2) wird Null, wenn

$$\hbar c \nabla \theta = q \vec{A} \quad (4)$$

Für die Phasenänderung bei einmaligem Umlauf des Ringes gilt

$$\oint_C \nabla \theta \cdot d\vec{l} = \theta_2 - \theta_1$$

In der klassischen Näherung ist die Wahrscheinlichkeitsamplitude meßbar, so daß  $\psi$  eindeutig sein muß und gelten muß:

$$\theta_2 - \theta_1 = 2\pi s \quad (5)$$

wobei s eine ganze Zahl ist. Wendet man den Stokeschen Satz an gilt

$$\oint_C \vec{A} \cdot d\vec{l} = \int_C (\text{rot} \vec{A}) \cdot d\vec{\sigma} = \int_C \vec{B} \cdot \vec{\sigma} = \Phi \quad (6)$$

wobei  $d\vec{\sigma}$  ein Flächenelement auf einer von C begrenzten Fläche ist, und  $\Phi$  der magnetische Fluß durch C. Mit (4), (5) und (6) folgt  $2\pi\hbar cs = q\Phi$ , oder

$$\Phi = (2\pi\hbar c/q)s$$

Der Fluß durch den Ring ist also durch ganzzahlige Vielfache von  $2\pi\hbar c/p$  quantisiert. Das Experiment hat für q den Wert 2e ergeben. Das bedeutet, daß der Suprastrom von Teilchen der Ladung 2e, den Cooper-Paaren getragen wird.