Allgemeine Relativitätstheorie
und
Kosmologie

Hendrik van Hees[1]

17. Juli 2007

[1]e-mail: hees@comp.tamu.edu

Inhaltsverzeichnis

1 Spezielle Relativitätstheorie **5**
1.1 Das spezielle Relativitätsprinzip 5
1.2 Die Raum-Zeit-Geometrie 14
1.3 Relativistische Dynamik eines Punktteilchens 19
1.3.1 Die Minkowskikraft 20
1.3.2 Der Newtonsche Grenzfall 22
1.3.3 Energie und Impuls des Punktteilchens 22
1.3.4 Das Hamiltonsche Wirkungsprinzip 23
1.4 Das Noether-Theorem 30

Literaturverzeichnis **35**

Kapitel 1

Spezielle Relativitätstheorie

In diesem Kapitel wollen wir die spezielle Relativitätstheorie und die klassische Elektrodynamik und Elektronentheorie als einfachstes Beispiel einer relativistischen dynamischen Theorie studieren. Dies wird auch die in diesem Skript benutzte Notation einführen. Ich habe mich für den in der Physik weithin üblichen Riccikalkül entschieden, da dieser für praktische Rechnungen besonders geeignet ist.

1.1 Das spezielle Relativitätsprinzip

Wir leiten aus einfachen geometrischen Annahmen über den Raum und der durch die Zeit vorgeprägten Kausalstruktur des physikalischen Geschehens die möglichen Realisierungen der Raumzeit-Mannigfaltigkeit her, die mit dem **speziellen Relativitätsprinzip** vereinbar sind. Wir werden bei der Behandlung der Gravitationswechselwirkungen später sehen, daß wir diese so selbstverständlich erscheinenden geometrischen Annahmen über den Raum fallenlassen und zu einer am dynamischen Geschehen teilhabenden Raumzeit übergehen müssen. Wir folgen in der Betrachtung zum speziellen Relativitätsprinzip [BG69], machen jedoch die vereinfachende Annahme, daß die zur Raumzeit zusammengefaßte Struktur von Raum und Zeit eine **differenzierbare Mannigfaltigkeit** sein soll, denn wir gehen davon aus, daß die physikalischen Grundgesetze sich durch Differentialgleichungen ausdrücken lassen.

Ebenso schränken wir die Symmetriegruppe der Raumzeit auf die **Zusammenhangskomponente mit der Gruppenidentität** ein, denn dies ist die physikalisch plausibelste Symmetriegruppe. Die diskreten Transformationen der Raumspiegelung und der „Zeitumkehr" sind nicht notwendig Symmetrien der physikalischen Gesetze, und in der Tat zeigt sich, daß die Raumspiegelungen mit Sicherheit keine Symmetrie der Naturgesetze sind, denn die schwache Wechselwirkung verletzt die Paritätserhaltung, welche unmittelbare Folge der Raumspiegelsymmetrie ist.

Im Rahmen der lokalen Quantenfeldtheorie, die dem überaus erfolgreichen **Standardmodell der Elementarteilchen** zugrundeliegt, ist die sog. **CPT-Invarianz** Folge der Invarianz unter stetig aus der Identität deformierbaren Poincaré-Transformationen, d.h. beobachtet man einen physikalischen Vorgang, so muß es auch den entsprechenden CPT-gespiegelten Vorgang geben, d.h. ersetzt man alle Teilchen durch Antiteilchen (C-Spiegelung oder Ladungskonjugation), invertiert den Raum (P-Spiegelung oder Raumspiegelung) und kehrt den Zeitpfeil um (T-Spiegelung oder Bewegungsumkehr), muß sich wieder ein in der Natur möglicher Vorgang ergeben.

Nun weiß man, daß die schwache Wechselwirkung nicht nur die Raumspiegelungssymmetrie bricht, sondern auch die CP-Symmetrie, d.h. die aus einer Ladungskonjugation und Raumspiegelung zusammengesetzte Transformation. Da CPT aber eine Symmetrie sein muß, wenn die lokale Quantenfeldtheorie korrekt ist, muß auch die Zeitumkehrinvarianz durch die schwache Wechselwirkung verletzt sein.

Es erscheint aufgrund dieser Argumentation gerechtfertigt, Invarianz nur unter stetig mit der Identität zusammenhängenden Raumzeittransformationen zu verlangen.

(1) Wir gehen im folgenden davon aus, daß es eine **Standarduhr** gibt. Darunter stellen wir uns ein von äußeren Einflüssen weitestgehend unabhängiges periodisch funktionierendes System vor, welches mit einer als konstant anzusehenden Frequenz „Zeitticks” aussendet, d.h. daß es immer und überall für einen bzgl. ihm ruhenden Beobachter in exakt gleichen Zeitabständen einen solchen „Zeittick” aussendet.

    Es ist dabei zu beachten, daß dies zunächst jedes System sein kann. Ohne den Bezug zu anderen physikalischen Vorgängen, insbesondere zur Bewegung von Körpern können wir die Korrektheit der Annahme der Existenz einer Standarduhr nicht experimentell feststellen, d.h. die Idee von der universellen Uhr muß sich im weiteren Verlauf unserer Formulierung noch als mit der Erfahrung in hinreichender Übereinstimmung befindlich erweisen.

    Wir bemerken hier nur schon im voraus, daß wir nach dem **Standardmodell der Elementarteilchen** davon ausgehen, daß mit den von Atomen bei elektronischen Übergängen zwischen Energieniveaus ausgesandten elektromagnetischen Wellen solche Standarduhren zu jeder Zeit und an jedem Ort (wenigstens prinzipiell) verfügbar sind. Wir postulieren dann, daß durch relativ zueinander ruhende an beliebigen Orten befindliche Beobachter mit Standarduhren gemessene Zeitabstände gleich sind.

    In der Tat wird im internationalen Einheitensystem (Systéme International oder kurz SI) die Zeit durch die Frequenz der Strahlung eines bestimmten atomaren Übergangs von Cäsiumatomen definiert. Es stellt das genaueste Einheitennormal im SI überhaupt dar.

    Ebenso nehmen wir an, es gäbe einen **Einheitsmaßstab**. Auch dieser kann nach derzeitigem Kenntnisstand durch die Atome als mit hinreichender Genauigkeit realisiert gedacht werden.

    Wir werden unten sehen, daß im Rahmen des relativistischen Raumzeitmodells eine **universelle Grenzgeschwindigkeit** existiert, deren Zahlenwert mit einer Einheitszeit auch eine Einheitslänge notwendig festlegt. Wir werden später diese Geschwindigkeitseinheit 1 setzen. In diesem Kapitel ist das jedoch noch nicht möglich, da sich natürlich auch die nichtrelativistische Newtonsche Raumzeitstruktur mit den hier zu formulierenden allgemeinen Annahmen vereinbaren läßt.

(2) Es existiert ein Inertialsystem, d.h. es existiert ein Bezugssystem derart, daß für einen relativ zu diesem ruhender Beobachter ein Teilchen, das keinerlei Wechselwirkungen ausgesetzt ist, sich geradlinig gleichförmig bewegt oder in Ruhe verharrt.

Bzgl. eines solchen Bezugssystems, d.h. für einen relativ zu ihm ruhenden Beobachter, gelten hinsichtlich der Lage- und geometrischen Eigenschaften die Gesetze der euklidischen Geometrie. Insbesondere existiert eine **universelle Längeneinheit**, die sich unverändert von einem an jeden anderen Ort transportieren läßt und die Länge von Strecken an ruhenden Körpern im Sinne der euklidischen Geometrie gemessen werden können. Der Raum für einen bzgl. eines Inertialsystem ruhenden Beobachter ist also ein **affin-euklidisches Kontinuum**.

Allgemein ist ein Inertialsystem K durch eine in ihm ruhende Standarduhr, die durch ihre „Ticks" die Systemzeit t festlegt und durch ein kartesisches Koordinatensystem, das durch die Befestigung dreier aufeinander senkrecht stehender Einheitsmaßstäbe in einem beliebigen Punkt des Raumes realisiert gedacht werden kann, so daß jeder Punkt im Raum durch die Angabe der Komponenten des Ortsvektors $\vec{x}$ bzgl. dieses Koordinatensystems lokalisiert werden kann. Wir schreiben für ein solches Bezugssystem kurz $K(t, \vec{x})$.

(3) Das **spezielle Relativitätsprinzip** postuliert nun, daß alle Naturgesetze in allen durch die Annahmen (1)-(2) axiomatisch begründeten Inertialsystemen gleich sind, d.h. daß die Gleichungen, welche diese Naturgesetze beschreiben, **invariant** bei Transformationen von einem Inertialsystem in ein beliebiges anderes sein müssen.

(4) Die Zeit definiert die Kausalstruktur des Geschehens eindeutig, d.h. finden zwei Ereignisse für einen bzgl. $K(t, \vec{x})$ ruhenden Beobachter am gleichen Ort zu verschiedenen Zeiten $t_1 < t_2$ statt, so gilt für die Zeitkoordinaten eines beliebigen Beobachters, der in einem anderen Inertialsystem $K'(t', \vec{x}')$ ruht, $t'_1 < t'_2$.

Wir wollen nun die Transformationsregeln zwischen den auf Inertialsysteme bezogenen Koordinaten aus diesen allgemeinen Annahmen herleiten.

Zunächst ist es für all unsere Untersuchungen nützlich, die Raum-Zeit als einen vierdimensionalen affinen Vektorraum aufzufassen, der allerdings nicht notwendig mit einer Metrik ausgestattet zu sein braucht. Wir numerieren die Komponenten solcher **Vierervektoren** mit oberen Indizes durch, was sich insbesondere im relativistischen Kontext sehr bewähren wird. Wir schreiben also für Zeit- und Raumkoordinaten von zwei Inertialsystemen $K(t, \vec{x})$ und $K'(t', \vec{x}')$ kurz

$$(x^\mu) = (t, \vec{x})^t = (t, X, Y, Z)^t, \quad (x'^\mu) = (t', \vec{x}')^t = (t', X', Y', Z')^t, \tag{1.1}$$

wobei das hochgestellte t auf der rechten Seite dieser Gleichungen besagt, daß wir die vier Koordinaten als Spaltenvektor angeordnet denken wollen.

Wegen des speziellen Relativitätsprinzips muß nun ein im Inertialsystem K gleichförmig bewegter Massenpunkt auch bzgl. des Inertialsystems K' gleichförmig bewegt sein, d.h. es muß für die Bahn $\vec{y}(t)$ bzw. $\vec{y'}(t')$ bzgl. K und K' stets gelten

$$\frac{\mathrm{d}^2\vec{y}(t)}{\mathrm{d}t^2} = 0 \Leftrightarrow \frac{\mathrm{d}^2\vec{y}'(t')}{\mathrm{d}t'^2} = 0. \tag{1.2}$$

Wir können nun gemäß Postulat (1) einem jeden Körper eine relativ zu ihm ruhende Standarduhr zugeordnet denken, welche die **Eigenzeit** τ des Teilchens definiert.

Bewegt sich nun der Körper bzgl. des Inertialsystems K geradlinig gleichförmig, stellt gemäß Postulat (1) und dem Relativitätsprinzip jeder bzgl. dieses Bezugssystems ruhende Beobachter relativ zu seiner Uhr fest, daß die relativ zum Teilchen ruhende Standarduhr Ticks in einem gleichmäßigen Zeitabstand aussendet, der wegen der Homogenität und Isotropie des Raumes nur vom Betrag der Geschwindigkeit des Körpers relativ zu ihm abhängen kann. Das bedeutet aber, daß die Systemzeit proportional zur Eigenzeit des Teilchens sein muß. Wir können also ganz allgemein (1.2) auf die Eigenzeit des Teilchens umschreiben:

$$\frac{\mathrm{d}^2 y^\mu}{\mathrm{d}\tau^2} = 0 \;\Leftrightarrow\; \frac{\mathrm{d}^2 y'^\mu}{\mathrm{d}\tau^2} = 0. \tag{1.3}$$

Da nun die Raum-Zeit-Koordinaten y'^μ des Körpers bzgl. K' umkehrbar eindeutige Funktionen der Raum-Zeit-Koordinaten y^μ des Körpers bzgl. K sein müssen, gilt aufgrund der Kettenregel:

$$\frac{\mathrm{d}^2 y'^\mu}{\mathrm{d}\tau^2} = \frac{\partial^2 y'^\mu}{\partial y^\rho \partial y^\sigma} \frac{\mathrm{d}y^\rho}{\mathrm{d}\tau} \frac{\mathrm{d}y^\sigma}{\mathrm{d}\tau} = 0. \tag{1.4}$$

Dabei wenden wir hier und im folgenden die **Einsteinsche Summenkonvention** an, derzufolge über gleichnamige Raum-Zeit-Indizes von 0 bis 3 zu summieren ist. Dabei haben wir schon benutzt, daß der Körper bzgl. K und wegen (1.3) damit auch bzgl. K' gleichförmig bewegt sein muß.

Die allgemeine Transformationsformel muß folglich **affin linear** sein, d.h. es existiert eine reelle invertierbare 4×4-Matrix Λ und ein reeller Spaltenvierervektor a, so daß

$$x' = \Lambda x + a, \tag{1.5}$$

bzw. mit der Summenkonvention in Komponenten geschrieben

$$x'^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu x^\nu + a^\mu \tag{1.6}$$

gilt.

Wir müssen nun die genaue Gestalt der Matrix Λ ermitteln. Dabei kommt uns zuhilfe, daß gemäß Postulat 2 ein jeder bzgl. eines Inertialsystems ruhender Beobachter den Raum als affin-euklidisches Kontinuum wahrnimmt.

Wir werden nun zunächst die Bestimmung der Transformationsmatrix Λ auf den speziellen Fall zurückführen, daß zur Zeit $t = 0$ die Achsen der beiden räumlichen Koordinatensysteme parallel zueinander ausgerichtet sind und sich der Ursprung des Systems K' gegenüber dem System K in Richtung der x-Achse mit der Geschwindigkeit v bewegt.

Offensichtlich muß dazu nur das räumliche kartesische Koordinatensystem in K zur Zeit t so gewählt werden, daß sich der Ursprung von K' in Richtung der neuen x-Achse bewegt. Dies kann durch eine geeignete Drehung erfolgen, die durch zwei Winkel eindeutig bestimmt ist.

Das läßt sich leicht wie folgt zeigen. Es sei $\vec{v} \neq 0$[1] der Geschwindigkeitsvektor des Ursprungs von K', gemessen in K. Dieser läßt sich mit Hilfe zweier Winkel $\varphi \in [0, 2\pi)$ und $\vartheta \in [0, \pi)$ wie folgt

[1]Ist $\vec{v} = 0$, handelt es sich bei der Transformation einfach um die Drehung des Koordinatensystems eines bzgl. beider Bezugssysteme ruhender Beobachter. Dies muß eine Symmetrietransformation sein, was sofort aus der Euklidizität des Raumes, insbesondere also seiner Isotropie und Homogenität folgt.

charakterisieren:

$$\vec{v} = v \begin{pmatrix} \cos\vartheta \\ \sin\varphi\,\sin\vartheta \\ \cos\varphi\,\sin\vartheta \end{pmatrix} \tag{1.7}$$

Diesen Vektor können wir offenbar durch die orthogonale Transformation

$$\mathrm{D}(\varphi,\vartheta) = \begin{pmatrix} \cos\vartheta & \sin\varphi\,\sin\vartheta & \cos\varphi\,\sin\vartheta \\ 0 & \cos\varphi & -\sin\varphi \\ -\sin\vartheta & \cos\vartheta\,\sin\varphi & \cos\varphi\,\sin\vartheta \end{pmatrix} \tag{1.8}$$

in die gewünschte Ausrichtung bringen:

$$\mathrm{D}(\varphi,\vartheta)\vec{v} = \begin{pmatrix} v \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \tag{1.9}$$

Dies können wir uns freilich dadurch realisiert vorstellen, daß ein bzgl. K ruhender Beobachter einfach neue kartesische Basisvektoren aus den bisherigen erzeugt, indem er auf diese die Umkehrmatrix $\mathrm{D}^{-1}(\varphi,\vartheta)$ anwendet. Bzgl. der neuen Basisvektoren besitzt dann der Geschwindigkeitsvektor des Ursprungs von K' gerade die Komponenten (1.9).

Ebenso können wir ohne Beschränkung der Allgemeinheit annehmen, daß der Beobachter in K' zum einen den Zeitnullpunkt seiner Uhr und den Ursprung seines räumlichen kartesischen Koordinatensystems so wählt, daß $t' = 0$ und $\vec{x}' = 0$ mit dem Ursprung der Raumzeitkoordinaten bzgl. K übereinstimmen. Es sei weiter angenommen, daß der Beobachter in K' seine Koordinatenachsen durch Drehung so orientiert, daß sie zur Zeit $t' = 0$ parallel zu den Achsen des in K gewählten Bezugssystems zu liegen kommen. Das läßt sich etwa durch drei Eulerwinkel ψ, χ und λ parametrisieren, was auf die Drehmatrix $\mathrm{D}'(\psi,\chi,\lambda)$ führen möge.

Die Drehungen können wir uns in die vierdimensionale Schreibweise integriert denken, daß wir sie einfach als unteres rechtes 3×3-Kästchen einer 4×4-Matrix geschrieben denken, und ${\Lambda^0}_0 = 1$ sowie ${\Lambda^0}_j = {\Lambda^j}_0 = 0$ für $j \in \{1,2,3\}$ setzen.

Dann können wir schreiben

$$\Lambda = \mathrm{D}'(\psi,\chi,\lambda)\mathrm{B}_1(v)\mathrm{D}(\varphi,\vartheta). \tag{1.10}$$

Hierbei ist B_1 nun die einzige noch unbestimmte Matrix, die die gleichförmig geradlinige Bewegung eines Systems K' mit der Geschwindigkeit v entlang der x-Achse des Koordinatensystems K beschreibt, wobei die Achsen zur Zeit $t = 0$ parallel ausgerichtet sind. Durch die Wahl des Zeit- und Raumkoordinatenursprungs durch den Beobachter in K' ist also für diesen Spezialfall

$$x' = B_1(v)x. \tag{1.11}$$

Der Koordinatenursprung von K' ist nunmehr durch $\vec{x}' = 0$ gekennzeichnet. Durch Ableiten der sich daraus ergebenen Bahnkurve $\vec{x}(t)$ nach t muß sich der konstante Geschwindigkeitsvektor $(v,0,0)$ ergeben, so daß zu allen Zeiten also $y' = y$ und $z' = z$ gelten muß.

Gl. (1.11) besitzt also die Gestalt

$$\begin{pmatrix} t' \\ X' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t \\ X \end{pmatrix}, \quad Y' = Y, \quad Z' = Z. \tag{1.12}$$

Außerdem muß, weil ja der Koordinatenursprung von K' durch $\vec{x}' = 0$ definiert ist und dieser sich bzgl. K mit der Geschwindigkeit $(v, 0, 0)^t$ bewegen soll, gelten

$$v = -C/D. \tag{1.13}$$

Unsere Transformation (1.12) liest sich also nunmehr wie folgt

$$\begin{pmatrix} t' \\ X' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & B \\ -vD & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t \\ X \end{pmatrix}. \tag{1.14}$$

Es ist klar, daß A, B und D Funktionen von v sind, und diese gilt es nun zu bestimmen.

Als nächstes beweisen wir dazu das sog. **Reziprozitätsgesetz**, demzufolge die Geschwindigkeit des Systems K' gegenüber K gerade $-v$ sein muß.

Die gesuchten Transformationen $B_1(v)$ müssen in ihrer Gesamtheit eine **Gruppe** bilden, denn transformiert man von einem Inertialsystem K in ein Inertialsystem K' und von diesem in ein weiteres System K'', so muß die Komposition beider Transformationen, welche direkt von K nach K'' führt, aufgrund des Relativitätsprinzips wieder vom gleichen Typ sein, d.h. die Funktionen $A(v)$ und $B(v)$ gelten für alle Boosts in X-Richtung. Die Inertialsysteme sind vollständig durch die Geschwindigkeit v bestimmt. Analoges gilt für die Umkehrtransformation, welche von K' zurück nach K transformiert, d.h. für dieselben Funktionen A und B gibt es eine Geschwindigkeit $\bar{v}$, so daß

$$\begin{pmatrix} t \\ X \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A(\bar{v}) & B(\bar{v}) \\ -\bar{v}D(\bar{v}) & D(\bar{v}) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t' \\ X' \end{pmatrix}. \tag{1.15}$$

Andererseits ist aber die Geschwindigkeit von K bzgl. K', die wir mit $\bar{v}$ bezeichnet haben, auch durch (1.14) bestimmt. Setzen wir nämlich $X = 0$, folgt sofort, daß

$$\bar{v} = -\frac{D(v)}{A(v)} v := \varphi(v). \tag{1.16}$$

Umgekehrt folgt aus (1.15), daß

$$v = \varphi(\bar{v}) \tag{1.17}$$

zu gelten hat, d.h. für alle zulässigen Geschwindigkeiten v zwischen Inertialsystemen muß die Eigenschaft

$$\varphi(\varphi(v)) = v \tag{1.18}$$

gelten.

Wegen (1.18) müssen nun der Definitionsbereich und der Bildbereich von φ übereinstimmen, φ insbesondere also surjektiv sein. Weiter muß φ auch injektiv sein, denn aus $\varphi(v_1) = \varphi(v_2)$ folgt wegen (1.18) zwangsläufig $v_1 = v_2$.

Wir gehen weiter davon aus, daß der Definitionsbereich von φ zusammenhängend ist, d.h. es muß sich um ein symmetrisches Intervall um $v = 0$ oder ganz $\mathbb{R}$ handeln. Weiter nehmen wir an, φ sei stetig, d.h. die Transformationen gehen allesamt durch eine stetige Abbildung aus $v = 0$ hervor. Dann ist aber φ notwendig streng monoton. Angenommen, es ist $\varphi(v) = \bar{v} < v$ und φ strikt monoton wachsend. Dann muß gelten $v = \varphi(\bar{v}) < \varphi(v) = \bar{v}$, d.h. $v = \varphi(v)$. Wegen (1.16) muß dann

$A(v)/D(v) = -1$ sein. Wegen des Kausalitätsprinzips (4) muß allemal $A(v) > 0$ gelten, so daß dann also $D(v) = -A(v) < 0$ sein muß. Dies impliziert eine Umorientierung der räumlichen Richtung, in der der „Boost" erfolgt. Wir hatten aber durch unsere Drehung gerade erreicht, daß die Achsen gleichorientiert sein sollten. Wir schließen diesen Fall also zunächst aus[2].

Wir müssen also verlangen, daß φ strikt monoton fällt. Dann ist aber $(-\varphi)$ strikt monoton wachsend und erfüllt auch sonst alle Eigenschaften wie φ. Also muß aufgrund der soeben durchgeführten Betrachtung $-\varphi(v) = v$ oder

$$\varphi(v) = -v \tag{1.19}$$

sein. Damit ist aber wegen (1.16)

$$A = D. \tag{1.20}$$

Die Transformation erweist sich also bislang als von der Form

$$\begin{pmatrix} t' \\ X' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} D & B \\ -vD & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t \\ X \end{pmatrix}. \tag{1.21}$$

Wir betrachten nun die Hintereinanderausführung zweier Boosts $B_1(v')B_1(v)$. Die erste Transformation führt wie bisher von K nach K' (Geschwindigkeit v) und die zweite von K' nach K'' (Geschwindigkeit v').

Aus (1.21) ersehen wir die Gleichheit der Diagonalelemente einer jeden Transformation $B_1(v)$. Bilden des Matrixprodukts $B_1(v')B_1(v) \stackrel{!}{=} B_1(v'')$ und Vergleich der Diagonalelemente ergibt damit nach einer einfachen Umformung die Beziehung

$$\frac{B}{vD} = \frac{B'}{v'D'}. \tag{1.22}$$

Also ist diese Kombination eine für alle fraglichen Transformationen universelle Konstante K, d.h. es gilt stets die Beziehung

$$B = KvD \tag{1.23}$$

mit einer von v unabhängigen Konstanten K.

Wir benötigen noch eine weitere Beziehung, um schließlich auch D bestimmen zu können. Dazu betrachten wir nun eine in K ruhende Einheitsuhr bei $X = 0$, die durch zwei Ticks die Standardzeit τ definieren möge. Aus (1.21) geht dann hervor, daß ein Beobachter in K' zwischen den beiden Ticks die Zeitdauer

$$\tau' = D(v)\tau \tag{1.24}$$

mißt. Wir können dieselbe Betrachtung auch für den Fall anstellen, daß wir das System $\bar{K}$, das sich gegen K mit der Geschwindigkeit $-v$ bewegt, anstellen. Wegen der angenommenen Isotropie des Raumes, vergeht auch für einen gegen $\bar{K}$ ruhenden Beobachter dieselbe Zeitspanne τ' zwischen den beiden Ticks der in K ruhenden Normaluhr.

[2] Weiter unten werden wir sehen, daß dieser Fall der Raumspiegelung nicht stetig aus der Gruppenidentität deformierbar ist, also keine Symmetrie der Raumzeit darstellen muß. In der Tat sind bekanntlich die Naturgesetze nicht invariant unter Raumspiegelungen, denn die schwache Wechselwirkung verletzt die Erhaltung der Parität, welche aus der Raumspiegelungsinvarianz notwendig folgen würde.

Dies ist wegen des Reziprozitätsgesetzes (1.19) jedoch genau die Situation für den Beobachter in K hinsichtlich einer in K' ruhenden Normaluhr. Andererseits ist jedoch die Transformation von den Koordinaten bzgl. K' zu Koordinaten bzgl. K durch die Umkehrtransformation zu (1.21) gegeben. Durch Matrixinversion erhalten wir damit

$$\tau' = \frac{D\tau}{D^2 + vDB}, \tag{1.25}$$

und dies ergibt zusammen mit (1.24)

$$D^2 + vDB = 1. \tag{1.26}$$

Substituieren wir hierin (1.23), erhalten wir schließlich

$$D = \frac{1}{\sqrt{1 + Kv^2}}, \quad B = \frac{Kv}{\sqrt{1 + Kv^2}} \tag{1.27}$$

Es ergeben sich nun nur 3 bis auf Isomorphie verschiedene Möglichkeiten $K = 0$, $K = -1/c^2 < 0$ und $K = +1/c^2 > 0$, wo c in den beiden letzteren Fällen jeweils eine universelle Konstante von der Dimension einer Geschwindigkeit darstellt.

Der Fall $K = 0$ entspricht der **Galileitransformation**. Für diesen Fall lautet nämlich (1.21) zusammen mit (1.27)

$$t' = t, \quad x' = -vt + x. \tag{1.28}$$

Hier ist offenbar der Geschwindigkeit v keinerlei Beschränkung auferlegt. Man darf also $v \in \mathbb{R}$ annehmen.

Wir müssen weiterhin den Fall $K > 0$ ausschließen, weil ansonsten das Kausalitätsprinzip nicht gewährleistet wäre. Um dies zu sehen, nehmen wir jedoch für einen Moment an, dieser Fall beschreibe eine physikalisch sinnvolle Raumzeit. Dann darf jedenfalls $v \in \mathbb{R}$ liegen. Setzen wir also $K = +1/c^2 > 0$, $x^0 = ct$ und schließlich $v/c = \tan\alpha$. Dann folgt für die Transformation (1.21):

$$\begin{pmatrix} x'^0 \\ X' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^0 \\ X \end{pmatrix}. \tag{1.29}$$

Verlangt man nun „Orthochronizität", d.h. die Erhaltung der Kausalfolge von Ereignissen bei Wechsel des Bezugssystems, so muß $\cos\alpha > 0$ sein, d.h. $-\pi/2 < \alpha < \pi/2$ (was übrigens den gesamten Bereich $v \in \mathbb{R}$ abdecken würde), verlangt werden. Die Gesamtheit dieser Transformationen bilden jedoch keine Gruppe. Man erhält nur eine Gruppe, nämlich die Drehgruppe in zwei Dimensionen SO(2), wenn man $\alpha \in [\alpha_0, \alpha_0 + 2\pi)$ wählt und also zwangsläufig auch solche Transformationen zulassen müßte, die die Umkehrung der Kausalfolge von Ereignissen durch Wechsel des Bezugssystems zuließe. Anders ausgedrückt bedeutet dies, daß die so gebildete Raum-Zeit gar keine Kausalstruktur besitzt, was freilich für die Galilei-Newtonsche Raumzeit, welche im jetzigen Zusammenhange durch $K = 0$ charakterisiert ist, wegen der „Universalität der Zeit", d.h. $t' = t$, selbstverständlich der Fall ist.

Kommen wir also schließlich zu dem letzten Falle $K = -1/c^2 < 0$. Dann ist notwendig $v = \beta c$ mit $-1 < \beta < 1$ und

$$\begin{pmatrix} x'^0 \\ X' \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}} \begin{pmatrix} 1 & -\beta \\ -\beta & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^0 \\ X \end{pmatrix}. \tag{1.30}$$

Daß diese Transformationen für $\beta \in (-1, 1)$ bereits eine Gruppe durchlaufen, folgt sehr schnell durch eine Parametrisierung, die die der Drehgruppe nachempfunden ist. Offenbar können wir nämlich

$$\beta = \tanh \eta \tag{1.31}$$

setzen, wo $\eta \in \mathbb{R}$ **Rapidität** genannt wird. Dann schreibt sich (1.30)

$$\begin{pmatrix} x'^0 \\ X' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cosh \eta & -\sinh \eta \\ -\sinh \eta & \cosh \eta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^0 \\ X \end{pmatrix}. \tag{1.32}$$

Die Hintereinanderausführung zweier solcher **Lorentztransformationen** mit η und η' führt dann in der Tat wieder zu einer solchen Transformation mit $\eta'' = \eta + \eta'$ und also durchlaufen die Transformationen mit $\eta \in \mathbb{R}$ bereits eine Gruppe, die **eigentlich orthochrone Lorentzgruppe** für die $1+1$-dimensionale Raumzeit. Die auf dieser Transformation beruhende Realisierung der Raumzeit heißt **Einstein-Minkowski-Raumzeit**.

Wir bemerken noch, daß die Galileitransformationen aus (1.32) formal hervorgehen, indem man den Grenzübergang $c \rightarrow \infty$ vornimmt. Physikalisch gesehen kann man die Galileitransformation als Näherung für (1.32) verwenden, wenn $|v|/c \ll 1$ ist. Die Galileitransformation ist bis auf Korrekturen der Ordnung v^2/c^2 korrekt, was den Erfolg der Newtonschen Physik für Geschwindigkeiten $|v| \ll c$ erklärt.

Wir wenden uns nun der vollständigen Lorentzgruppe für die $1+3$-dimensionale Raumzeit zu, die wir jedoch nunmehr wegen (1.10) im Prinzip bereits vollständig bestimmt haben. Allerdings ist (1.10) relativ kompliziert und wird zum Glück in der Praxis selten benötigt.

Aus der Annahme, daß das spezielle Relativitätsprinzip gilt, folgt also, daß es physikalisch bis auf Äquivalenz genau zwei wohlunterscheidbare Raum-Zeit-Modelle gibt, nämlich den Fall, daß c eine endliche Größe ist. Dann gibt es eine universelle Grenzgeschwindigkeit, die ein materieller Körper nicht überschreiten kann. Das ist die **Einstein-Minkowski-Raumzeit**. Für sie ist Λ eine **Lorentztransformation**. Sie läßt sich durch zwei Drehungen und einen Boost eindeutig parametrisieren. Insgesamt bieten die Lorentztransformationen eine Untergruppe der Raum-Zeitsymmetriegruppe. Wie wir oben gesehen haben, ist sie insgesamt 6-dimensional (zwei Winkel, um die x-Achse des räumlichen Koordinatensystems von K in Richtung der Geschwindigkeit von K' zu legen, die Komponente v der Geschwindigkeit in der neuen X-Richtung und drei Winkel, um die räumlichen Basisvektoren von K' in Richtung der Basisvektoren von K zu legen). Den „Boost” in X-Richtung, der die Bewegung des Bezugssystems K' gegenüber K beschreibt, haben wir soeben durch Ermittlung der Parameter A, B, C, D als Funktion der Geschwindigkeitskomponente $v = \beta c$ bestimmt. Wir schreiben der Übersicht halber das Resultat für die Boostmatrix in vierdimensionaler Form noch einmal hin:

$$B_1(v) = \begin{pmatrix} \gamma & -\beta\gamma & 0 & 0 \\ -\beta\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ mit } \beta = \frac{v}{c}, \quad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}. \tag{1.33}$$

Der numerische Wert von c ist dabei physikalisch irrelevant. Er legt lediglich sie Wahl des Einheitensystems näher fest, d.h. alle Raum-Zeitmodelle mit verschiedenen Werten der Grenzgeschwindigkeit c sind zueinander äquivalent. Für endliches c kann die Einheitslänge mit Hilfe der Normaluhr als eine bestimmte Zeitspanne festgelegt werden und ist insofern nicht mehr unabhängig, sondern durch die Wahl des Wertes für c bestimmt.

1.2 Die Raum-Zeit-Geometrie

Wir schreiten nun mit der Behandlung der Einstein-Minkowskischen Raum-Zeit-Beschreibung fort. Ein Blick auf (1.33) lehrt uns, daß die soeben hergeleiteten speziellen Lorentztransformationen, die den Übergang von einem Inertialsystem zu einem anderen unter Beibehaltung der Orientierung der räumlichen Koordinaten beschreiben, sogenannte **drehungsfreie Lorentztransformationen** oder **Boosts**, die Eigenschaft besitzen, daß sie die Bilinearform

$$x \cdot y := xy = x^0 y^0 - \vec{x} \cdot \vec{y} \tag{1.34}$$

unverändert lassen. Dies gilt nun für alle Lorentztransformationen, denn die Drehungen lassen die Zeitkomponenten der Vierervektoren ungeändert, und das Skalarprodukt $\vec{x} \cdot \vec{y}$ ist unter Drehungen invariant.

Wir numerieren hier und im folgenden die Komponenten der Raum-Zeit-Vierervektoren mit oberen Indizes, die die Werte $0, 1, 2, 3$ annehmen können. Die unter Lorentztransformationen invariante Bilinearform (1.34), das **Minkowskiprodukt** können wir dann mit Hilfe der Matrix $(\eta_{\mu\nu}) = \mathrm{diag}(1, -1, -1, -1)$ auch in der Form

$$x \cdot y = \eta_{\mu\nu} x^\mu y^\nu \tag{1.35}$$

schreiben. Dabei wird, dem Gebrauch Einsteins folgend, über gleichnamige gegenständige Indizes summiert.

Wir können nun die allgemeinen Lorentztransformationen sehr einfach dadurch charakterisieren, daß dies alle linearen eineindeutigen Transformationen des $\mathbb{R}^4$ sind, die das Minkowskiprodukt invariant lassen. Besonders einfach wird die Raum-Zeit-Geometrie in Koordinatensystemen beschrieben, die im Sinne des Minkowskiprodukts „orthonormal" sind, d.h. für die gilt

$$e_\rho \cdot e_\sigma = \eta_{\rho\sigma}. \tag{1.36}$$

Eine beliebige Lorentztransformation kann nun durch eine Matrix ${\Lambda^\mu}_\nu$ definiert werden, die diese orthonormalen Basisvektoren umkehrbar eindeutig in neue orthonormale Basisvektoren e'_μ abbildet:

$$e_\rho = e'_\mu {\Lambda^\mu}_\rho. \tag{1.37}$$

Daraus folgt sofort, wie sich die Komponenten von Vektoren transformieren:

$$x = e_\rho x^\rho = e'_\mu {\Lambda^\mu}_\rho x^\rho \;\Rightarrow\; x'^\mu = {\Lambda^\mu}_\rho x^\rho. \tag{1.38}$$

Die Vektorkomponenten transformieren sich also **kontragredient** zu den Basisvektoren. Schreiben wir für die Umkehrmatrix $\bar{\Lambda} := \Lambda^{-1}$, gilt ja gemäß (1.37):

$$e'_\mu = e_\rho {\bar{\Lambda}^\rho}_\mu. \tag{1.39}$$

I.a. bezeichnet man die Objekte mit unteren Indizes, die sich gemäß (1.39) transformieren, als **kovariant**, solche mit oberen Indizes, die sich wie die Vektorkomponenten gemäß (1.38) transformieren, als **kontravariant**.

Die Forderung, daß auch die neuen Basisvektoren orthonormal sein sollen, ergibt

$$\eta_{\rho\sigma} = e'_\mu \Lambda^\mu{}_\rho \cdot e'_\nu \Lambda^\nu{}_\sigma = \eta_{\mu\nu}\Lambda^\mu{}_\rho \Lambda^\nu{}_\sigma \tag{1.40}$$

Zuweilen ist es nun bequemer, statt die Komponenten einzeln auszuschreiben, zur Matrix-Vektor-schreibweise überzuwechseln, was wir dann auch tun wollen. Die Bedingung (1.40) an eine Matrix $\Lambda = (\Lambda^\mu{}_\rho)$ schreibt sich dann

$$\Lambda^t \eta \Lambda = \eta. \tag{1.41}$$

Multiplizieren wir (1.41) von links mit der Matrix η und von rechts mit Λ^{-1}, ergibt sich wegen $\eta^2 = 1$

$$\Lambda^{-1} = \eta \Lambda^t \eta. \tag{1.42}$$

Es ist klar, daß umgekehrt jede invertierbare reelle 4×4-Matrix, die (1.41) bzw. (1.42) erfüllt, eine Lorentztransformation definiert.

Es wird daraus sofort ersichtlich, daß auch Λ^{-1} eine Lorentztransformation ist. Transponiert man nämlich (1.42), folgt wegen der Symmetrie von η:

$$(\Lambda^{-1})^t = \eta\Lambda\eta \;\Rightarrow\; \eta(\Lambda^{-1})^t\eta = \Lambda = (\Lambda^{-1})^{-1}, \tag{1.43}$$

d.h. Λ^{-1} erfüllt ebenfalls (1.42), ist also eine Lorentztransformation.

Untersuchen wir nun weiter die Hintereinanderausführung von Lorentztransformationen. Seien also Λ_1 und Λ_2 Lorentztransformationen. Da beide Orthonormalsysteme in Orthonormalsysteme abbilden, ist sofort klar, daß auch ihre Hintereinanderausführung diese Eigenschaft besitzt, so daß also auch $\Lambda = \Lambda_1\Lambda_2$ wieder eine Lorentztransformation repräsentiert. Das läßt sich mit Hilfe von (1.41) auch leicht formal nachweisen:

$$\Lambda^t \eta \Lambda = \Lambda_2^t \Lambda_1^t \eta \Lambda_1 \Lambda_2 = \Lambda_2^t \eta \Lambda_2 = \eta. \tag{1.44}$$

Dabei haben wir lediglich davon Gebrauch gemacht, daß (1.41) für Λ_1 und Λ_2 gelten muß, weil diese Matrizen ja voraussetzungsgemäß Lorentztransformationen sein sollten.

Zusammenfassend können wir also sagen, daß für jede Lorentzmatrix Λ auch Λ^{-1} wieder eine solche ist. Ebenso ist für beliebige Lorentzmatrizen Λ_1, Λ_2 auch ihr Produkt wieder eine Lorentzmatrix. Das bedeutet nun aber, daß die Lorentzmatrizen mit der Matrixmultiplikation eine Gruppe bilden, die **Lorentzgruppe**, wie es schon das spezielle Relativitätsprinzip verlangt. Sie wird oft auch als $\mathrm{O}(1,3)$ bezeichnet, was so viel wie Orthogonale Gruppe bzgl. des Minkowskiprodukts, welches in der hier gleich eingeführten Normalform η ein positives und drei negative Diagonalelemente besitzt, bedeutet.

Wir werden nun diese Gruppe näher analysieren. Wir können zunächst eine wichtige Untergruppe aussondern. Bilden wir die Determinante der Bedingung (1.41), folgt

$$(\det\Lambda)^2 = 1 \;\Rightarrow\; \det\Lambda = \pm 1. \tag{1.45}$$

Nun bilden offenbar diejenigen Lorentzmatrizen mit der Determinante $+1$ eine Untergruppe der vollen Lorentzgruppe, die man als $\mathrm{SO}(1,3)$ bezeichnet, die **spezielle orthogonale Gruppe** zur Bilinearform mit der Signatur $(1,3)$.

Wir können nun die Gruppe aber auch noch unter dem Aspekt betrachten, daß sie eine Untergruppe besitzt, die eine **Liegruppe** ist, und das wird sich für die Physik als besonders wichtig erweisen.

Kommen wir dazu noch einmal auf den reinen Boost in x^1-Richtung zurück. Wir können sie nun viel einfacher als im vorigen Abschnitt herleiten, indem wir verlangen, daß die Lorentzmatrix Λ die folgende Gestalt haben soll

$$\Lambda = \begin{pmatrix} a & b & 0 & 0 \\ c & d & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{1.46}$$

Die Bedingung (1.41) verlangt dann

$$a^2 - c^2 = 1, \quad b^2 - d^2 = -1, \quad ab - cd = 0. \tag{1.47}$$

Das sind drei Gleichungen für vier Matrixelemente, so daß diese Art Transformationen also einen freien Parameter beinhalten muß. Das wissen wir schon aus der physikalischen Bedeutung dieser Transformation: Die Geschwindigkeit v zwischen den beiden Bezugssystemen ist frei wählbar, solange nur $-1 < v < 1$ ist[3].

Die erste Bedingung in (1.47) legt die Parametrisierung

$$a = \cosh\eta, \quad c = -\sinh\eta \tag{1.48}$$

nahe. Dabei haben wir verwendet, daß wir zunächst nur Transformationen behandeln wollen, die die Zeitrichtung erhalten, was $a > 0$ verlangt. Aus der dritten Bedingung folgt

$$b = \frac{cd}{a} = -d\tanh\eta. \tag{1.49}$$

Das in die zweite Bedingung eingesetzt ergibt

$$d^2(1 - \tanh^2\eta) = \frac{d^2}{\cosh^2\eta} = 1 \;\Rightarrow\; d = \pm\cosh\eta, \tag{1.50}$$

und daraus wiederum folgt mit (1.49)

$$b = \mp\sinh\eta. \tag{1.51}$$

Betrachten wir nun noch die Determinante:

$$\det\Lambda = ad - bc = \pm\cosh^2\eta \mp \sinh^2\eta = \pm 1. \tag{1.52}$$

Für die Wahl des oberen Vorzeichens in (1.50) und (1.51) erhalten wir also eine $\mathrm{SO}(1,3)$-Matrix, und allein diese kann durch einen stetigen Weg mit der Identität verbunden sein, denn die Determinante einer $\mathrm{O}(1,3)$-Matrix kann ja nur entweder 1 oder -1 sein. Da die Determinante eine stetige

[3] Hier und im folgenden setzen wir die Grenzgeschwindigkeit der Signalausbreitung $c = 1$.

Funktion der Matrixelemente ist, muß also eine innerhalb der Gruppe $\mathrm{O}(1,3)$ stetig mit der Identität verbundene Matrix die Determinante 1 haben.

In der Tat sind die stetig mit der Identität zusammenhängenden Matrizen, welche Boosts in x^1-Richtung entsprechen, durch die Wahl des oberen Vorzeichens in (1.50-1.51) gegeben:

$$B_1(\eta) = \begin{pmatrix} \cosh\eta & -\sinh\eta & 0 & 0 \\ -\sinh\eta & \cosh\eta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \tag{1.53}$$

Ein Vergleich mit (1.33) zeigt, daß der Zusammenhang der Relativgeschwindigkeit v zu dem Parameter η, den man **Rapidität** nennt, durch

$$v = \beta = \tanh\eta, \quad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1-v^2}} = \cosh\eta, \quad \beta\gamma = \sinh\eta \tag{1.54}$$

gegeben ist. Hierbei ist $\eta \in \mathbb{R}$ beliebig zu wählen, so daß alle Geschwindigkeiten zwischen -1 und $+1$ erreicht werden können.

Der Vorteil der Wahl der Rapidität als Parameter wird offensichtlich, wenn man die Hintereinanderausführung zweier Boosts betrachtet:

$$B_1(\eta_1)B_1(\eta_2) = B_1(\eta_1+\eta_2), \tag{1.55}$$

wobei wir von den Additionstheoremen der hyperbolischen Funktionen Gebrauch gemacht haben:

$$\begin{aligned} \cosh(\eta_1+\eta_2) &= \cosh(\eta_1)\cosh(\eta_2) + \sinh(\eta_1)\sinh(\eta_2), \\ \sinh(\eta_1+\eta_2) &= \sinh(\eta_1)\cosh(\eta_2) + \cosh(\eta_1)\sinh(\eta_2). \end{aligned} \tag{1.56}$$

Wir haben nun schon im vorigen Abschnitt bemerkt, daß wir alle Lorentztransformationen durch zwei Drehungen und einen solchen Boost in x^1-Richtung gemäß (1.10) ausdrücken können. Dies ergibt eine stetige Funktion von 6 Parametern (fünf Winkel und v bzw. η).

Betrachten wir die Wirkung von $B_1(\eta)$ auf den Raumzeitvektor $e_0 = (1,0,0,0)^t$, wird klar, daß $B_1(\eta)$ die **Orientierung der Zeitachse** erhält. Deshalb heißen solche Transformationen **orthochrone Lorentztransformationen**. Wir stellen also fest, daß die stetig mit der Identität verbundenen Lorentztransformationen durch die **eigentlich orthochronen Lorentztransformationen** gegeben sind, und allein von diesen verlangen wir innerhalb der **Speziellen Relativitätstheorie**, daß sie eine Symmetriegruppe der Naturgesetze sein muß, damit dieselben mit der Raumzeitstruktur verträglich sind. Wie schon oben bemerkt, sind die übrigen drei Zusammenhangskomponenten der $\mathrm{O}(1,3)$ tatsächlich keine (exakten) Symmetrien der Naturgesetze, weil die Raumspiegelungsinvarianz und mit ziemlicher Sicherheit auch die Zeitumkehrinvarianz durch die schwache Wechselwirkung verletzt wird.

Wir wollen nun zeigen, daß diese eigentlich orthochronen Lorentztransformationen zusammengenommen einen **Normalteiler** sowohl der $\mathrm{O}(1,3)$ als auch der $\mathrm{SO}(1,3)$ bildet, den wir als $\mathrm{SO}(1,3)^{\uparrow}$ bezeichnen wollen. Auch die orthochronen Lorentztransformationen für sich bilden einen Normalteiler der vollen Lorentzgruppe, den wir als $\mathrm{O}(1,3)^{\uparrow}$ bezeichnen wollen.

Dazu bemerken wir zunächst, daß die Hintereinanderausführung zweier orthochroner Lorentztransformationen wieder eine orthochrone Lorentztransformation darstellt. Wir müssen dazu ja nur das 00-Element der zusammengesetzten Lorentztransformation untersuchen. Seien also A und B zwei orthochrone Lorentztransformationen. Schreiben wir nun

$$A = \begin{pmatrix} A^0{}_0 & \vec{a}^t \\ * & * \end{pmatrix} \text{ und } B = \begin{pmatrix} B^0{}_0 & * \\ \vec{b} & * \end{pmatrix}, \tag{1.57}$$

so gilt wegen der Bedingung (1.41) und wegen $A^0{}_0 > 0$ und $B^0{}_0 > 0$

$$A^0{}_0 = \sqrt{1 + \vec{a}^2}, \quad B^0{}_0 = \sqrt{1 + \vec{b}^2}. \tag{1.58}$$

Damit ist aber die Behauptung schnell bewiesen:

$$C^0{}_0 = A^0{}_\mu B^\mu{}_0 = A^0{}_0 B^0{}_0 + \vec{a}\vec{b} \geq A^0{}_0 B^0{}_0 - |\vec{a}||\vec{b}| \geq A^0{}_0(B^0{}_0 - |\vec{b}|) > 0. \tag{1.59}$$

Damit ist gezeigt, daß $\mathrm{O}(1,3)$ eine Untergruppe ist, denn mit (1.42) ersieht man auch sofort, daß mit A auch A^{-1} orthochron ist, weil beide Matrizen dasselbe 00-Element besitzen.

Daß es sich sogar um einen Normalteiler, d.h. daß die Links- und die Rechtsnebenklassen identisch sind, sieht man sofort daran, daß die **Zeitumkehrmatrix** $T = \mathrm{diag}(-1, 1, 1, 1) \in \mathrm{O}(1,3)$ ist, und daß jede Matrix $\Lambda \in \mathrm{O}(1,3)$ entweder orthochron ist oder daß andernfalls die Matrizen $\Lambda' = \Lambda T$ und $\Lambda'' = T\Lambda$ orthochron sind und sich dann entsprechend $\Lambda = \Lambda' T = T\Lambda''$ schreiben läßt.

Man kann nun statt T zu diesem Zweck genausogut die „große Raum-Zeit-Spiegelung" $PT = -1$ verwenden. Diese besitzt im Gegensatz zu T die Determinante 1, ist also sogar $\in \mathrm{SO}(1,3)$. Da nun wegen $\mathbf{SO}(1,3)^\uparrow = \mathrm{O}(1,3)^\uparrow \cap \mathrm{SO}(1,3)$ ebenfalls eine Untergruppe der $\mathrm{O}(1,3)$ ist, muß also $\mathrm{SO}(1,3)^\uparrow$ in der Tat ein Normalteiler sowohl der $\mathrm{O}(1,3)$ als auch der $\mathrm{SO}(1,3)$ sein.

Wir stellen ferner fest, daß die $\mathrm{O}(1,3)^\uparrow = \mathrm{SO}(1,3)^\uparrow P = P\mathrm{SO}(1,3)^\uparrow$, wobei $P = \mathrm{diag}(1, -1, -1, -1)$ der Paritäts- oder **Raumspiegelungsoperator** ist. Wir werden sehen, daß die diskreten Symmetrietransformationen eine wichtige Rolle in der Physik spielen. Wir beschäftigen uns jedoch zunächst einmal mit den **eigentlich orthochronen Lorentztransformationen**, die, wie soeben gezeigt, innerhalb der Lorentzgruppe stetig mit der Identität verbunden sind. Wir stellen fest, daß das Relativitätsprinzip nur verlangt, daß die physikalischen Gesetze unter dieser spezielleren Lorentzgruppe invariant sein müssen, denn nur solche Transformationen können den Wechsel von einem Inertialsystem in eine anderes beschreiben, also „aktive Transformationen" sein.

Wir beschließen dieses Kapitel mit der Herleitung des **drehungsfreien Boosts** in einer beliebigen Richtung, da wir diesen im folgenden noch öfter benötigen werden.

Dazu greifen wir am bequemsten auf (1.33) zurück. Die dort angegebene Matrix beschreibt ja gerade einen drehungsfreien Boost in X-Richtung. Wir müssen nun lediglich die Wirkung dieser Matrix in einer Basis der Raumzeitvektoren ausdrücken, die sich leicht verallgemeinern läßt. Offensichtlich zeichnet die in beliebiger Richtung vorgegebene Relativgeschwindigkeit $\vec{v}$ der Bezugssysteme K und K'[4] eine Raumrichtung aus, und wir wählen geschickterweise als räumliche Basis einen Einheitsvektor $\vec{e}_\parallel$ in Richtung von $\vec{v}$ und eine beliebige orthonormale Ergänzung, d.h. zwei Vektoren $\vec{e}_{j\perp}$. Wir

[4]Genauer gesagt möge sich wie bisher auch, K' gegenüber K mit der Geschwindigkeit $\vec{v}$ bewegen.

wissen dann von (1.33), wie sich die Vektorkomponenten zu transformieren haben: Die Komponente in Richtung der Geschwindigkeit erhält einen Lorentzfaktor, die Komponenten senkrecht dazu bleiben ungeändert.

Die Transformationsformel für die Zeitkomponente können wir offenbar durch

$$x'^0 = \gamma(x^0 - \vec{v}\vec{x}) \text{ mit } \gamma = (1 - \vec{v}^2)^{-1/2} \tag{1.60}$$

drehungsinvariant beschreiben. Insgesamt haben wir damit die allgemeine Boostmatrix gefunden:

$$B(\vec{v}) = \begin{pmatrix} \gamma & -\gamma\vec{v}^t \\ -\gamma\vec{v} & \frac{\gamma-1}{\vec{v}^2}\vec{v}\otimes\vec{v} + 1 \end{pmatrix}, \tag{1.61}$$

wobei wir uns den Ausdruck in der unteren rechten Ecke als 3×3-Matrix vorzustellen haben. Das Tensorprodukt $\vec{v} \otimes \vec{v}$ ist durch seine Wirkung auf die räumlichen Komponenten eines beliebigen Vektors $\vec{x}$ eindeutig definiert:

$$\vec{v} \otimes \vec{v}\vec{x} := \vec{v}(\vec{v} \cdot \vec{x}). \tag{1.62}$$

Es ist nun leicht zu zeigen, daß (1.61) das Gewünschte leistet: Zunächst handelt es sich tatsächlich um eine Lorentztransformation. Wegen $B^t(\vec{v}) = B(\vec{v})$ muß ja gelten

$$B(v)\eta B(v) = \mathbb{1}_4, \tag{1.63}$$

und das weist man schnell durch eine direkte Rechnung nach, wozu man zweckmäßiger auch die Fundamentalform η in der zeit-räumlichen Schreibweise notiert:

$$\eta = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & & & \\ 0 & & -\mathbb{1}_3 & \\ 0 & & & \end{pmatrix} \tag{1.64}$$

Weiter bemerken wir, daß

$$(\vec{v} \otimes \vec{v})(\vec{v} \otimes \vec{v}) = \vec{v}^2(\vec{v} \otimes \vec{v}), \tag{1.65}$$

und Ausschreiben der linken Seite von (1.63) mit Hilfe von (1.61) und (1.64) und Ausmultiplizieren liefert in der Tat die Verereinheitsmatrix.

Weiter bemerken wir, daß die Richtung eines rein räumlichen Vektors in Bewegungsrichtung oder eines Vektors senkrecht dazu nicht geändert wird, so daß keine Drehung involviert sein kann. Für einen beliebigen rein räumlichen Vektor wird sich die Richtung allerdings ändern, da seine Komponente in Bewegungsrichtung um den Faktor γ größer werden, während die Komponenten senkrecht dazu ungeändert bleiben.

1.3 Relativistische Dynamik eines Punktteilchens

Wie schon in der nichtrelativistischen Mechanik ist es nicht möglich, Bewegungsgleichungen aus irgendwelchen grundlegenden Prinzipien herzuleiten. Sie müssen postuliert und letztlich durch Vergleich mit dem Experiment gerechtfertigt werden.

In der Relativitätstheorie ergibt sich nun folgende Problematik: Wir haben in den vorigen Abschnitten die relativistische Kinematik aus den Symmetrieannahmen über die Raumzeit (also aus Homogenität von Raum und Zeit, Isotropie des Raumes für inertiale Beobachter und speziellem Relativitätsprinzip) erschlossen. Dabei hat sich herausgestellt, daß es im Fall der relativistischen Raumzeit keine instantanen Wechselwirkungen geben kann. Zunächst zeigt diese Betrachtung, daß sich kein Punktteilchen schneller als mit Lichtgeschwindigkeit bewegen kann. Es ist jedoch auch unmittelbar klar, daß es aufgrund der Einschränkung der Naturgesetze auf **kausale Wirkungen** keine irgendwie geartete Wechselwirkung geben kann, die sich schneller als das Licht ausbreitet, denn nur zeit- oder lichtartig zueinander gelegene Ereignisse weisen eine vom Bezugssystem unabhängige zeitliche Reihenfolge auf. Bei raumartigen Abständen kann man nämlich stets die Zeitfolge durch einen geeigneten Lorentzboost umkehren[5]. Dies schließt Fernwirkungen wie das Newtonsche Gravitationsgesetz zwischen zwei Massenpunkten grundsätzlich aus.

Es hat sich nun gezeigt, daß man diesem Dilemma am einfachsten durch die Einführung **dynamischer Felder** begegnet. Das heißt, statt einer Fernwirkung zwischen den Massenpunkten postuliert man die Existenz von Kraftfeldern, also kontinuierlichen eigenständigen physikalischen Entitäten, die sich entsprechend der Bewegung ihrer Quellen im Raum ausbreiten. Deren Anwesenheit äußert sich dann durch auf Massenpunkte wirkende Kräfte. Wir werden im nächsten Abschnitt bei der Rekapitulation der klassischen Elektrodynamik genauer auf diese Idee eingehen. Es sei jedoch angemerkt, daß eine vollständig befriedigende Formulierung einer konsistenten Theorie klassischer wechselwirkender Punktteilchen auch mit dem Feldbegriff noch nicht gefunden werden konnte. Es können nur bestimmte Näherungen betrachtet werden, von denen wir hier nur die einfachsten betrachten. Die **relativistische Quantenfeldtheorie** ist einer Lösung dieser Problematik schon etwas nähergekommen, indem sie wenigstens Ordnung für Ordnung der Störungstheorie physikalisch sinnvolle Resultate liefert, die zum Teil die bislang genaueste Übereinstimmung physikalischer Theorien mit der Beobachtung gezeigt haben.

1.3.1 Die Minkowskikraft

Nun wollen wir den einfachsten Fall eines einzelnen Punktteilchens, das sich in einem fest vorgegebenen Kraftfeld bewegt, betrachten. Die einfachste Möglichkeit, das zweite Newtonsche Gesetz auf die Relativitätstheorie zu übertragen, ist seine **manifest kovariante Formulierung**. Dazu betrachten wir die kartesischen Raumzeitkoordinaten eines Massenpunktes bzgl. eines beliebigen Inertialsystems (x^μ) als Funktionen eines skalaren Parameters. Dazu können wir die Eigenzeit τ des Massenpunktes wählen, die differentiell durch

$$\mathrm{d}\tau^2 = g_{\mu\nu}\mathrm{d}x^\mu \mathrm{d}x^\nu \tag{1.66}$$

definiert ist. Daraus folgt sofort, daß die **Vierergeschwindigkeit**, deren Komponenten durch

$$u^\mu = \frac{\mathrm{d}x^\mu}{\mathrm{d}\tau} := \dot{x}^\mu \tag{1.67}$$

[5] Der einfache Beweis sei dem Leser zur Übung überlassen.

definiert sind[6], die Nebenbedingung

$$g_{\mu\nu}u^\mu u^\nu = u_\mu u^\mu = 1 = \text{const} \tag{1.68}$$

erfüllen muß. Durch diese Nebenbedingung kann eine der vier Koordinaten aus dem Bewegungsgesetz eliminiert werden, so daß schließlich für jeden inertialen Beobachter die Bewegung eindeutig durch die drei räumlichen Koordinaten des Massenpunktes als Funktion der Zeit[7] gegeben ist, wie es sein muß. Außerdem läßt sich die Zeit stets als strikt monoton wachsende Funktion der Eigenzeit festlegen:

$$\dot{x}^0 > 0. \tag{1.69}$$

Aufgrund der Nebenbedingung (1.68) wird die relativistische Verallgemeinerung des Newtonschen Kraftbegriffes i.a. von u^μ abhängige Kräfte erfordern.

Wir postulieren also als Erweiterung des zweiten Newtonschen Gesetzes

$$m\ddot{x}^\mu = m\dot{u}^\mu = K^\mu(x, u), \tag{1.70}$$

wobei wir vorausgesetzt haben, daß die **Minkowskikraft** K^μ eine **lokale** Funktion ist, d.h. nur vom Ort des Massenpunktes und seiner Geschwindigkeit abhängt. Dies hängt mit dem oben erwähnten Konzept der **Nah- oder Feldwirkung** zusammen: Kräfte auf einen Massepunkt werden durch Felder am jeweiligen Ort des Teilchens hervorgerufen. Die Felder selbst haben ihre Ursache in Quellen, die wir hier noch nicht näher spezifizieren und sind eigenständige dynamische Objekte, so daß das relativistische Kausalitätsprinzip erfüllt ist. Die Felder selbst sind über die Bewegung von Probeteilchen, die durch Gleichungen der Form (1.70) beschrieben werden operational definiert: Durch Beobachtung der Bewegung von Probeteilchen kann auf die Felder zurückgeschlossen werden, wobei wir davon ausgehen, daß die Rückwirkung der Probeteilchen auf die Felder vernachlässigt werden kann. Dies ist prinzipiell problematisch, wie wir weiter unten noch sehen werden. Wegen (1.68) müssen die Kräfte die Bedingung

$$u_\mu K^\mu(x, u) = 0 \tag{1.71}$$

erfüllen.

Der Parameter $m = \text{const}$ in (1.70) ist die Masse des Teilchens, wie wir im nächsten Abschnitt durch Betrachtung des Newtonschen Grenzfalles zeigen werden.

Es lassen sich leicht Kräfte dieser Art postulieren. Als Beispiele seien hier nur genannt[8]:

$$\begin{aligned} K^\mu(x, u) &= (\eta^{\mu\nu} - u^\mu u^\nu)V_\nu(x), \\ K^\mu(x, u) &= F^{\mu\nu}(x)u_\nu, \quad F^{\mu\nu} = -F^{\nu\mu}. \end{aligned} \tag{1.72}$$

[6] Man beachte, daß hier und im folgenden $\dot{A}$ die Ableitung nach der **Eigenzeit** (oder einem anderen skalaren Zeitparameter) und nicht nach der Koordinatenzeit verstanden wird.

[7] Unter „Zeit" verstehen wir hier und im folgenden stets die Zeitkomponente x^0 des Raumzeitvektors bzgl. eines Inertialsystems.

[8] Wir werden sehen, daß die erste Gleichung in dem Fall, daß $V_\nu(x) = \partial_\nu \Phi(x)$ die Wechselwirkung des Punktteilchens mit einem Skalarfeld Φ und die die mit einem elektromagnetischen Feld beschreibt, falls es ein Vektorfeld A_μ gibt, so daß $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\nu$ ist.

1.3.2 Der Newtonsche Grenzfall

Um diese recht abstrakten mathematischen Konzepte etwas besser physikalisch interpretieren zu können, gehen wir zur Beschreibung in einem inertialen Bezugssystem über und formulieren die Bewegungsgleichungen (1.70) bzgl. der Koordinatenzeit $t = x^0$. Betrachten wir zunächst die räumlichen Komponenten als Funktionen der Koordinatenzeit:

$$\vec{v} = \mathrm{d}_t \vec{x} = \mathrm{d}_\tau \vec{x} \frac{\mathrm{d}\tau}{\mathrm{d}t} = \vec{u}\sqrt{1 - \vec{v}^2} \;\Rightarrow\; \vec{u} = \gamma \vec{v}, \tag{1.73}$$

wobei

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \vec{v}^2}} = u^0. \tag{1.74}$$

Weiter ist

$$\mathrm{d}_\tau \vec{u} = \frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}\tau} \mathrm{d}_t \vec{u} = \gamma \mathrm{d}_t(\gamma \vec{v}). \tag{1.75}$$

Damit folgt die **Dreierformulierung** der relativistischen Bewegungsgleichung

$$m\mathrm{d}_t(\gamma \mathrm{d}_t \vec{x}) = \frac{1}{\gamma}\vec{K} := \vec{F}. \tag{1.76}$$

Nehmen wir nun an, die Geschwindigkeiten der beteiligten Teilchen in einem inertialen Bezugssystem seien in einem bestimmten Zeitbereich klein gegen die Lichtgeschwindigkeit, so daß wir Größen in zweiter Ordnung in $\vec{v}$ vernachlässigen können, so gelangen wir in der Tat zur Newtonschen Form der Bewegungsgleichungen

$$m\mathrm{d}_t^2 \vec{x} = \vec{F}, \tag{1.77}$$

wobei sich nun in der Tat m als die Masse des Teilchens und $\vec{K}$ als die Kraft erweist, wobei diese allerdings i.a. von der Geschwindigkeit $\vec{v}$ des Teilchens abhängen kann[9]

1.3.3 Energie und Impuls des Punktteilchens

Wenden wir uns nun wieder der exakten Bewegungsgleichung im Dreierformalismus (1.76) zu und definieren als **Impuls** des Teilchens die Größe

$$\vec{p} = m\gamma \vec{v} = m\vec{u}, \tag{1.78}$$

folgt die exakte Bewegungsgleichung (1.76) in der an Newtons ursprüngliche Formulierung des zweiten Gesetzes erinnernden Gestalt

$$\mathrm{d}_t \vec{p} = \vec{F}. \tag{1.79}$$

Man beachte, daß wir hier ausnahmsweise den Boden der kovarianten Schreibweise vollständig verlassen haben. Lediglich $\vec{p}$ sind die Dreierkomponenten eines Vierervektors, nicht jedoch $\vec{F}$[10]. Betrachten

[9] In der hier durchgeführten Näherung sind nur die Beiträge erster Ordnung in $\vec{v}$ mitzunehmen. Daher ist es auch unerheblich, ob in (1.77) auf der rechten Seite $\vec{K}$ oder $\vec{F}$ geschrieben wird, denn $\gamma = (1 - \vec{v})^{-1/2} = 1 + \vec{v}^2/2 + \ldots$.

[10] I.a. transformieren sich die Komponenten von mit Vektorpfeilen versehene Größen also nur unter Drehungen wie Dreiervektoren. Untersuchungen zu den Transformationseigenschaften solcher Größen unter Lorentztransformationen sind zuweilen schwierig, und es ist stets von Vorteil zur manifest kovarianten Form zurückzukehren. Für die physikalische Interpretation, die wir hier gewinnen wollen, ist jedoch oft der Rückgriff auf die Dreierdarstellung in einem dazu festgelegten Inertialsystem vorteilhaft.

wir nun noch die 0-Komponente der Bewegungsgleichung (1.70) und schreiben sie in die Dreierformulierung um

$$m\mathrm{d}_\tau \gamma = m\gamma \mathrm{d}_t \gamma = K^0. \tag{1.80}$$

Schreiben wir nun (1.71) im Dreierformalismus, ergibt sich

$$u^0 K^0 - \vec{u}\vec{K} = 0 \;\Rightarrow\; K^0 = \gamma \vec{v}\vec{F}. \tag{1.81}$$

Dies in (1.80) eingesetzt ergibt schließlich

$$\mathrm{d}_t m\gamma = \vec{v}\vec{F}. \tag{1.82}$$

Dies zeigt, daß die Identifikation von E

$$E = m\gamma = m + \frac{m}{2}\vec{v}^2 + \cdots \tag{1.83}$$

mit der (kinetischen) Energie des Teilchens konsistent mit der Identifikation von $\vec{p}$ mit dem Impuls des Teilchens ist. Es ist wichtig zu bemerken, daß der Impulssatz in der relativistischen Mechanik im Gegensatz zur Newtonschen nur für das abgeschlossene System aus Teilchen *und* Feldern gilt. Der Grund dafür ist, daß das dritte Newtonsche Gesetz („actio = reactio") für ein System von wechselwirkenden Punktteilchen allein nicht gelten kann, da es ja keine instantanen Fernwirkungen geben kann. Der Energiesatz kann in speziellen Fällen hingegen gültig sein, nämlich dann, wenn die Kräfte konservativ sind, sich also als Dreiergradient eines zeitunabhängigen Potentials gemäß $\vec{F} = -\partial_{\vec{x}} V(\vec{x})$ schreiben lassen. Dann zeigt die Integration von (1.82) sofort, daß wie in der klassischen Mechanik $m\gamma + V = E_{\text{total}}$

Wir werden weiter unten noch nachweisen, daß diese Identifikation mit der durch das **Noethertheorem** gegebenen Definition über die Symmetrie unter Zeittranslationen übereinstimmt.

Nun bilden E und $\vec{p}$ die Komponenten eines Vierervektors, den **Viererimpulsvektor** p, und es gilt

$$p^\mu = m\mathrm{d}_\tau x^\mu = mu^\mu \;\Rightarrow\; p_\mu p^\mu = m^2. \tag{1.84}$$

Die letztere Beziehung zeigt, daß die Masse eines Teilchens ein Skalar ist. Weitere wichtige Beziehungen, die sich direkt aus (1.84) ergeben, sind noch durch

$$\vec{v} = \frac{\vec{p}}{E}, \quad E = \sqrt{m^2 + \vec{p}^2} \tag{1.85}$$

gegeben.

1.3.4 Das Hamiltonsche Wirkungsprinzip

Um nun einige Untersuchungen hinsichtlich der Symmetrieeigenschaften der mechanischen Systeme anstellen zu können, suchen wir eine Formulierung der relativistischen Mechanik mit Hilfe des **Hamiltonschen Prinzip der kleinsten Wirkung**.

Zunächst erscheint es am einfachsten, auf manifeste Kovarianz zu verzichten und das Prinzip in Analogie zur nichtrelativistischen Mechanik zu formulieren. Dazu wird das **Wirkungsfunktional** definiert, das alle möglichen Trajektorien $\vec{x}(t)$ eines Punktteilchens wie folgt in die reellen Zahlen abbildet:

$$A[\vec{x}] = \int \mathrm{d}t L(\vec{x}, \mathrm{d}_t\vec{x}, t). \tag{1.86}$$

Das Hamiltonsche Prinzip zeichnet nun die abhängig von den Anfangsbedingungen tatsächlich durchlaufenen Bahnen dadurch aus, daß A unter beliebigen Variationen der Trajektorien um die Bahnen stationär ist, wobei die Zeit ein fester Parameter ist, der nicht mittransformiert wird. Variieren wir also A gemäß dieser Vorschrift. Die Endpunkte der Trajektorien werden dabei definitionsgemäß festgehalten:

$$\delta A[\vec{x}] = A[\vec{x} + \delta\vec{x}] - A[\vec{x}] = \int \mathrm{d}t \left[\delta\vec{x}\, \partial_{\vec{x}} L + \delta \mathrm{d}_t\vec{x}\, \partial_{\mathrm{d}_t\vec{x}} L\right]. \tag{1.87}$$

Wegen $\delta t = 0$ gilt nun

$$\delta \mathrm{d}_t\vec{x} = \mathrm{d}_t \delta\vec{x}, \tag{1.88}$$

und wir können im zweiten Term in (1.88) partiell integrieren. Wegen der Randbedingungen $\delta\vec{x}(\pm\infty) = 0$ an die Variation, verschwindet der integralfreie Anteil, so daß wir schließlich

$$\delta A[\vec{x}] = \int \mathrm{d}t\, \delta\vec{x} \left[\partial_{\vec{x}} L - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \partial_{\mathrm{d}_t\vec{x}} L\right] \tag{1.89}$$

erhalten.

Bezeichnet nun $\vec{x}$ die tatsächlich durchlaufene Bahn, muß dieser Ausdruck *für alle* Variation $\delta\vec{x}$ verschwinden, und das kann nur der Fall sein, wenn in (1.89) die Klammer unter dem Integral identisch verschwindet. So gelangt man zu den **Euler-Lagrangegleichungen**

$$\partial_{\vec{x}} L = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \partial_{\mathrm{d}_t\vec{x}} L. \tag{1.90}$$

Die physikalisch entscheidende Frage ist nun, wie man die Lagrangefunktion L bestimmt. Wir haben dazu zunächst lediglich die Struktur der Raumzeit zur Verfügung, die wir bereits über Symmetrieprinzipien festgelegt haben.

Für ein freies Teilchen steht uns lediglich $\vec{x}$ selbst als „Baustein" für die Lagrangefunktion zur Verfügung. Wir müssen nun verlangen, daß ein freies Teilchen einem Poincaré-invarianten Bewegungsgesetz folgt. Das Wirkungsprinzip vereinfacht diese Aufgabe erheblich: Wir können einfach verlangen, daß die Wirkung Poincaré-invariant sein möge[11]. Diese Forderung läßt sich nun wieder am bequemsten dadurch erfüllen, daß das Differential $\mathrm{d}t\, L$ Poincaré-invariant ist.

Zunächst betrachten wir die Untergruppe der Raum-Zeit-Translationen. Es soll also $\mathrm{d}t\, L$ unter der Variation

$$\delta t = \text{const}, \quad \delta\vec{x} = \text{const} \tag{1.91}$$

invariant sein. Dies ist nur möglich, wenn L eine Funktion der Geschwindigkeiten $\vec{v} = \mathrm{d}_t\vec{x}$ allein ist, denn es ist ja schon $\delta \mathrm{d}t = \mathrm{d}\delta t = 0$ unter den Variationen (1.91), und es gilt $\delta\vec{v} = \delta \mathrm{d}_t\vec{x} = \mathrm{d}_t\delta\vec{x} = 0$.

[11] Dies ist eigentlich etwas zu streng, denn es wäre für die Poincaré-Invarianz bereits hinreichend, wenn nur die Variation (1.89) invariant wäre. Wir werden bei unseren Untersuchungen jedoch mit der etwas strengeren Variante auskommen.

Wir müssen weiter $L = L(\partial_t \vec{x})$ so festlegen, daß $\mathrm{d}t\, L$ auch unter Lorentztransformationen invariant ist. Aus den Vierervektorkoordinatendifferentialen können wir aber nun nur eine Invariante bilden, nämlich das Eigenzeitelement

$$\mathrm{d}\tau = \sqrt{dx_\mu dx^\mu} = \mathrm{d}t\sqrt{1-\vec{v}^2} \tag{1.92}$$

Damit ist aber $L \propto \sqrt{1-\vec{v}^2}$ festgelegt. Die Proportionalitätskonstante sollte negativ sein, damit das Wirkungsfunktional ein Minimum besitzt, und die Dimension von L sollte die einer Energie sein, damit $\mathrm{d}t\, L$ die Dimension einer Wirkung erhält. Wir setzen also als Lagrangefunktion für ein freies Teilchen

$$L = -m\sqrt{1-\vec{v}^2}, \quad \vec{v} = \mathrm{d}_t \vec{x} \tag{1.93}$$

an.

Die Euler-Lagrangegleichungen (1.90) ergeben dann

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\vec{v}}{\sqrt{1-\vec{v}^2}} = 0. \tag{1.94}$$

Also ist

$$\frac{\vec{v}}{\sqrt{1-\vec{v}^2}} = \vec{A} = \text{const}. \tag{1.95}$$

Quadrieren dieser Gleichung ergibt dann

$$\vec{v}^2 = \frac{\vec{A}^2}{1+\vec{A}^2} = \text{const}, \tag{1.96}$$

und dies in (1.94) ausgenutzt ergibt sofort, daß

$$\vec{v} = \text{const} \tag{1.97}$$

sein muß. Damit ist aber das spezielle Relativitätsprinzip erfüllt, demzufolge ein freies Teilchen sich geradlinig gleichförmig bewegen (oder in Ruhe verharren) muß. Unser Ansatz (1.93) erfüllt also die Forderungen des speziellen Relativitätsprinzips und ist demzufolge eine korrekte Version eines relativistischen Variationsprinzips für ein freies Teilchen.

Als nächstes wollen wir mit dem speziellen Relativitätsprinzip vereinbare Wechselwirkungen mit **äußeren Feldern** aufsuchen. Unter „äußeren Feldern" verstehen wir solche Felder, die wir irgendwie erzeugt denken, etwa ein elektromagnetisches Feld durch Ladungs- und Stromverteilungen, wobei die Rückwirkung des untersuchten Punktteilchens auf die Felder selbst vernachlässigt werden kann. Ein Beispiel ist etwa die Bewegung einzelner Elektronen im elektrischen Feld eines Plattenkondensators oder dem Magnetfeld einer Spule, die von makroskopisch großen Strömen durchflossen wird.

Dazu ist es nun von großem Vorteil, **manifest kovariante** Formulierungen der Wirkung zu verwenden, d.h. die Lagrangefunktion manifest Lorentz-invariant zu schreiben. Dies gelingt am einfachsten, indem man einen skalaren **Weltzeitparameter** λ einführt und die Trajektorien in der vierdimensionalen Raumzeit $x^\mu(\lambda)$ betrachtet, wobei x^μ die Zeit- und Raumkoordinaten bzgl. eines beliebigen Inertialsystems bezeichnen. Es ist klar, daß dabei wie bei unserer Formulierung mit der Eigenzeit τ des Teilchens die scheinbare Überzahl von einem Freiheitsgrad durch eine Nebenbedingung der Art

(1.68) reduziert wird. Letztlich sind ja die drei räumlichen Koordinaten die eigentlichen dynamischen Freiheitsgrade des Punktteilchens.

Am elegantesten läßt sich das Wirkungsprinzip umformulieren, indem man die allgemeine Unabhängigkeit der Variation des Wirkungsfunktionals im Hamiltonschen Sinne vom Parameter λ verlangt, der auch als die Zeit t gewählt werden kann. Die vier Koordinaten x^μ können dann frei variiert werden, und da die Wirkung stets dieselbe ist, auch wenn man $\lambda = t$ setzt, kann man sicher sein, stets dasselbe dynamische System zu beschreiben. Man kann freilich auch die Eigenzeit τ selbst als Weltparameter wählen, *nachdem* die Euler-Lagrangegleichungen aus dem Variationsprinzip bestimmt sind. Vorher ist das nicht möglich, weil τ kein von $\vec{x}(t)$ bzw. $x^\mu(\lambda)$ unabhängiger Parameter ist.

Wir schreiben also die Wirkung in der Form

$$A[x] = \int \mathrm{d}\lambda \, L(x, \dot{x}), \quad \dot{x} = \mathrm{d}_\lambda x. \tag{1.98}$$

Die *unabhängige* Variation der vier Raumzeitkoordinaten bei festgehaltenen Randpunkten führt dann wie bei der obigen Rechnung auf die Euler-Lagrangegleichungen

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\lambda}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = \frac{\partial L}{\partial x}. \tag{1.99}$$

Für das freie Teilchen ist sie wegen (1.93) durch

$$L = -m\sqrt{\dot{x}^2} = -m\sqrt{\dot{x}_\mu \dot{x}^\mu} \tag{1.100}$$

gegeben, und die Euler-Lagrangegleichungen ergeben

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\lambda}\left(\frac{\dot{x}}{\sqrt{\dot{x}^2}}\right) = 0. \tag{1.101}$$

Wie oben erhält man wieder die korrekte Lösung $\vec{v} = 0$. Dies ist deshalb gewährleistet, weil für das freie Teilchen L eine von erster Ordnung homogene Funktion von $\dot{x}$ ist und folglich das freie Wirkungsfunktional für alle Weltparameter λ identisch ist.

Wir untersuchen nun die Bedingung an die Lagrangefunktion, die die Unabhängigkeit der Wirkung A von der Wahl des Weltparameters λ sicherstellt. Dazu variieren wir nun λ durch eine infinitesimale „Umparametrisierung":

$$\lambda'(\lambda) = \lambda + \delta\lambda(\lambda). \tag{1.102}$$

Nun vertauschen die Ableitung nach λ und die Variation gemäß (1.102) nicht. In erster Ordnung in δ haben wir nämlich

$$\delta\dot{x} = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}\lambda'} - \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}\lambda} = -\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}\lambda}\frac{\mathrm{d}\delta\lambda}{\mathrm{d}\lambda} = -\dot{x}\dot{\delta\lambda}. \tag{1.103}$$

Das Differential im Wirkungsintegral transformiert sich gemäß

$$\mathrm{d}(\lambda + \delta\lambda) = \mathrm{d}\lambda(1 + \dot{\delta\lambda}), \tag{1.104}$$

so daß die Variation der Wirkung durch

$$\delta A = \int \mathrm{d}\lambda \left\{ (1 + \dot{\delta\lambda}) \left[L(x, \dot{x}) - \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \dot{x} \dot{\delta\lambda} \right] - L(x, \dot{x}) \right\} = \int \mathrm{d}\lambda \left[-\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \dot{x} \dot{\delta\lambda} + \dot{\delta\lambda} L \right] \tag{1.105}$$

gegeben ist.

Nun liefert das Hamiltonsche Prinzip offensichtlich dieselben Bewegungsgleichungen, wenn man die Lagrangefunktion um die totale Ableitung einer Funktion $\Omega(x, \lambda)$ nach λ ändert, da dies in der Wirkung nur Randterme liefert, und beim Hamiltonschen Prinzip die Werte der Weltlinie $x(\lambda)$ am Rande des Integrationsintervalls (hier der Einfachheit halber $\lambda \to \pm\infty$) nicht variiert werden. Folglich ist also nach partieller Integration von (1.105) zu verlangen, daß es eine Funktion $\Omega(x, \lambda)$ gibt, so daß

$$\frac{\mathrm{d}L}{\mathrm{d}\lambda} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\lambda} \left(\dot{x} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} + \dot{x} \frac{\partial \Omega}{\partial x} + \frac{\partial^2 \Omega}{\partial \lambda^2} \right) \tag{1.106}$$

ist. Das bedeutet, daß

$$L = \dot{x} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} + \dot{x} \frac{\partial \Omega}{\partial x} + \frac{\partial^2 \Omega}{\partial \lambda^2} + A, \quad A = \text{const} \tag{1.107}$$

sein muß. Wir können nun obdA.

$$\Omega = -\frac{A}{2} \lambda^2 \tag{1.108}$$

wählen, woraus dann die gesuchte Bedingung

$$L = \dot{x} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \tag{1.109}$$

folgt.

Dies ist nun sicher der Fall, wenn L eine homogene Funktion erster Ordnung in $\dot{x}$ ist, also wenn für einen beliebigen positiven Parameter σ gilt[12]

$$L(x, \sigma \dot{x}) = \sigma L(x, \dot{x}). \tag{1.110}$$

Es ist allerdings eine hinreichende, keine notwendige Bedingung.

Beispiele

Es ist nun sehr leicht, Beispiele für Lagrangefunktionen zu konstruieren. Die freie Lagrangefunktion haben wir ja schon in Gl. (1.100) definiert. Einige mögliche Wechselwirkungsterme sind die mit äußeren Skalar- und Vektorfeldern

$$L_S = -g\sqrt{\dot{x}^2}\Phi(x), \tag{1.111}$$

$$L_V = -q\dot{x}A(x). \tag{1.112}$$

[12] gemäß einem Satz, der als Eulers Theorem über homogene Funktionen bekannt ist.

Dabei sind g und q Konstanten, die die Kopplung des Probeteilchens, beschrieben durch seine Weltkoordinaten x, an das Skalar- bzw. Vektorfeld beschreibt[13].

Die beiden Ansätzen gemeinsame Eigenschaft ist die **Lokalität**, d.h. die Kräfte auf das Teilchen mit den Weltkoordinaten x werden durch die **lokale Wechselwirkung** mit den äußeren Feldern $\Phi(x)$ bzw. $A(x)$ beschrieben, d.h. die Felder gestatten die Interpretation, daß keine Fernwirkung der Teilchen mit den Quellen wie in der Newtonschen Physik stattfindet, sondern eine Lokale mit den Quellen. Freilich ist dies beim gegenwärtigen Stand unserer Betrachtungen reine Semantik, denn das kann man ja etwa auch über die Lagrangefunktion der Wechselwirkung eines leichten Planeten mit einer als äußerem „Gravitationsfeld" abstrahierten sehr viel schwereren Sonne so interpretieren. Der Unterschied wird erst offenkundig, wenn man Systeme von Punktladungen betrachtet und die Dynamik der Felder berücksichtigt. Wir werden darauf später noch zurückkommen.

Zunächst sei aber der Vollständigkeit halber noch kurz rekapituliert, was wir unter einem Skalar-, Vektor bzw. allgemeiner einem Tensorfeld verstehen. Das ist im gegenwärtigen Zusammenhang wichtig, weil dies sicherstellt, daß die Lagrangefunktionen (1.111) und (1.112) tatsächlich Poincaré-invariant sind. Eine Poincarè-Transformation wirkt sich definitionsgemäß auf die Weltkoordinaten x des Teilchens wie folgt aus:

$$x \rightarrow x' = \Lambda x + a, \quad \Lambda \in \mathrm{SO}(1,3)^{\uparrow}, \quad a \in \mathbb{R}^4, \tag{1.113}$$

wobei sowohl Λ als auch a konstant, also als vom Weltparameter λ unabhängig anzusehen sind. Es folgt sofort, daß sich die Ableitung der Weltkoordinaten homogen transformiert:

$$\dot{x} \rightarrow \dot{x}' = \Lambda \dot{x}. \tag{1.114}$$

Die Lagrangefunktionen (1.111-1.112) sind also Poincaré-invariant, wenn sich die Felder gemäß

$$\Phi(x) \rightarrow \Phi'(x') = \Phi(x) = \Phi[\Lambda^{-1}(x'-a)], \tag{1.115}$$
$$A(x) \rightarrow A'(x') = \Lambda A(x) = \Lambda A[\Lambda^{-1}(x'-a)]. \tag{1.116}$$

Dies *definiert* den mathematischen begriff eines Feldes durch sein Transformationsverhalten unte einer bestimmten Gruppe. Es ist hervorzuheben, daß hier nicht gefordert wird, daß sich die Feldgrößen unter *allen* möglichen linearen (bzw. affinen) Transformationen der Weltkoordinaten wie Tensorkomponenten[14]verhalten müssen, sondern lediglich unter einer bestimmten Untergruppe, im gegebenen Falle der Poincarégruppe eben. Insofern unterscheidet sich der Tensorbegriff der Physiker ein wenig von dem engeren Begriff der Mathematiker.

Es ist weiter bemerkenswert, daß allein aufgrund der oben bereits besprochenen physikalischen operationalen Interpretation, daß die Felder als physikalische Größen als durch ihre Wirkung auf die Bewegung von Probeteilchen definiert anzusehen sind, wichtige Folgerungen über die Gestalt der **Feldgleichungen**, die die Dynamik der Felder sowie ihre Erzeugung aus Quellen gezogen werden

[13]Wir werden weiter unten sehen, daß (1.112) die Wechselwirkung eines mit der elektrischen Ladung q geladenen Punktteilchens mit dem elektromagnetischen Feld beschreibt, wobei A die vierdimensionale Zusammenfassung des Skalar- und Dreiervektorpotentials für das elektrische und magnetische Feld ist.

[14]In diesem Zusammenhang verstehen wir darunter allgemein Tensoren n-ter Stufe, wobei die Skalar- ($k=0$) und Tensorfelder ($k=1$) als Spezialfälle anzusehen sind.

können. Ein Beispiel ist bereits das in (1.112) eingeführte Vektorfeld A. Naiv betrachtet, könnte man denken, daß wir es hier mit vier Feldfreiheitsgraden zu tun hätten, denn A ist ja ein Vierervektor, besitzt also vier (reelle) Komponenten.

Andererseits besitzt jedoch die Lagrangefunktion (1.112) eine umfassende Symmetrie. Nimmt man nämlich an, daß das Vektorfeld der Vierergradient eines beliebigen Skalarfeldes χ ist,

$$A_\mu = \frac{\partial \chi}{\partial x^\mu} := \partial_\mu \chi := \chi_{,\mu}, \tag{1.117}$$

so wirkt sich das Vektorfeld nicht auf das Probeteilchen aus, denn die Lagrangefunktion (1.112) wird ja in diesem Falle zu einer totalen Ableitung nach dem Weltparameter λ, und die Variation des entsprechenden Beitrags zur Wirkung verschwindet:

$$L_\chi = -q\dot{x}^\mu \partial_\mu \chi = -q \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\lambda} \chi. \tag{1.118}$$

Da weiter (1.112) linear in A ist, ist für jedes solche Vektorfeld durch eine sogenannte **Eichtransformation**

$$A_\mu(x) \rightarrow A'_\mu(x) = A_\mu(x) + \partial_\mu \chi(x), \tag{1.119}$$

wobei χ ein *beliebiges* Skalarfeld sein kann, eine Symmetrietransformation gegeben. Das bedeutet aber, daß eine physikalische Situation nicht durch ein spezifisches Feld A beschrieben wird, sondern eine ganze Klasse von Feldern, die alle A' enthält, welche aus A durch eine Eichtransformation der Gestalt (1.119) hervorgehen, dieselbe Bewegung beschreiben. Die Felder A' lassen sich physikalisch also durch nichts von dem ursprünglichen Feld A unterscheiden, und folglich kann man ungestraft eine Nebenbedingung stellen, ohne die beschriebene Situation zu ändern. Das bedeutet, daß ein Vektorfeld maximal drei statt vier unabhängige Komponenten besitzt.

Die Nebenbedingungen können dabei die manifeste Poincaré-Kovarianz verletzen. Man kann z.B. ausschließlich mit Vektorfeldern arbeiten, für die $A^0 \cong 0$ ist, denn man kann sicher eine Funktion χ finden, die für ein gegebenes Vektorfeld A durch eine Eichtransformation (1.119) diese Bedingung erfüllt. Die Bewegungsgesetze für das Probeteilchen bleiben freilich ungeändert und sind folglich nach wie vor Poincaré-kovariante Gleichungen. Man erkauft sich also i.a. die Bequemlichkeit manifest kovarianter Lagrangefunktionen mit der Einführung physikalisch überzähliger Freiheitsgrade.

Es sei der Vollständigkeit halber nur erwähnt, daß solche **Eichsymmetrien** ganz allgemein eine eminent wichtige Rolle in der modernen Physik einnehmen. So beruht das **Standardmodell der Elementarteilchen** auf solchen Eichsymmetrien. Wir werden im nächsten Kapitel bei der Besprechung der Elektrodynamik sehen, daß schon in der klassischen Feldtheorie die Eichsymmetrie nützliche Dienste leistet.

Betrachten wir nun noch die vollständigen Lagrangefunktionen für unsere Probeteilchen und werten die Euler-Lagrangegleichungen aus, um zu den Bewegungsgleichungen bzw. den entsprechenden Ausdrücken für die Minkowskikräfte zu gelangen. Wir setzen also

$$L = L_0 + L_S \text{ bzw. } L = L_0 + L_V. \tag{1.120}$$

Die Euler-Lagrangegleichungen, d.h. die Bewegungsgleichungen, ergeben sich nach Wahl des Weltparameters $\lambda = \tau$, wobei τ die Eigenzeit des Probeteilchens ist, die Bewegungsgleichungen

$$(m + g\phi)\ddot{x}^\mu = g[\eta^{\mu\nu} - \dot{x}^\mu \dot{x}^\nu]\partial_\nu \Phi(x), \tag{1.121}$$

$$m\ddot{x}_\mu = q(\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu)\dot{x}^\nu. \tag{1.122}$$

In beiden Fällen ist wie zu erwarten wegen $\dot{x}^2 = 1$ die Nebenbedingung (1.71) erfüllt.

Die Gleichung im Falle der Wechselwirkung mit dem Skalarfeld weist die in der Newtonschen Mechanik unbekannte Besonderheit auf, daß ein Teil der Minkowskikraft $\propto \ddot{x}$ ist, d.h. die Kräfte werden in diesem Fall beschleunigungsabhängig! Wir haben diesen Term in (1.121) auf die linke Seite gebracht, um die Konsistenzbedingung (1.71) besser erkennen zu können.

Das Vektorfeld führt zu dem Bewegungsgesetz (1.122), welches die obige Überlegung zur Eichsymmetrie bestätigt: Da nämlich in (1.122) nur die antisymmetrisierte Ableitung der Vektorfelder auftritt, wirkt sich eine Eichtransformation (1.119) wegen der Vertauschbarkeit der partiellen Ableitungen des Feldes χ nicht auf die Bewegungsgleichung aus.

1.4 Das Noether-Theorem

Das Noether-Theorem ist von fundamentaler Bedeutung für die Modellbildung in der Physik, denn es verknüpft die Erhaltungsgrößen eines Systems mit den Symmetrien der seiner Beschreibung zugrundeliegenden Naturgesetze. Jede Einparameter-Liesymmetrie hat demzufolge einen Erhaltungssatz zur Folge. Umgekehrt definiert auch jeder Erhaltungssatz eine Symmetrie. Wir befassen uns in diesem Kapitel nur mit dem ersten Aspekt, nämlich der Folgerung der Erhaltungsgrößen aus Symmetrien der Variation der Wirkung. Wir wenden es dann auf die Raumzeitsymmetrien, die in der Poincaré-Invarianz der Naturgesetze enthalten sind, an und zeigen u.a., daß die oben definierten Größen für ein freies Teilchen tatsächlich Energie und Impuls als mit den Symmetrien der Naturgesetze unter Raum-Zeittranslationen im Sinne des Noethertheorems verknüpften Erhaltungsgrößen entsprechen. Selbstverständlich ergeben sich auch Drehimpulserhaltung und der Schwerpunktssatz aus der Symmetrie unter Lorentztransformationen.

Die Herleitung des Noethertheorems wird durch den von uns favorisierten manifest kovarianten Formalismus durch Einführung des Weltzeitskalars λ gegenüber der Herleitung in der Newtonschen Mechanik vereinfacht, da wir λ nicht mitvariieren müssen, da die Invarianz der Wirkung unter Umparametrisierungen von λ ja bereits als Konstruktionsprinzip ausgenützt wurde und lediglich die Erfüllung der Konsistenzbedingung (1.71) garantiert.

Wir betrachten eine beliebige infinitesimale Punkttransformation der Form

$$x(\lambda) \rightarrow x'(\lambda) = x(\lambda) + \delta x(x, \lambda), \quad \delta\lambda = 0. \tag{1.123}$$

Damit die Variation der Wirkung für beliebigen Trajektorien $x(\lambda)$ (und nicht nur für die Lösungen der Stationaritätsbedingung) invariant unter dieser Transformation bleibt, muß es eine Funktion $\delta\Omega(x, \lambda)$ geben, so daß

$$\frac{\partial L}{\partial x^\mu}\delta x - x^\nu \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\lambda}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}^\mu}\frac{\partial \delta x^\mu}{\partial x^\nu}\right) = \frac{\mathrm{d}\delta\Omega}{\mathrm{d}\lambda}. \tag{1.124}$$

Dies ist die **Bedingung an die Lagrangefunktion** L dafür, daß (1.123) eine Symmetrietransformation ist.

Für die Lösungen der Bewegungsgleichungen (1.99) ergibt sich daraus nach einigen Umformungen der **Erhaltungssatz**

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\lambda}\left(-\frac{\partial L}{\partial \dot{x}^\mu}\delta x^\mu + x^\nu \frac{\partial L}{\partial \dot{x}^\mu}\frac{\partial \delta x^\mu}{\partial x^\nu} + \delta\Omega\right) = 0. \tag{1.125}$$

Dieser Erhaltungssatz ist natürlich durch den Weltzeitskalar λ formuliert. Für jeden inertialen Beobachter bedeutet dies jedoch tatsächlich die zeitliche Erhaltung der angegebenen Größe, denn er kann ja seine Koordinatenzeit t als Weltzeitparameter wählen, denn das Variationsprinzip stellt ja die Unabhängigkeit der Beschreibung des Systems von dieser Wahl sicher.

Wenden wir uns nun den Poincaré-Transformationen zu. Diese sind affine Abbildungen der Raumzeit in sich:

$$\delta x^\mu = \delta\omega^\mu{}_\nu x^\nu + \delta a^\mu, \quad \delta\omega^\mu{}_\nu,\ \delta a^\mu = \text{const}. \tag{1.126}$$

Dabei müssen die Erzeugenden $\delta\omega^\mu{}_\nu$ so beschaffen sein, daß sie in erster Ordnung die Bedingung (1.40) an eine Lorentztransformation erfüllen. Es ergibt sich, daß

$$\delta\omega_{\mu\nu} := \eta_{\mu\rho}\delta\omega^\rho{}_\nu = -\delta\omega_{\nu\mu} \tag{1.127}$$

sein muß. Dies ergibt $(4 \cdot 4 - 4)/2 = 6$ unabhängige Parameter für eine Lorentztransformation, wie es sein muß. Die drei Raum-Raum-Matrixelemente sind die Erzeugenden der Drehungen und die Zeit-Raum-Matrixelemente die der Lorentz-Boosts.

Es ist nun einfacher, die Translationen und Lorentztransformationen getrennt zu behandeln. Setzen wir also zunächst (1.126) mit $\delta\omega^\mu{}_\nu = 0$ in (1.124) ein. Die Bedingung (1.124) ergibt dann, daß

$$\frac{\partial L}{\partial x^\mu} = 0 \tag{1.128}$$

sein muß, damit das Bewegungsgesetz für das Punktteilchen translationsinvariant in Raum und Zeit ist. Dann sind gemäß (1.125)

$$p_\mu = -\frac{\partial L}{\partial \dot{x}^\mu} \tag{1.129}$$

die dazugehörigen Erhaltungsgrößen, die wir entsprechend Energie (p^0) und Impuls $\vec{p}$ des Systems nennen.

Für das freie Teilchen erhalten wir gemäß (1.100)

$$p^\mu = m\frac{\dot{x}^\mu}{\sqrt{\dot{x}^\nu \dot{x}_\nu}} = m\frac{\mathrm{d}x^\mu}{\mathrm{d}\tau} = m u^\mu. \tag{1.130}$$

Für ein Teilchen in äußeren Feldern sind natürlich Energie und bestimmte Impulskomponenten nur dann erhalten, wenn das äußere Feld nicht von der Zeit bzw. nicht von den entsprechenden Raumkoordinaten abhängt. Wir werden bei der dynamischen Behandlung des Gesamtsystems aus Teilchen und Feldern sehen, daß die entsprechende Energie-Impulsbilanz dadurch wiederhergestellt wird, daß die Felder selbst Energie und Impuls tragen.

Setzen wir nun in (1.126) $\delta a^\mu = 0$, untersuchen also Lorentztransformationen (Boosts bzw. Drehungen), erhalten wir aus (1.124) die Bedingung

$$\left(\frac{\partial L}{\partial x^\mu} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\lambda}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}^\mu}\right) x^\nu \delta\omega^\mu{}_\nu = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\lambda}\delta\Omega(x,\lambda). \tag{1.131}$$

Wegen der Antisymmetriebedingung (1.127) ist dies dann zu erfüllen, wenn

$$\frac{\partial L}{\partial x_\mu} x^\nu - \frac{\partial L}{\partial x_\nu} x^\mu = 0 \tag{1.132}$$

gilt. Für das freie Teilchen ergibt sich

$$\delta\Omega = \frac{m}{2}\frac{\dot{x}^\mu x^\nu - \dot{x}^\nu x^\mu}{\sqrt{\dot{x}^\rho \dot{x}_\rho}}\delta\omega_{\mu\nu}. \tag{1.133}$$

Die Erhaltungsgröße für die Drehungen nennen wir Drehimpuls. Um das übliche Vorzeichen zu erhalten, definieren wir

$$\delta\Omega = \frac{1}{2} L^{\nu\mu}\delta\omega_{\mu\nu}. \tag{1.134}$$

Gl. (1.125) liefert dann $\delta\Omega$ selbst als die zur Lorentztransinvarianz gehörigen Erhaltungsgrößen, also

$$L^{\mu\nu} = \frac{m}{\sqrt{\dot{x}_\rho \dot{x}^\rho}}(x^\mu \dot{x}^\nu - x^\nu \dot{x}^\mu) = x^\mu p^\nu - x^\nu p^\mu. \tag{1.135}$$

Für die rein räumlichen Komponenten sind das gerade die Komponenten des Drehimpulses:

$$L^{mn} = \epsilon_{mnk}(\vec{x} \times \vec{p})^k, \tag{1.136}$$

wie es sein muß, wobei kleine lateinische Indizes in $\{1,2,3\}$ laufen und ϵ_{mnk} das Levi-Civita-Symbol in drei Dimensionen also das unter Permutationen seiner Indizes total antisymmetrische Symbol mit $\epsilon_{123} = 1$ bezeichnet.

Für die Zeit-Raumkomponenten ergibt sich die geradlinig gleichförmige Bewegung des Teilchens:

$$L^{0\mu} = tp^m - x^m p^0 = \mathrm{const} \tag{1.137}$$

Es ist also

$$x^m(t) = x^m(t=0) + t\frac{p^m}{p^0} \tag{1.138}$$

Die Relativgeschwindigkeit zum Inertialsystem ist also $\vec{v} = \vec{p}/p^0$.

Literaturverzeichnis

[BG69] V. Berzi und V. Gorini, Reciprocity Prinziple and the Lorentz Transformations. Jour. Math. Phys. **10** (1969) 1518, URL `http://dx.doi.org/10.1063/1.1665000`