Der Dopplereffekt beim Licht

Hendrik van Hees

3. Juni 2001

Es ist klar, daß der Dopplereffekt beim Licht, d.h. die Verschiebung der Spektrallinien bei sich bewegender Lichtquelle gegenüber der Emission bei ruhender Quelle, relativistisch behandelt werden muß.
Sei dazu Σ das Bezugssystem, in dem sich die Lichtquelle bewegt. Die 1-Achse dieses Koordinatensystems werde o.B.d.A. in die Bewegungsrichtung der Lichtquelle gelegt. Damit ist die Vierergeschwindigkeit der Lichtquelle durch

$$u = \gamma \begin{pmatrix} 1 \\ \beta \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{1}$$

gegeben wobei $0 \leq \beta < 1$ die Geschwindigkeit der Lichtquelle und $\gamma = \sqrt{1-\beta^2}^{-1}$.
Aufgrund der Kovarianz der Wellengleichung $\Box \phi = 0$ transformiert sich der lichtartige Wellenvektor k der Welle wie ein Vierervektor, wenn wir mit Hilfe der Lorentztransformation

$$L = \begin{pmatrix} \gamma & -\beta\gamma & 0 & 0 \\ -\beta\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{2}$$

in das Ruhesystem Σ' der Lichtquelle zurückrechnen.
Wir legen o.B.d.A. die 3-Achse des Systems Σ so, daß $k_3 = 0$ ist. Der Wellenvektor läßt sich dann in der Form $\vec{k} = (k_0 \cos\alpha, k_0 \sin\alpha, 0)$ schreiben, wobei wir $k_0 > 0$ annehmen (Ausbreitung entlang des positiven Lichtkegels). Das bedeutet, daß Ausbreitungsrichtung des Lichtes und Bewegungsrichtung der Lichtquelle den Winkel α einschließen. Weiter gilt $k^2 = 0$.
Das bedeutet, daß sich Frequenz und Wellenvektor des Lichtes im Ruhsystem der Lichtquelle mit Hilfe der Lorentztransformation, angewandt auf den Wellenvektor k berechnen zu:

$$k' = Lk = k_0 \begin{pmatrix} \gamma - \beta\gamma\cos\alpha \\ -\beta\gamma + \gamma\cos\alpha \\ \sin\alpha \\ 0 \end{pmatrix}. \tag{3}$$

Im Ruhsystem der Lichtquelle besitzt das Licht also die Frequenz

$$k_0' = k_0\gamma(1-\beta\cos\alpha) \Leftrightarrow k_0 = \frac{\sqrt{1-\beta^2}}{1-\beta\cos\alpha} k_0'. \tag{4}$$

Aus dieser Gleichung können nun insbesondere der longitudinale und transversale Dopplereffekt hergeleitet werden.
Für kleine β ergibt die Taylorentwicklung die Näherung

$$k_0 = \left[1 - \beta\cos\alpha - \beta^2\left(\frac{1}{2} - \cos^2\alpha\right) + O(\beta^3)\right] k_0'. \tag{5}$$

Bewegt sich die Lichtquelle in Ausbreitungsrichtung, so folgt

$$k_0 = \sqrt{\frac{1+\beta}{1-\beta}} k_0'. \tag{6}$$

Das bedeutet, daß gegenüber dem Ruhsystem die Frequenz im System, in dem sich die Lichtquelle bewegt, größer wird, also eine *Blauverschiebung der Spektrallinien*.
Entsprechend ergibt sich für $\alpha = \pi$, d.h. wenn sich die Lichtquelle entgegengesetzt zur Ausbreitungsrichtung des Lichtes bewegt, die *Rotverschiebung der Spektrallinien*:

$$k_0 = \sqrt{\frac{1-\beta}{1+\beta}} k_0'. \tag{7}$$

Dies ist die relativistische Verallgemeinerung für den schon aus der nichtrelativistischen Physik bekannten Dopplereffekt, und die Entwicklung für kleine β beginnt gemäß (5 mit der Ordnung β.
Es ergibt sich aber auch eine Verschiebung der Spektrallinien senkrecht zur Bewegungsrichtung der Lichtquelle, die der klassischen Behandlung des Dopplereffekts fremd ist. Dies folgt für $\alpha = \pi/2$:

$$k_0 = \sqrt{1-\beta^2} k_0'. \tag{8}$$

Dies bedeutet stets eine *Rotverschiebung der Spektrallinien*. Dieser *transversale Dopplereffekt* ist gemäß (5) für kleine β von der Ordnung β^2.