Eichtransformationen

Michael Hartwig

11. April 2001

1 Vektorpotential und skalares Potential

Die Maxwellgleichungen sind ein System gekoppelter Differentialgleichungen erster Ordnung. Oft ist es zweckmäßig, diese vier DGL's auf zwei DGL's, die dann zweiter Ordnung sind, zurückzuführen. Dies gelingt mit Hilfe des skalaren Potentials und des Vektorpotentials.

Zunächst beschaffen wir uns folgenden Satz:

Wenn die Divergenz eines Vektorfeldes $\vec{F}$ verschwindet, gibt es ein Vektorfeld $\vec{H}$, so daß $\vec{F}$ die Rotation von $\vec{H}$ ist.

$$\nabla \cdot \vec{F} = 0 \Rightarrow \vec{F} = \nabla \times \vec{H}$$

Da $\nabla \cdot \vec{B} = 0$ gilt, gibt es ein Vektorfeld $\vec{A}$, so daß

$$\vec{B} = \nabla \times \vec{A}$$

gilt. $\vec{A}$ nennen wir *Vektorpotential*

Um die Form von $\vec{A}$ zu bestimmen, formen wir

$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{1}{c} \int d^3r' \vec{j}(\vec{r}') \times \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3}$$

um.

$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{1}{c} \int d^3r' \vec{j}(\vec{r}') \times \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} = -\frac{1}{c} \int d^3r' \vec{j}(\vec{r}') \times \nabla \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} = \frac{1}{c} \nabla \times \int d^3r' \frac{\vec{j}(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} = \mathrm{rot}\vec{A}$$

Damit wird $\vec{A}$ zu

$$\vec{A} = \frac{1}{c} \int d^3r' \frac{\vec{j}(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} + \mathrm{grad}\Lambda$$

Wenn wir von

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{1}{c} \partial_t \vec{B}$$

ausgehen und das Magnetfeld durch das Vektorpotential ausdrücken, folgt

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{1}{c}\nabla \times (\partial_t \vec{A}) \qquad \text{und} \qquad \nabla \times (\vec{E} + \frac{1}{c}\partial_t \vec{A}) = 0$$

Für den nächsten Schritt brauchen wir noch folgenden Satz:

Verschwindet die Rotation eines Vektorfeldes $\vec{F}$, dann gibt es ein Skalarfeld Φ, so daß $\vec{F}$ der Gradient von Φ ist.

$$\nabla \times \vec{F} = 0 \Rightarrow \vec{F} = \nabla\Phi$$

Da die Rotation von $\vec{E} + \frac{1}{c}\partial_t \vec{A}$ verschwindet, folgt aus diesem Satz:

$$\vec{E} + \frac{1}{c}\partial_t \vec{A} = -\nabla\Phi$$

Das Feld Φ heißt *Skalarpotential.* Wir haben also:

$$\vec{E} = -\nabla\Phi - \frac{1}{c}\partial_t \vec{A}$$
$$\vec{B} = \nabla \times \vec{A}$$

2 Eichtransformationen

Wir haben gesehen, daß die Felder $\vec{E}$ und $\vec{B}$ über die Potentiale $\vec{A}$ und Φ definiert sind. Wir können nun die Maxwellgleichungen durch die Potentiale ausdrücken. Dies führt zu

$$\nabla^2\Phi + \frac{1}{c}\partial_t(\nabla \cdot \vec{A}) = -4\pi\rho \tag{1}$$

und

$$\nabla^2\vec{A} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} - \nabla\left(\nabla \cdot \vec{A} + \frac{1}{c}\partial_t\right) = -\frac{4\pi}{c}\vec{j} \tag{2}$$

Wir konnten also die vier Maxwellgleichungen auf zwei Gleichungen reduzieren. Allerdings sind sie weiterhin gekoppelt. Nun nutzen wir aus, daß das Vektorpotential in gewisser Weise willkürlich ist, da man zu $\vec{A}$ den Gradienten einer skalaren Funktion Λ hinzufügen kann. Das bedeutet, $\vec{B}$ bleibt bei der Transformation

$$\vec{A} \to \vec{A}' = \vec{A} + \nabla\Lambda \tag{3}$$

unverändert. Damit auch das elektrische Feld ungeändert bleibt, muß das skalare Potential durch

$$\Phi \to \Phi' = \Phi - \frac{1}{c}\frac{\partial \Lambda}{\partial t} \tag{4}$$

transformiert werden. Daraus folgt, daß man an die Potentiale die Bedingung

$$\nabla \cdot \vec{A} + \frac{1}{c}\frac{\partial \Phi}{\partial t} = 0 \tag{5}$$

stellen darf. Ist diese Bedingung erfüllt, werden die Gleichungen (1) und (2) entkoppelt - es bleibt übrig:

$$\nabla^2 \Phi - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} = -4\pi\rho \tag{6}$$

und

$$\nabla^2 \vec{A} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} = -\frac{4\pi}{c}\vec{j} \tag{7}$$

Die Transformationen (3) und (4) heißen *Eichtransformationen*, und die Invarianz der Felder unter solchen Transformationen nennt man *Eichinvarianz*. Die Beziehung (5) nennt man Lorentz-Bedingung. Potentiale, die diese Bedingung erfüllen, gehören zur Lorentz-Eichung. Man benutzt diese Eichung gerne, weil sie zum einen auf die Wellengleichungen (6),(7) führen zum anderen sind sie koordinatenunabhängig und werden deshalb in der speziellen Relativitätstheorie benutzt.

Eine andere Eichung ist die Coulomb-Eichung. Hier setzt man

$$\nabla \cdot \vec{A} = 0$$

Die Poissonsche Gleichung

$$\nabla^2 \Phi = -4\pi\rho$$

hat bekanntermaßen die Lösung

$$\Phi = \int \frac{\rho}{|\vec{x} - \vec{x}'|} d^3x'$$

Das skalare Potential ist dann das momentane Coulomb-Potential der Ladungsdichte. Daher der Name Coulomb-Eichung.

Die Coulomb-Eichung wird oft benutzt, wenn keine Quellen vorhanden sind. Die Felder werden dann bestimmt durch

$$\vec{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$$

und

$$\vec{B} = \nabla \times \vec{A}$$