Komplexe Integration

Michael Hartwig

23. April 2004

1 Der Unterschied zwischen reeller und komplexer Integration

Vorbemerkung: *Aus Gründen der Anschaulichkeit, habe ich weitgehend auf eine exakte mathematische Darstellung verzichtet. Ich verweise stattdessen auf die einschlägigen Lehrbücher.*

Wie ist die Situation im Reellen?

Bekanntermaßen besitzt jede stetige Funktion $f : [a, b] \to \Re, a < b$ eine Stammfunktion, zum Beispiel die Integralfunktion:

$$F(x) := \int_a^x f(t)dt$$

Dabei spielt es keine Rolle, ob man den Riemannschen Integralbegriff oder das Lebeque-Integral benutzt [FreiBus91] Seite 61. Zur Erinnerung:

Beim Riemannschen Integral benutzt man sog. "Treppenfunktionen" mit denen die zu untersuchende Funktion approximiert wird. Dabei wird die x-Achse gewissermaßen in Teile zerlegt.

Eine Funktion $f : [a, b] \to \Re$ ist dabei gerade dann Riemannintegrierbar, wenn zu jedem $\varepsilon > 0$ Treppenfunktionen $\varphi, \psi \in T[a, b]$, (dabei ist $T[a, b]$ die Menge aller Treppenfunktionen), existieren mit $\varphi \leq f \leq \psi$ und

$$\int_a^b \psi(x)dx - \int_a^b \varphi(x)dx \leq \varepsilon$$

Für eine genaue Abhandlung, siehe z.B. [For92] Seite 125ff.

Anders in der komplexen Ebene. Dort muß eine Funktion, die eine Stammfunktion hat, analytisch sein. Auch diesen Begriff will ich kurz erklären: Eine Funktion ist analytisch, wenn sie

- eindeutig und differenzierbar

oder

- wenn die partiellen Ableitungen die Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen erülllen:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y}$$

oder

- wenn sie in ihrem Analytizitätsbereich beliebig oft differenzierbar ist

Analytizität ist also eine wesentlich stärkere Forderung als die Stetigkeit.

Ein weiterer Unterschied ist, daß das komplexe Integral ein Kurvenintegral ist, welches von der Wahl der Verbindungskurve abhängt. Dies führt zum Begriff des "Linienintegrals".

2 Das Linienintegral

Wir haben bereits festgestellt, daß komplexe Integrale "Kurvenintegrale" sind, das bedeutet, wir müssen zunächst einmal klären was eine Kurve im mathematischen Sinne ist.

Definition: Eine Kurve ist eine stetige Abbildung

$$\Phi : [a, b] \to \mathbb{C}, a < b$$

eines kompakten reellen Intervalls in der komplexen Ebene.

So eine Kurve kann man natürlich beliebig konstruieren, deshalb fordern daß der Weg zumindestens "stückweise glatt" sein soll. Was bedeutet "glatt"? Nun, nichts weiter, als daß die Kurve stetig differenzierbar ist. Damit ist auch klar, was "stückweise glatt" bedeutet: Eine stückweise glatte Kurve ist also aus glatten Teilstücken

$$a = a_0 < a_1 < ... < a_n = b$$

zusammengesetzt.

Einen geschlossenen Weg nennt man Schlinge. Hat diese Schlinge keine Überkreuzung hat man es mit einer einfachen Schlinge zu tun. Der Weg gegen den Uhrzeigersinn bezeichnet man als die positive Richtung. Bei der komplexen Integration integriert man Funktionen entlang solcher Wege. Gelegendlich ist es von Bedeutung, ob diese Wege verformbar sind. Dabei spielt die topologische Struktur von Gebieten (G) in $\mathbb{C}$ eine Rolle.

Abbildung 1: Beispiel für ein einfach zusammenhängendes Gebiet (links) und ein nicht einfach zusammenhängendes Gebiet (rechts) in $\mathbb{C}$.

In einfach zusammenhängenden Gebieten können einfache Schlingen ineinander stetig überführt werden. Zwei Kurven, die bijektiv und stetig ineinander überführt werden können, heißen "homotop". Bisher haben wir noch nicht definiert was überhaupt ein Kurvenintegral ist. Dies soll nun nachgeholt werden.

Definition: Sei

$$\Phi : [a, b] \to \mathbb{C}$$

eine glatte Kurve und

$$f : D \to \mathbb{C} \qquad D \in \mathbb{C}$$

eine stetige Funktion. Dann ist

$$\int_{\Phi} f := \int_{\Phi} f(\psi) d\psi = \int_a^b f(\Phi(t))\Phi'(t)dt$$

das Kurvenintegral von f entlang Φ.

Doch zunächst einmal genug der Theorie, wenden wir uns der Praxis zu. Um ein komplexes Integral berechnen zu können, muß die Kurve parametrisiert werden. Häufig gebraucht man dabei:

- Für einen Kreis um den Punkt z_0 mit dem Radius $R : \Phi(t) = z_0 + Re^{it}, 0 \leq t \leq 2\pi$. Durchläuft man den Kreis im Uhrzeigersinn, benutzt man $\Phi(t) = z_0 + Re^{-it}$
- Für eine Strecke von z_0 nach z_1:$\Phi(t) = z_0 + t(z_1 - z_0)$, wobei $0 \leq t \leq 1)$

Ein Beispiel: Sei C ein Kreis mit dem Radius 5 um den Punkt 0. Berechne

$$\int_c \bar{z} dz$$

Zunächt also einmal $C : \Phi(t)$ mit $5e^{it}, 0 \leq t \leq 2\pi$ parametrisieren, $\Phi'(t) = 5ie^{it}$, dann ist $z(t) = 5e^{it} = 5(\cos t + i \sin t)$ und $\bar{z} = 5(\cos t - i \sin t) = 5e^{-it}$

Dann ist

$$\begin{aligned} \int_c \bar{z} dz &= \int_0^{2\pi} 5e^{-it} \cdot 5e^{it} i dt \\ &= \int_0^{2\pi} 25 i dt = 50\pi i \end{aligned}$$

3 Der Integralsatz von Cauchy

Sei $G \in$ ein einfach zusammenhängendes Gebiet und f eine Funktion in G, dann gilt für jede einfache Schlinge C:

$$\oint_C dz f(z) = 0$$

Beweis, siehe z.B. [Endl87] Seite 141ff.

Mit Hilfe des Integralsatzes von Cauchy lassen sich Integrale umschreiben: Ein Integral über das Teilstück C_1 eines geschlossenen Weges $C = C_1 \cup C_2$ läßt sich über das Integral des anderen Teilstückes C_2 ausdrücken:

$$0 = \oint_C dz f(z) = \int_{C_1} dz f(z) + \int_{C_2} dz f(z) \Rightarrow \int_{C_1} dz f(z) = -\int_{C_2} dz f(z)$$

Ein Beispiel zum Cauchyintegralsatz: Es soll folgendes Integral berechnet werden

$$\oint_C dz \frac{b}{(z-a)^n}, \qquad (n \in \mathbb{Z})$$

Der geschlossene Weg führt um den Pumkt $z = a$ herum, das bedeutet die Funktion ist analytisch, außer bei $z = a$, dort hat sie einen Pol n-ter Ordnung. Man wählt einen Kreis mit Radius $r = 1$ um den Mittelpunkt $z = a$

$$z(t) = a + e^{it}, \quad dz = ie^{it} dt, \quad (z-a)^n = e^{int}$$

Man erhält:

$$\oint_C dt \frac{b}{(z-a)^n} = ib \int_0^{2\pi} dt e^{i(1-n)t} = \begin{cases} 2b\pi i & \text{für} \quad n = 1 \\ 0 & \text{für} \quad n \neq 1 \end{cases}$$

Also

$$\oint_C dz \frac{b}{(z-a)^n} = 2b\pi i \delta_{n1}$$

4 Die Cauchy-Integralformel

Sei die Funktion f analytisch auf dem Gebiet G. C sei eine geschlossene Kurve, die samt ihrem Innern in G enthalten ist.

Dann gilt:

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(z')}{z' - z} dz$$

Und die verallgemeinerte Cauchy-Integralformel:

$$f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i} \oint_C \frac{f(z')}{(z' - z)^{n+1}} dz$$

Beweis siehe z.B. [FreiBus91] Seite 87ff.

Die Aussage des Satzes ist, daß man aus der Kenntnis der Funktionswerte am Rand des Analytizitätsgebiets alle Funktionswerte im Innern bestimmen kann [LaPu98] Seite 502

Dies probieren wir gleich an einem Beispiel aus

$$\oint_C dz \frac{\sin z}{2z - \pi}$$

Der Kreis habe den Radius $r = 2$, der Pol ($z = \frac{\pi}{2}$) liegt also im Innern des Kreises. Setzt man $z_0 = \frac{\pi}{2}$ und $f(z) = \frac{1}{2} \sin z$, hat das Integral die Form der Integralformel von Cauchy. Das Ergebnis ist daher $2\pi i \frac{1}{2} \sin(\frac{\pi}{2}) = i\pi$.

5 Die Laurentreihe

Wir erinnern uns an die Potenzreihen. Solche Reihen konvergieren im Analytizitätsbereich in einem Kreis. Sozusagen eine "verbesserte" Form der Reihenentwicklung ist die in Laurentreihen. Der Vorteil: Man kan eine Funktion rund um eine Singularität (unter Ausschluß eines inneren Kreises um die Singularität) entwickeln.

Definition: Unter einer Lautentreihe versteht man eine Reihe der Form

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n z^n = \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} a_{-n} \frac{1}{z^n}}_{\text{Hauptteil}} + \underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n}_{\text{Nebenteil}}$$

Ein Beispiel: Laurentreihenentwicklung von

$$f(z) = \frac{z^2 - 4z + 2}{z(z-1)(z-2)} = \frac{1}{z} + \frac{1}{z-1} - \frac{1}{z-2}$$

Für den Entwicklungspunkt $z = 0$ erhält man die Konvergenzgebiete $A_1(0 < |z| < 1), A_2(1 < |z| < 2)undA_3(2 < |z|)$. Für jedes Gebiet muß eine eigene Reihe entwickelt werde. Sie lauten im einzelnen:

$$A_1 : f(z) = \frac{1}{z} - \frac{1}{1-z} + \frac{1}{2}\frac{1}{1-\frac{z}{2}} = \frac{1}{z} - \sum_{n=0}^{\infty} z^n + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{2^{n+1}}$$

$$A_2 : f(z) = \frac{1}{z} + \frac{1}{z}\frac{1}{1-\frac{1}{z}} + \frac{1}{2}\frac{1}{1-\frac{z}{2}} = \frac{1}{z} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{z^n} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{2^{n+1}}$$

und

$$A_3 : f(z) = \frac{1}{z} + \frac{1}{z}\frac{1}{1-\frac{1}{z}} - \frac{1}{z}\frac{1}{1-\frac{2}{z}} = \frac{1}{z} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{z^n} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{n-1}}{z^n}$$

6 Der Residuensatz

6.1 Singularitäten

Eine isolierte Singularität z_0 einer analytischen Funktion $f(z)$ heißt

1. hebbar

oder

2. Pol

oder

3. wesentlich

je nachdem, ob der Hauptterm der Laurentreihe

1. Null ist

oder

2. endlich, also von der Form

$$\frac{a_{-k}}{z^k} + \frac{a_{-(k-1)}}{z^{k-1}} + \ldots + \frac{a_{-1}}{z}$$

   ist. Man sagt auch "Pol k-ter Ordnung"

oder

3. unendlich viele von Null verschiedene Summanden hat

Bei physikalischen Anwendungen hat man es in der Regel mit Polen k-ter Ordnung zu tun (eigentlich sind sie sogar fast immer von erster Ordnung...). Wir ignorieren also die anderen Fälle und fragen uns: Woher weiß ich von welcher Ordnung mein Pol ist?

Die Ordnung eines Pols der Funktion f in a ist k

$$\mathrm{ord}(f;a) := -k$$

ist $\mathrm{ord}(f;a) < 0 \Rightarrow a$ ist ein Pol. Ein Beispiel:

$$f(z) = \frac{1}{z^2} + \frac{1}{z} = z^{-2}(1+x) = z^{-2}h(x)$$

also $\mathrm{ord}(f;0) = -2$. Die Funktion f hat bei 0 einen Pol 2. Ordnung.

6.2 Der Residuensatz

Ist f in G analytisch, bis auf isolierte Singularitäten, ist C eine einfach geschlossene, stückweise glatte Kurve in G, die keine Singularitäten berührt, und die ganz in G liegt. Dann ist

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_C f(z)dz = \sum_n Res(f;z_0)$$

Wie findet man das Residuum? Ist der Pol von erster Ordnung, so bestimmt man

$$\mathrm{Res}(f;z_0) = \lim_{z\to z_0}(z-z_0)f(z)$$

Bei Polen n-ter Ordnung

$$\mathrm{Res}(f;z_0) = \lim_{z\to z_0}\frac{1}{(n-1)!}\frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}}\left[(z-z_0)^n f(z)\right]$$

Hat f die Form $\frac{g(z)}{h(z)}$, wobei $h(z_0)=0$ und $h'(z_0)\neq 0$ findet man das Residuum durch

$$\mathrm{Res}(f;z_o) = \frac{g(z_0)}{h'(z_0)}$$

Ein Beispiel:

$$f(z) = \frac{e^z}{(z-1)^3}$$

Dann ist

$$\begin{aligned} Res\left(\frac{e^z}{(z-1)^3},1\right) &= \lim_{z\to 1}\frac{1}{2!}\frac{d^2}{dz^2}\left[(z-1)^3\frac{e^z}{(z-1)^3}\right] \\ &= \lim_{z\to 1}\frac{1}{2}\frac{d^2}{dz^2}e^z = \lim_{z\to 1}\frac{1}{2}e^z = \frac{e}{2} \end{aligned}$$

7 Literatur

- [FreiBus] Freitag/Busam: Funktionentheorie 1991
- [Endl] Endl/Luh: Analysis 3 1987
- [For] Forster: Analysis 1 1992
- [LaPu] Lang/Pucker: Mathematische Methoden in der Physik 1998