Eine kurze Geschichte der Trägheit

G. Schmidt

8. Mai 2000

Zusammenfassung

Beispiele für die Berechnung des Trägheitsmomentes von Körpern längs beliebiger Achsen.

Diese kurze Abhandlung ist entstanden nachdem mir in der Newsgroup de.sci.physik einige Fragen zu dem Thema beantwortet wurden. An dieser Stelle herzlichen Dank an alle die mir bei meinen Fragen weitergeholfen haben.

Inhaltsverzeichnis

1 Definitionen **1**
1.1 Abkürzende Schreibweisen . . . 1
1.2 Trägheitsmoment . . . 2
1.3 Trägheitstensor . . . 2

2 Beispiele **2**
2.1 A simple one-der Quader . . . 2
2.2 Die Kugel-eine runde Sache . . . 3
2.3 Die Kugel-es geht auch anders . . . 4
2.4 Die Ellipse ist eigentlich ganz einfach . . . 4
2.5 Der Ellipsenkegel . . . 5

3 Der gerade Kreiskegel **5**
3.1 Trägheitsmoment bzgl. beliebiger Achsen . . . 5
3.2 Trägheitstensor eines Kegels . . . 6

1 Definitionen

1.1 Abkürzende Schreibweisen

$$\iiint_K dV = \int_K dV$$

Hierbei ist unter dV ein zu dem, für das Problem passend gewählten, Koordinatensystem gehörenden Volumenelement zu verstehen.Mit dem Index K ist gemeint, das die Grenzen der für den zu berechnenden Körper passend zu wählen sind. Im weiteren kürze ich Trägheitsmoment mit TM ab und Trägheitstensor mit TT.

1.2 Trägheitsmoment

Das TM bzgl. einer Achse , wird meist so berechnet, das man die Achse mit der x-,y- oder z-Achse identifiziert und die Koordinaten und Grenzen dann geeignet wählt. Bzgl. z-Achse lautet das Trägheitsmoment :

$$\Theta_z = \int_K dV\, \rho(x,y,z)\,(x^2+y^2) \tag{1}$$

1.3 Trägheitstensor

Der TT erhält den Buchstaben Θ.Um die Berechnung von TM bzgl. beliebiger Achsen in endlicher Zeit durchführbar zu machen, ist es sinnvoll,auf den TT zurückzugreifen,der wie folgt definiert ist :

$$\Theta = \int_K dV\, \rho(x,y,z) \begin{pmatrix} y^2+z^2 & -xy & -xz \\ -xy & x^2+z^2 & -yz \\ -xz & -yz & x^2+y^2 \end{pmatrix} \tag{2}$$

Für die Herleitung dieses Tensors und Fragen zur Begrifflichkeit verweise ich auf das Skript von Prof. Soff[1].

2 Beispiele

2.1 A simple one-der Quader

Das ist zum Anfang ein Beispiel, das gut in normalen kartesischen Koordinaten gelöst werden kann. Der Quader habe die Kantenlängen a in x-,b in y- und c in z-Richtung und liege mit seinem geometrischen Schwerpunkt im Nullpunkt des Koordinatensystems.

Außerdem habe er eine homogene Dichte,womit wir $\rho(x,y,z)$ als konstant wählen können. $\rho(x,y,z)=\rho$.Wir wollen das TM bzgl. der Rotation um die z-Achse ermitteln. Dann wird (1) zu

$$\Theta_z = \rho \int_{-a/2}^{a/2} dx \int_{-b/2}^{b/2} dy \int_{-c/2}^{c/2} dz\,(x^2+y^2)$$

Da das Problem sowohl von der Geometrie, als auch von der Massenverteilung symmetrisch ist, können wir die unteren Integralgrenzen durch 0 ersetzen und das gesamte Integral mit 8 multiplizieren.

$$\Theta_z = 8\rho \int_0^{a/2} dx \int_0^{b/2} dy \int_0^{c/2} dz\,(x^2+y^2)$$

Man sieht, daß die gesamte Geometrie des Problems in den Integralgrenzen steckt und das Problem beim Bestimmen von TMen die geeignete Wahl von Koordinatensystemen und Begrenzungen ist. Der Wert dieses Integrals ist durch sukzessive Abarbeitung der einzelnen Integrale zu ermitteln.Man beachte die Vertauschbarkeit der Integrationen, da die Grenzen nicht von den Koordinaten abhängen.

$$\Theta_z = 8\rho \int_0^{c/2} dz \int_0^{b/2} dy\, \frac{1}{3}(a/2)^3 + (a/2)y^2)$$

[1]Theoretische Mechanik,`http://physik.phy.tu-dresden.de`,und dort zum Punkt *Vorlesungsskripte* vorhangeln.

Das Ergebnis ist

$$\Theta_z = \rho \frac{abc}{12}(a^2 + b^2)$$

Nun kann man noch die Masse $M = \rho abc$ ersetzen und erhält einen handlicheren Ausdruck.

$$\Theta_z = \frac{M}{12}(a^2 + b^2)$$

Hieran sieht man,das in dem Endergebnis oft nur die Masse,Kombinationen der Quadrate charakteristischer Längen des Problems senkrecht zur Rotationsachse und ein Vorfaktor auftreten.

2.2 Die Kugel-eine runde Sache

An der Kugel kann man einfach sehen, welche Vorteile es bringt, sich ein passendes Koordinatensystem für sein Problem zu wählen.Wir werden hier in Kugelkoordinaten rechnen. Ich gebe nun das Volumenelement dV in Kugelkoordinaten an,Details zu der Herleitung solcher allgemeiner Koordinaten findet man z.B. bei Prof. Soff.

$$dV = r^2 \sin\theta \, dr \, d\phi \, d\theta \tag{3}$$

Die Kugel liege mit ihrem Mittelpunkt im Nullpunkt,habe den Radius R und homogene Masse M. In Kugelkoordinaten wird wird nun das Volumenintegral $\int_{Kugel} dV(x^2 + y^2)$ zu

$$\Theta_z = \rho \int_0^R dr \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^{\pi} d\theta \, r^2 \sin\theta \, r^2 \sin^2\theta \tag{4}$$

wenn man beachtet,das $x^2 + y^2 = r^2 \sin^2\theta$.Das erhält man einfach aus der Definition von x oder y in Kugelkoordinaten,eingesetzt in $x^2 + y^2$.Für die Berechnung dieses Integrales ist es sinnvoll,die 3. Potenz des sin als Summe von Sinus mit mehrfachem Argument zu schreiben.

$$\sin^3\theta = \frac{1}{4}(3\sin\theta - \sin 3\theta) \tag{5}$$

Da weder der Radius r noch Winkel θ von ϕ abhängen, zerfällt das 3fach-Integral in ein Produkt von 3 Integralen, wenn man 5 verwendet :

$$\Theta_z = 2\pi\rho \int_0^R dr \, r^4 \int_0^{\pi} d\theta \, \frac{1}{4}(3\sin\theta - \sin 3\theta) \tag{6}$$

Dies ist nun relativ trivial elementar auszuwerten und man erhält

$$\Theta_z = \frac{8}{15}\pi\rho R^5 \tag{7}$$

Wenn man nun wieder den bekannten Wert für die Masse einsetzt $M = \frac{4}{3}\pi\rho R^3$ erhält man das schöne Ergebnis $\Theta_z = \frac{2}{5}MR^2$. Um sich den Vorteil der Verwendung von Kugelkoordinaten genauer vor Augen zu führen, gebe ich das auszurechnende Volumenintegral in kartesischen Koordinaten an :

$$\int_{-R}^{R} dx \int_{-\sqrt{R^2-x^2}}^{\sqrt{R^2-x^2}} dy \int_{-\sqrt{R^2-x^2-y^2}}^{\sqrt{R^2-x^2-y^2}} dz \, (x^2 + y^2) \tag{8}$$

Man kann erahnen, daß die Integration nach x und y nicht mehr ganz so trivial ist wie die Integration nach θ, denn Wurzeln im Integranden zu behandeln ist meiner Erfahrung nach mindestens so angenehm wie eine Wurzelbehandlung beim Onkel Doktor.

2.3 Die Kugel-es geht auch anders

Man kann aber natürlich ein so hochgradig symmetrisches Problem wie die Kugel sehr elegant und mit einer einfacheren Integration in Kugelkoordinaten lösen. Wenn man sich vor Augen hält,das ja wohl das TM bzgl. z-Achse das selbe sein müßte wie bzgl. y- oder x-Achse,kann man folgendes ansetzen :

$$\Theta_x + \Theta_y + \Theta_z = 3\Theta = 2\int_{Kugel} dV\,(x^2 + y^2 + z^2) = 2\int_K dV\,r^2 \tag{9}$$

Das ist aber mit dem Volumenelement von oben einfacher zu lösen.da keine hohen Potenzen von $\sin\theta$ auftauchen. Das Ergebnis ist das selbe. Man muß einfach die Gleichung nach Θ umformen und ausrechnen.

2.4 Die Ellipse ist eigentlich ganz einfach

Nun ist es natürlich auch ohne weiteres möglich, das TM einer Ellipsenscheibe mit den Halbachsen a und b und der Dicke h auszurechnen. Es gibt einen einfacheren Weg als der über kartesische Koordinaten und Zylinderkoordinaten. Bei der Verwendung von Zylinderkoordinaten spielt uns die komplizierte Winkelabhängigkeit des Radius einen Streich, weswegen sich Ellipsenkoordinaten[2] anbieten.

Um einen Vergleich zu geben, hier die Lösungskizze in kartesischen Koordinaten.Wenn man den Mittelpunkt in den Koordinatennullpunkt legt, a in x-Richtung, b in y-Richtung und die Rotationsachse in z-Richtung und sich das alles mal aufmalt, wird offensichtlich das die Integration wie folgt erfolgen muß:

$$\Theta_z = \int_{-a}^{a} dx \int_{-b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}}^{b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}} dy \int_0^h dz\,(x^2 + y^2)$$

Man beachte die Ellipsengleichung $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ und wie sich die Wurzel durch simples Umstellen nach x ergibt. Nach längerer Rechnung und Einsetzen der Scheibenmasse ergibt sich

$$\Theta_z = \frac{1}{4}\rho abh(a^2 + b^2) = \frac{1}{4}M(a^2 + b^2) \tag{10}$$

Das gleiche Ergebnis ist in Ellipsenkoordinaten einfacher berechnet. Die Transformationsformeln lauten :

$$dV = ab\,r\,dr\,d\phi\,dz \qquad \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a\,r\,\cos\phi \\ b\,r\,\sin\phi \\ z \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned}
\Theta_z &= \rho\int_0^h dz \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^1 dr\,r(a^2r^2\cos^2\phi + b^2r^2\sin^2\phi) \\
&= \frac{\rho hab}{4}\int_0^{2\pi} d\phi(a^2\cos^2\phi + b^2\cos^2\phi) \\
&= \frac{\rho\pi hab}{4}(a^2 + b^2)
\end{aligned}$$

[2]Vielen Dank an Jens Smalzing von der TU München für den Tip mit Ellipsenkoordinaten

Das wollen wir im folgenden Nutzen um ein Beispiel dafür zu geben, wie man TMe komplizierter Körper manchmal einfach aus dem Zusammensetzen bekannter infinitesimaler TMe berechnen kann.

2.5 Der Ellipsenkegel

Man stelle sich einen geraden Kegel vor, der als Grundfläche eine Ellipse hat. Halbachsen A und B und Höhe H. Die Rotationsachse laufe durch die Kegelspitze, die bei (0/0) liege, und sei mit der z-Achse identisch. Der Kegel steht also sozusagen auf dem Kopf.Ich schneide nun den Kegel senkrecht zu der z-Achse in dünne Ellipsenscheiben mit der Dicke dz. Dann resultiert mit 10

$$d\Theta = \frac{\rho\pi ab}{4}(a^2 + b^2)dz$$

Man muß nun daran denken das die Parameter a und b die Vorgabe für *die jeweilige, gerade betrachtete Ellipse* darstellen, bei der Summation über diese infinitesimalen TMe aber sich die Halbachsen a und b für die jeweilige kleine Ellipse über den Strahlensatz aus dem A und B berechnen. $\frac{A}{H}z = a$ und $\frac{B}{H}z = b$. Dann muß nun nur noch über diese $d\Theta$ von $0 \dots H$ summiert werden und fertig ist der Kegel.

$$\begin{aligned} d\Theta &= \frac{\rho\pi AB}{4H^4}(A^2 + B^2)\, z^4\, dz \\ \Theta_z &= \int_0^H d\Theta = \frac{\rho\pi AB}{20}(A^2 + B^2)H \\ &= \frac{3}{20}M(A^2 + B^2) \end{aligned} \tag{11}$$

3 Der gerade Kreiskegel

Normalerweise interessiert man sich in der Anwendung immer nur für die Rotation um eine beliebige Achse und das TM das zu dieser speziellen Achse gehört. Nun gibt es eine einfache Möglichkeit aus dem TT und der Vektordarstellung der Achse das TM zu berechnen.

3.1 Trägheitsmoment bzgl. beliebiger Achsen

Man stelle seine Achse als *Einheitsvektor* $\vec{n}$ im, und das ist wichtig, selben Koordinatensystem dar wie den TT. Man hat dann $\vec{n}$ als Spaltenvektor vorliegen. Ich bezeichne mit T das TM bzgl. der geg. Achse und mit $\vec{n}^T$ den transponierten Vektor. Nun gilt:

$$T = \vec{n}^T \Theta \vec{n}. \tag{12}$$

Das ist relativ einfach zu beweisen. Wie aus dem schon erwähnten Skript zu entnehmen ist gilt für die kinetische Energie E_{kin} eines mit $\vec{\omega}$ rotierenden Körpers und der selben Bezeichnung: $E_{kin} = 1/2\vec{\omega}^T \Theta \vec{\omega}$. Mit $\vec{\omega} = \vec{n}\omega$ ist

$$E_{kin} = 1/2\vec{n}^T \omega \Theta \vec{n}\omega = 1/2\vec{n}^T \omega T \vec{n}\omega$$

und damit obige Beziehung 12 offensichtlich.

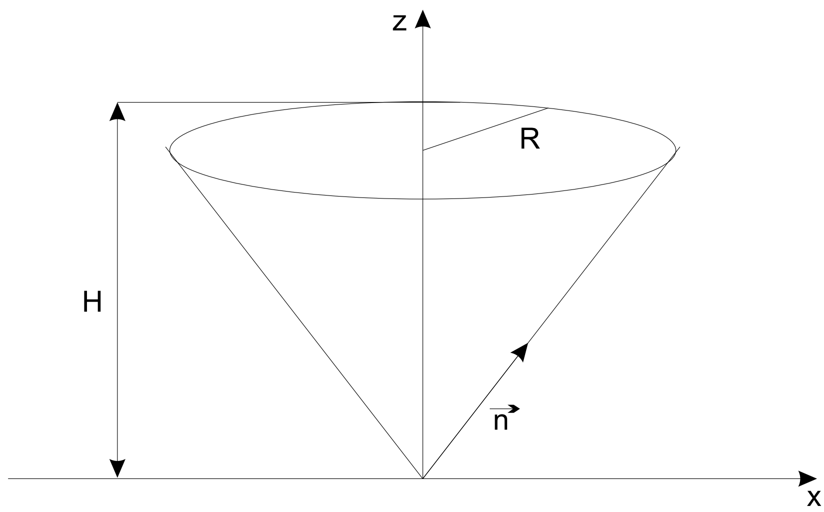

Abbildung 1: So sieht der Kegel aus

3.2 Trägheitstensor eines Kegels

Mit der Abbildung sollte klar sein, wie der Kegel räumlich orientiert ist. Nun wollen wir streng nach Vorschrift 2 den TT ausrechnen. Zuerst macht man sich am besten Gedanken über die Nebendiagonalelemente. Diese müssen verschwinden, denn alle Schnitte zeigen eine Kreissymmetrie und damit sind die Integrationen über 2π Null. Also werde ich, um die Notation zu vereinfachen den Tensor als Vektor Θ behandeln und in 2 nur über die Diagonalelemente integrieren die ich in die einzelnen Vektorzeilen schreibe und in Zylinderkoordinaten umrechne. Ausgangspunkt ist also folgende Gleichung, man beachte das Volumenelement in

Zylinderkoordinaten :

$$
\begin{aligned}
\Theta &= \int_0^H dz \int_0^{zR/H} r\,dr \int_0^{2\pi} d\phi \begin{pmatrix} r^2\sin^2\phi + z^2 \\ r^2\cos^2\phi + z^2 \\ r^2 \end{pmatrix} \\
&= \int_0^H dz \int_0^{zR/H} r\,dr \int_0^{2\pi} \left[r^2 \begin{pmatrix} \sin^2\phi \\ \cos^2\phi \\ 1 \end{pmatrix} + z^2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right] d\phi \\
&= \int_0^H dz \int_0^{zR/H} r^3\,dr \int_0^{2\pi} \begin{pmatrix} \sin^2\phi \\ \cos^2\phi \\ 1 \end{pmatrix} d\phi + \int_0^H dz\, z^2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \int_0^{zR/H} r\,dr \int_0^{2\pi} d\phi \\
&= \frac{R^4}{4H^4} \int_0^H dz\, z^4 \begin{pmatrix} \pi \\ \pi \\ 2\pi \end{pmatrix} + 2\pi \frac{R^2}{2H^2} \int_0^H dz\, z^4 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\
&= \frac{R^4 H}{20} \begin{pmatrix} \pi \\ \pi \\ 2\pi \end{pmatrix} + \frac{\pi R^2 H^5}{5H^2} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\
&= \frac{\pi R^2 H}{5} \begin{pmatrix} \frac{R^2}{4} + H^2 \\ \frac{R^2}{4} + H^2 \\ \frac{R^2}{2} \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

Mit der einfachen Erkenntnis das für die Masse $M = 1/3\pi R^2 H$ gilt, wird das Ergebnis noch etwas einfacher.

$$
\Theta = \frac{3}{20} M \begin{pmatrix} R^2 + 4H^2 \\ R^2 + 4H^2 \\ 2R^2 \end{pmatrix} \tag{13}
$$

Wenn man nun Formel 12 anwendet und bedenkt,das

$$
\vec{n} = \frac{1}{\sqrt{R^2 + H^2}} \begin{pmatrix} R \\ 0 \\ H \end{pmatrix}
$$

folgt mit etwas umformen das Ergebnis :

$$
T = \frac{3}{20} M \frac{R^4 + 6R^2 H^2}{R^2 + H^2}. \tag{14}
$$

Das ist ein einfaches Ergebnis und erfüllt alle Kriterien eines TM : es ist nur abhängig von der Masse und geometrischen Größen und hat Dimension Masse·Länge.