Der Trägheitstensor

Horst Laschinsky

06. Januar 1999

Inhaltsverzeichnis

Zusammenfassung

Der Trägheitstensor ist ein vorzügliches Mittel, wenn es darum geht, das Verhalten von rotierenden Vielteilchensystemen zu untersuchen. Er ermöglicht es, auf einfache Weise Trägheitsmomente, Trägheitsachsen, Drehimpulse u.s.w. zu berechnen.

1 Berechnung des Tensors

Sei N die Anzahl der Teilchen, m_ν die Masse des ν-ten Teilchens, r_ν der Betrag des Ortsvektors des ν-ten Teilchens und $x_{\nu,k}$ die k-te Komponente des Ortsvektors des ν-ten Teilchen. Dann lautet der Trägheitstensor des Vielteilchensystems:

$$\Theta_{ij} = \sum_{\nu=1}^{N} m_\nu (r_\nu^2 \delta_{ij} - x_{\nu,i} x_{\nu,j}) \tag{1}$$

$$\text{mit } \delta_{ij} = \begin{cases} 1 \text{ für } i = j \\ \\ 0 \text{ für } i \neq j \end{cases}$$

oder in Matrixschreibweise (mit x,y,z als Komponenten der Ortsvektoren):

$$\Theta = \sum_{\nu=1}^{N} m_\nu \begin{pmatrix} y_\nu^2 + z_\nu^2 & -x_\nu y_\nu & -x_\nu z_\nu \\ -y_\nu x_\nu & x_\nu^2 + z_\nu^2 & -y_\nu z_\nu \\ -z_\nu x_\nu & -z_\nu y_\nu & x_\nu^2 + y_\nu^2 \end{pmatrix} \tag{2}$$

Meist hat man es in der Physik aber nicht mit einzelnen Teilchen zu tun, die an bestimmten Orten sitzen, sondern mit einer kontinuierlichen Massenverteilung. In diesem Fall führt man eine Massendichte $\varrho(\vec{r})$ ein, und die Summe im Trägheitstensor geht über in ein Volumenintegral:

$$\Theta_{ij} = \int_V \varrho(\vec{r})(r^2\delta_{ij} - x_i x_j) d^3r \tag{3}$$

bzw.

$$\Theta = \int_V \varrho(\vec{r}) \begin{pmatrix} y^2+z^2 & -xy & -xz \\ -yx & x^2+z^2 & -yz \\ -zx & -zy & x^2+y^2 \end{pmatrix} d^3r \tag{4}$$

2 Hauptträgheitsmomente und -achsen

In diesem Trägheitstensor steckt nun eine ganze Menge drin. So kann man die Trägheitsmomente des Systems bezüglich den gewählten Koordinatenachsen direkt ablesen. Sie sind nämlich die Diagonalelemente des Tensors, also die Θ_{ii}'s.

Die sog. Eigenwerte des Tensors sind gleich den Hauptträgheitsmomenten, und die dazugehörigen Eigenvektoren die Hauptträgheitsachsen. Wie berechnet man nun diese Eigenwerte und -Vektoren? Machen wir dazu einen kleinen Ausflug in die lineare Algebra (ach, lang lang ist's her).

Die Eigenwerte einer Matrix A sind definiert als die Nullstellen des sog. charakteristischen Polynoms, d.h als diejenigen λ's, für die gilt

$$\det(A - \lambda E) = 0 \tag{5}$$

mit

$$E := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

Das heißt nun in der Praxis, man zieht von den Diagonalelementen der Matrix (in unserem Fall also des Tensors) jeweils ein λ ab, berechnet die Determinante der nun neu entstandenen Matrix, und sucht dann diejenigen λ's heraus, bei denen die Determinante gerade Null ist. Diese λ's sind dann die sog. Eigenwerte der Matrix.

Nun mag das Berechnen der Determinante, und erst recht die Nullstellensuche je nach Größe der Matrix in eine wüste Rechnerei ausarten. Im Falle des Trägheitstensors hat man aber Glück. Dieser stellt ja eine 3×3-Matrix dar, so daß man für die Berechnung der Determinante auf die aus der Schule bekannte Formel zurückgreifen kann, und auch das entstehende Polynom ist höchstens vom Grade 3, also mit einfachen Mitteln lösbar. Zur Erinnerung: die Determinante einer 3×3-Matrix berechnet sich nach folgendem Gesetz:

$$\begin{aligned} \det(A) = {} & a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} \\ & - a_{31}a_{22}a_{13} - a_{32}a_{23}a_{11} - a_{33}a_{21}a_{12} \end{aligned} \tag{6}$$

Wendet man nun diese Formel auf $\Theta - \lambda E$ an, und sucht dann diejenigen λ's, für die $\det(\Theta - \lambda E) = 0$ gilt (i.A. sollte es sich dabei um drei Stück handeln, von denen aber auch zwei oder gar alle drei gleich sein können), so hat man mit ihnen auch die Hauptträgheitsmomente des Systems gefunden.

So, nun hat man zwar die Hauptträgheitsmomente, aber man möchte natürlich auch wissen, für welche Achsen diese gelten, oder physikalisch ausgedrückt, was die Hauptträgheitsachsen unseres Systems sind. Auch diese Suche gestaltet sich relativ einfach, man muß nämlich nur die zu den Eigenwerten gehörenden Eigenvektoren berechnen.

Dazu setzt man die λ's in die Matrix ein, und sucht dann denjenigen Vektor $\vec{x}$, der - von rechts - an die Matrix ranmultipliziert gerade den Nullvektor ergibt. In Formeln sieht das so aus:

$$\begin{pmatrix} \Theta_{11} - \lambda & \Theta_{12} & \Theta_{13} \\ \Theta_{21} & \Theta_{22} - \lambda & \Theta_{23} \\ \Theta_{31} & \Theta_{32} & \Theta_{33} - \lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \stackrel{!}{=} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{7}$$

Oder, um das ganze ein wenig deutlicher hinzuschreiben, man versucht folgendes lineares Gleichungssystem zu lösen:

$$\begin{aligned} (\Theta_{11} - \lambda)x_1 + \Theta_{12}x_2 + \Theta_{13}x_3 = 0 \\ \Theta_{21}x_1 + (\Theta_{22} - \lambda)x_2 + \Theta_{23}x_3 = 0 \\ \Theta_{31}x_1 + \Theta_{32}x_2 + (\Theta_{33} - \lambda)x_3 = 0 \end{aligned} \tag{8}$$

wobei man für die λ's nacheinander die gefundenen Eigenwerte einsetzt. Besonders wenn ein Eigenwert mehrfach vorkommt, stellt sich die Frage nach der Eindeutigkeit der Eigenvektoren. In diesem Fall ist darauf zu achten, daß die Eigenwerte orthogonal, d.h. senkrecht aufeinander sehen müssen.

Ein Beispiel hierfür. Lautet der Trägheitstensor z.B.

$$\begin{pmatrix} 10a^2 & 0 & 0 \\ 0 & 6a^2 & -4a^2 \\ 0 & -4a^2 & 6a^2 \end{pmatrix}$$

so ist der Eigenwert $10a^2$, wie man leicht nachprüft (Übungsaufgabe!), doppelt vorhanden. Versucht man nun, die Eigenvektoren zu berechnen, so stößt man auf das Problem, daß es drei Möglichkeiten gibt, es aber nur zwei geben dürfte (da der Eigenwert nur ZWEImal, nicht DREImal vorhanden ist). Die drei Möglichkeiten sind:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ und } \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Wie man aber sofort sieht, sind nur

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ und } \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

orthogonal, also sind sie die gesuchten Eigenvektoren.

3 Trägheitsmoment bezüglich beliebiger Achsen

Der Trägheitstensor erlaubt es auch, auf einfache Weise das Trägheitsmoment bezüglich einer beliebigen Achse zu berechnen. Dazu wählt man einen Vektor $\vec{n}$ in Richtung der gewünschten Achse, und normiert diesen auf den Einheitsvektor, sprich, man teilt den Vektor durch seinen Betrag. Dann gilt für das Trägheitsmoment entlang dieser Achse:

$$T = \vec{n}^T \Theta \vec{n} \tag{9}$$

wobei $\vec{n}^T$ den transponierten Vektor, also den ZEILENvektor $(n_1 n_2 n_3)$ darstellt.

4 Drehimpuls

Auch der Drehimpuls des sich drehenden Systems kann mit Hilfe des Trägheitstensors auf relativ einfache Art und Weise berechnet werden.

$$\text{Sei } \vec{\omega} := \begin{pmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \end{pmatrix} \text{ die Winkelgeschwindigkeit,}$$

$$\text{und } \vec{L} := \begin{pmatrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{pmatrix} \text{der gesuchte Drehimpuls,}$$

So gilt folgender einfache Zusammenhang

$$\vec{L} = \Theta \vec{\omega} \tag{10}$$

5 Rotationsenergie

Zu guter Letzt kommt uns der Trägheitstensor noch zu Hilfe, wenn wir die kinetische Energie der Rotation berechnen wollen. Sei dazu $\vec{\omega}$ wieder die Winkelgeschwindigkeit, so gilt für die Rotationsenergie:

$$T_{rot} = \frac{1}{2} \vec{\omega}^T \Theta \vec{\omega} \tag{11}$$

wobei auch hier wieder $\vec{\omega}^T$ der transponierte Vektor ist, also der Zeilenvektor $(\omega_1 \omega_2 \omega_3)$.