Diskrete Symmetrietransformationen

Hendrik van Hees

29. Mai 1998

1 Das Wigner-Theorem

Ein quantenmechanisches System läßt sich folgendermaßen charakterisieren: Es existiert ein Hilbertraum $\mathscr{H}$, so daß der Zustand des Systems vollständig durch die Zuordnung eines Strahls $[|\psi\rangle]$ bestimmt ist. Befindet sich das System im Zustand $[|\psi_1\rangle]$, so ist die Wahrscheinlichkeit, es im Zustand $[|\psi_2\rangle]$ zu finden, durch

$$w_{12} = \frac{|\langle\psi_1|\psi_2\rangle|^2}{\|\psi_1\|^2\|\psi_2\|^2} \tag{1}$$

gegeben. Es ist klar, daß w_{12} eine nur von der Wahl des Strahls im projektiven Raum $[\mathscr{H}]$, nicht von der Wahl der Repräsentanten $|\psi_1\rangle$ und $|\psi_2\rangle$ abhängt.

Das (abgeschlossene) System selbst wird durch eine Strahldarstellung der Galileigruppe durch hermitesche Operatoren bestimmt. Eine Observable ist eine Funktion dieser hermiteschen Operatoren.

Der Hilbertraum kann aufgespannt werden durch simultane Eigenvektoren eines vollständigen Satzes untereinander kommutierender Observablen. Diese Eigenvektoren bilden ein vollständiges Orthonormalsystem.

Die Dynamik des Systems wird von einem das System charakterisierenden hermiteschen von unten beschränkten Operator $\hat{H}$, dem Hamiltonoperator, beschrieben, und zwar im folgenden Sinne. Es sei $\{\hat{b}_k\}$ ein Erzeugendensystem der Operatoralgebra (für nichtrelativistische Systeme durch die Liealgebra der Galileigruppe definiert) und $\hat{O} = f(\hat{b}_k, t)$ eine (eventuell explizit zeitabhängige) Observable. Dann wird die Observable, die die zeitliche Änderung von $\hat{O}$ beschreibt, durch

$$\dot{O} = \frac{1}{i}[\hat{O}, \hat{H}] + \left(\frac{\partial \hat{O}}{\partial t}\right)_{\text{expl}} \tag{2}$$

gegeben. Die Operatoren $\{\hat{b}_k\}$ sind dabei per definitionem nicht explizit zeitabhängig, und es ist zu beachten, daß der Punkt nicht die mathematische Zeitableitung des Operators $\hat{O}$ bezeichnet.

Die Zeitentwicklung der Zustände bestimmt sich aus dieser Festlegung durch die Überlegung, daß die Observable, die die Frage beantwortet, ob das System durch den Zustand $[|\psi\rangle]$ beschrieben wird, durch

$$P_{|\psi\rangle} = |\psi\rangle\langle\psi| \tag{3}$$

gegeben ist.

Dabei setzen wir, wie immer im folgenden, voraus, daß $|\psi\rangle$ auf 1 normiert ist. Da die Zuordnung des durch $[|\psi\rangle]$ gegebenen Zustandes zum System sich im Laufe der Zeit nicht ändert, gilt

$$\dot{P}_{|\psi\rangle} = 0 \tag{4}$$

Daraus folgt sofort, daß $[|\psi\rangle]$ i.a. explizit zeitabhängig ist.

Die mathematische Zeitabhängigkeit von Observablen und Zuständen ist durch zwei hermitesche Operatoren $\hat{A}, \hat{B}$ gegeben vermöge der Differentialgleichungen:

$$\frac{d\hat{O}}{dt} = \frac{1}{i}[\hat{O}, \hat{B}] + \frac{\partial \hat{O}}{\partial t} \tag{5}$$

$$i\frac{d|\psi, t\rangle}{dt} = \hat{A}|\psi, t\rangle \tag{6}$$

Die Postulate (2) und (4) ergeben dann die Bedingung

$$\hat{H} = \hat{A} + \hat{B} \tag{7}$$

Es ist klar, daß die physikalischen Aussagen nicht von der Wahl des Bildes, also der Wahl der Operatoren $\hat{A}$ und $\hat{B}$ abhängen dürfen. Es zeigt sich, daß ein Wechsel des Bildes durch eine zeitabhängige unitäre Transformation gegeben ist, so daß Matrixelemente von Operatoren und Skalarprodukte von Vektoren unter Bildtransformationen invariant sind (vgl. [Fick 79]).

Diese Betrachtungen zeigen, daß es viele äquivalente Möglichkeiten gibt, ein System quantenmechanisch zu beschreiben. Wir definieren daher eine Symmetrietransformation als eine invertierbare Abbildung des projektiven Hilbertraums in sich: $S : [\mathscr{H}] \rightarrow [\mathscr{H}]$, für die folgendes gilt:

Sei $|\psi\rangle \in \mathscr{H}$ beliebig. Dann definieren wir $|\psi'\rangle$ durch $S([|\psi\rangle]) = [|\psi'\rangle]$. Im übrigen ist $|\psi'\rangle$ willkürlich. Dann gilt stets

$$\forall [\psi_1], [\psi_2] \in [\mathscr{H}] : |\langle \psi_1' | \psi_2' \rangle| = |\langle \psi_1 | \psi_2 \rangle| \tag{8}$$

Jetzt besagt das Theorem von E. P. Wigner über Symmetrietransformationen:

Durch geeignete Wahl der Phasen von $|\psi\rangle$ und $|\psi'\rangle$ läßt sich die Abbildung S in der oben angegebenen Weise zu einer Abbildung $U_S : \mathscr{H} \rightarrow \mathscr{H}$ des Hilbertraums in sich liften. Dabei ist entweder

$$\forall \alpha, \beta \in \mathscr{H}; \mu, \lambda \in C : (\mu|\alpha\rangle + \lambda|\beta\rangle)' = \mu|\alpha'\rangle + \lambda\beta'\rangle; \; \langle\alpha|\beta\rangle = \langle\alpha'|\beta'\rangle \text{ (I)}$$

oder

$$\forall \alpha, \beta \in \mathscr{H}; \mu, \lambda \in C : (\mu|\alpha\rangle + \lambda|\beta\rangle)' = \mu^*|\alpha'\rangle + \lambda^*\beta'\rangle; \; \langle\alpha|\beta\rangle = \langle\alpha'|\beta'\rangle^* \text{ (II)}$$

Im Fall (I) ist die Abbildung U_S also unitär, im zweiten Falle antiunitär. Dabei ist ein antiunitärer Operator durch die in (II) gegebenen Eigenschaften definiert.

Wir beweisen nun das Theorem. Dazu sei die durch die Abbildung S induzierte Abbildung in $\mathscr{H}$ zunächst durch die Minimalforderung $S([|\psi\rangle]) = [\psi'\rangle]$, aber ansonsten beliebig erklärt.

Sei nun $\{|\alpha_n\rangle\}_{n \in N}$ ein VONS (Abkürzung für vollständiges Orthonormalsystem) von $\mathscr{H}$. Wir zeigen jetzt, daß man die von S geliftete Abbildung durch geeignete Phasenwahl der $|\alpha_n'\rangle$ so festlegen kann, daß auch diese Vektoren ein VONS bilden. Zunächst zeigen wir die Vollständigkeit. Sei $|\psi'\rangle$ ein zu allen Vektoren $|\alpha'_n\rangle$ orhtogonaler Vektor. Wegen der Umkehrbarkeit von S existiert dazu ein Vektor $|\psi\rangle$, so daß $S[|\psi\rangle] = [|\psi'\rangle]$. Wegen (8) ist $|\psi\rangle$ orthogonal zu allen $|\alpha_n\rangle$. Da diese Vektoren ein VONS bilden, ist $|\psi\rangle = 0$ und folglich auch $|\psi'\rangle$.

Wegen (8) ist weiter $\langle\alpha'_n|\alpha'_m\rangle = \exp(i\tau_{mn})\delta_{mn}$. Wir können nun die relativen Phasen der $|\alpha'_n\rangle$ willkürlich so wählen, daß alle τ_{mn} verschwinden. Wir gehen davon aus, daß dies der Fall ist.

Als nächstes betrachten wir die Vektoren $|\phi_n\rangle := |\alpha_1\rangle + |\alpha_n\rangle$ und die ihnen zugeordneten Vektoren $|\phi'_n\rangle$. Aus (8) folgt sofort, daß

$$\langle\alpha'_m|\phi'_n\rangle = \exp(i\tau_m)(\delta_{m1} + \delta_{mn}) \tag{9}$$

ist. Da wir weiter die Phasen der $|\alpha'_n\rangle$ so gewählt haben, daß sie ein VONS bilden, gilt damit sofort:

$$|\phi'_n\rangle = \sum_m |\alpha'_m\rangle\langle\alpha'_m|\phi'_n\rangle = \exp(i\tau_1)|\alpha'_1\rangle + \exp(i\tau_2)|\alpha'_n\rangle \tag{10}$$

Durch Umdefinition der Phasen der $|\alpha'_n\rangle$ können wir erreichen, daß

$$|\phi'_n\rangle = |\alpha'_1\rangle + |\alpha'_n\rangle \tag{11}$$

Wir zeigen nun, daß sich dadurch die Eigenschaft der $|\alpha'_n\rangle$, VONS zu sein, nicht ändert. Dazu hat man nur zu beachten, daß die Vollständigkeit und lineare Unabhängigkeit dieser Vektoren durch eine Umdefinition der Phasen nicht zerstört wird. Das gleiche gilt auch für die Projektoreigenschaft:

$$\sum_n |\alpha'_n\rangle\langle\alpha'_n| = 1 \tag{12}$$

Wendet man dies auf $|\alpha'_m\rangle$ an, folgt aus der linearen Unabhängigkeit der $|\alpha'_n\rangle$ sofort, daß $\langle\alpha'_n|\alpha'_m\rangle = \delta_{nm}$, also daß die $|\alpha'_n\rangle$ weiterhin ein VONS bilden.

Wir zeigen nun, daß wir jetzt bereits die gewünschten Phasenbeziehungen festgelegt haben. Sei dazu $|\psi\rangle$ ein beliebiger Vektor und $c_n = \langle\alpha_n|\psi\rangle$. Weiter sei o.B.d.A. $c_1 \neq 0$. Für die entsprechenden transformierten Vektoren ist wegen (12):

$$|\psi'\rangle = \sum_n c'_n|\alpha'_n\rangle \text{ mit } c'_n = \langle\alpha'_n|\psi'\rangle \tag{13}$$

Wegen (8) und (11) gilt:

$$|c_n| = |c'_n|;\ |c_1 + c_n| = |c'_1 + c'_n| \tag{14}$$

Da wir die Phase von $|\psi'\rangle$ beliebig wählen dürfen, können wir verlangen, daß

$$c_1 = c'_1 \tag{15}$$

ist. Dann folgt aus (14) durch Quadrieren:

$$c_1^* c_n + c_1 c_n^* = c_1^* c'_n + c_1 {c'_n}^* \tag{16}$$

Multiplikation dieser Gleichung mit c'_n und Lösung der entstehenden quadratischen Gleichung für c'_n ergibt unter Berücksichtigung von (14) die beiden Möglichkeiten:

$$c'_n = \begin{cases} c_n \\ \frac{c_1}{c_1^*} c_n^* \end{cases} \tag{17}$$

Wir können nun noch die Phase von $|\psi\rangle$ beliebig wählen, weil auch dies für die durch S induzierten Zuordnung von Vektoren in $\mathscr{H}$ ohne Belang ist. Wir wählen daher diese Phase so, daß c_1 reell ist. Dann haben wir:

$$c'_n = \begin{cases} c_n \text{ (I)} \\ c_n^* \text{ (II)} \end{cases} \tag{18}$$

D.h. wir können bei einem gegebenen Paar von Strahlen $[|\psi\rangle]$ und $[|\psi'\rangle] = S([|\psi\rangle])$ die Phasen der Repräsentanten so wählen, daß die oben behaupteten Beziehungen (I) oder (II) auf die Entwicklung bzgl. der Orthonormalbasen $|\alpha_n\rangle$ und $|\alpha'_n\rangle$ zutreffen.

Es ist klar, daß, wenn zwei Vektoren $|\psi\rangle$ und $|\phi\rangle$ beide zugleich dieselbe der Eigenschaften (18I) oder (18II) erfüllen, auch die Behauptungen (I) und (II) für diese beiden Vektoren erfüllt sind.

Wir müssen also nur noch zeigen, daß in dem Fall, daß (18I oder II) für einen Vektor $|\psi\rangle$ erfüllt ist, dieselbe Beziehung auch für jeden anderen Vektor $|\phi\rangle$ erfüllt sein muß.

Nehmen wir nun an, diese Annahme sei nicht erfüllt. Sei also etwa $|\psi\rangle = \sum_n c_n|\alpha_n\rangle$ ein Vektor, der (18I) und $|\phi\rangle = \sum_n d_n|\alpha_n\rangle$, der (18II) erfüllt, wobei wir annehmen, daß keiner der beiden Vektoren rein reelle Koeffizienten besitzt. Dann wäre ja auch die Gegenannahme gar nicht erfüllbar, weil ein Vektor mit rein reellen Koeffizienten stets beide Beziehungen (18) erfüllt. Es ist also $c'_n = c_n$ und $d'_n = d_n^*$. Dann folgt aber, weil die $|\alpha'_n\rangle$ ein VONS bilden:

$$|\langle\psi'|\phi'\rangle| = |\sum_n c_n^* d_n^*| \neq |\langle\psi|\phi\rangle| \tag{19}$$

Die Gleichheit des Betrages des Skalarproduktes auf der linken mit dem auf der rechten Seite dieser Ungleichung war aber per definitionem vorausgesetzt. D.h. wenn ein Vektor in $\mathscr{H}$ (18I bzw. II) erfüllt, trifft dies auch auf jeden anderen Vektor in $\mathscr{H}$ zu. Damit haben wir das Theorem von E.P. Wigner vollständig bewiesen.

Wir bemerken noch folgendes über Symmetriegruppen, die eine einfach zusammenhängende Liegruppe bilden. Jede einzelne Transformation, zu einer Abbildung des Hilbertraums $\mathscr{H}$ in sich geliftet, ist nach dem Wigner-Theorem entweder unitär oder antiunitär. Im unitären Fall bilden diese gelifteteten Transformationen eine Strahldarstellung der Gruppe, d.h. ist $U : G \rightarrow \tilde{\mathscr{U}}(\mathscr{H})$ die entsprechende Abbildung der Gruppe in die Menge der auf $\mathscr{H}$ unitären oder antiunitären Transformationen, so gilt

$$U(g_1 g_2) = \exp[i\tau(g_1, g_2)]U(g_1)U(g_2) \tag{20}$$

Sei nun $|\psi\rangle$ ein beliebiger Vektor, $c \in C\backslash R$ und $g \in G$. Da G eine einfach zusammenhängende Gruppe ist, existiert ein Weg, der das Gruppeneinselement 1_G mit g verbindet, also eine stetige Abbildung $w : [0, 1] \rightarrow G$, so daß $w(0) = 1_G$ und $w(1) = g$ ist. Die Darstellungseigenschaften von U verlangen nun, daß $U(1_G) = id_{\mathscr{H}} =: 1$ ist. Jetzt definieren wir eine Abbildung $c : [0, 1] \rightarrow C$ mit

$$U[w(t)]c|\psi\rangle = c(t)U[w(t)]|\psi\rangle \tag{21}$$

Diese ist offenbar stetig.

Wegen des Wigner-Theorems ist für alle $t \in [0, 1]$ entweder $c(t) = c$ oder $c(t) = c^*$. Da nach Voraussetzung c nicht reell sein soll, muß wegen der Stetigkeit die Funktion $c(t)$ konstant sein. Da $c(0) = c$ wegen $U[w(0)] = U(1_G) = 1$ ist, ist also $U[w(t)]$ stets unitär. D.h. Symmetrietransformationen können nur dann antiunitäre Operatoren im oben beschriebenen Sinne induzieren, wenn es sich um diskrete Symmetrietransformationen handelt. Dies ist, wie wir sehen werden, für die Zeitumkehrtransformation notwendig der Fall.

2 Raumspiegelungen

Um die diskreten Symmetrien der Raum- und Zeitspiegelungen beschreiben zu können, bemerken wir, daß ein abgeschlossenes quantenmechanisches System galileiinvariant ist. Die Galileigruppe wird als kontinuierliche Symmetriegruppe durch eine unitäre Strahldarstellung beschrieben. Die Bedingung daß diese Gruppe Symmetriegruppe des Systems ist, schränkt die Form des Hamiltonoperators weitgehend ein.

Wir beginnen mit dem einfacheren Fall der Raumspiegelung. In Raum und Zeit bewirkt sie die folgende Transformation:

$$t \to t' = t;\ \vec{x} \to \vec{x}' = -\vec{x} \tag{22}$$

Dabei haben wir o.b.d.A. den Ursprung des Koordinatensystems zum Spiegelzentrum gemacht. Der geometrische Gehalt dieser Transformation besteht darin, daß wir von einem rechtshändigen Koordinatensystem zu einem linkshändigen (oder umgekehrt) übergehen.

Eine (eigentliche) Galileitransformation ist durch die Wirkung auf die Raum-Zeit-Koordinaten definiert:

$$t \to t' = t + a;\ \vec{x} \to \vec{x}' = O\vec{x} + \vec{v}t + \vec{b} \tag{23}$$

Dabei ist $a \in R;\ \vec{v}, \vec{b} \in R^3;\ O \in SO[3]$.

Die Gruppenmultiplikation läßt sich durch Hintereinanderanwendung zweier solcher Wirkungen berechnen. Es ergibt sich, daß die Galileigruppe ein semidirektes Produkt aus Raum- und Zeittranslationen, Drehungen und Boosts ist. Die entsprechende Symmetriegruppe in der Quantenmechanik ist die Überlagerungsgruppe, in der die Drehgruppe $SO[3]$ durch ihre Überlagerung $SU[2]$ ersetzt ist. Diese quantentheoretische Galileigruppe ist einfach zusammenhängend und wird somit durch eine unitäre Strahldarstellung repräsentiert. Ein bekanntes Resultat von Wigner zeigt, daß es sich notwendig um eine Strahldarstellung handelt. Die unitären Darstellungen der Galileigruppe lassen sich zwar mit Hilfe der Forbeniusschen Methode der kleinen Gruppe gewinnen, erlauben aber alle keine Interpretation im Sinne der Quantentheorie ([Wigner 56]). Für die Frage nach dem Übergang von der Poincarégruppe zur Galileigruppe (Lichtgeschwingkeit $c \to \infty$) siehe [Weinberg 95].

Die Hintereinanderausführung einer Drehung und einer Raumspiegelung zeigt, daß diese beiden Operationen miteinander vertauschen. Der Hilbertraum eines abgeschlossenen Systems läßt sich als orthogonale Summe von irreduziblen Darstellungsräumen der Drehungen aufspannen. D.h. man kann als VONS Gesamtdrehimpulseigenvektoren wählen. Nach dem Schurschen Lemma ist in diesen Unterräumen der Operator der Raumspiegelung (im folgenden Paritätsoperator genannt) proportional zur Identität. Wir bezeichnen den Paritätsoperator im folgenden mit $\hat{\Pi}$. Wegen $\hat{\Pi}^2 = 1$ ist also bei geeigneter Phasenwahl:

$$\hat{\Pi}\Big|_{\mathscr{H}_j} = \pm 1 \tag{24}$$

Dabei ist $\mathscr{H}_j$ der bzgl. der Darstellung der Drehgruppe irrduzible Teilraum, der durch die Drehimpulsbetragsquantenzahl j eindeutig charakterisiert ist. Dabei durchläuft j für ein System mit Spinquantenzahl s die Werte $s, s+1, \ldots$.

D.h. aber, daß $\hat{\Pi}$ in allen Unterräumen zu gegebenem j unitär operiert. Da $\mathscr{H}$ orthogonale Summe dieser Unterräume ist, ist dies in ganz $\mathscr{H}$ der Fall. $\hat{\Pi}$ ist also unitär.

Es bleibt zu zeigen, daß dies konsistent mit der Heisenbergalgebra ist. Eine Hintereinanderausführung von Translation oder Galileiboost und Raumspiegelung zeigt, daß $\hat{\Pi}$ mit allen Orts- und Impulsoperatoren antikommutiert, d.h. diese Operatoren sind polare Vektoroperatoren, wie es das Wigner-Eckart-Theorem verlangt. Außerdem ist dieses Verhalten mit der Heisenbergschen Kommutatoralgebra von Orts- und Impulsoperatoren verträglich. Entsprechendes gilt von den Drehimpulsoperatoren, die (wie oben bereits ausführlich verwendet) mit $\hat{\Pi}$ kommutieren: Der Drehimpulsoperator ist ein Axialvektoroperator, und dieses Transformationsverhalten ist mit der Drehimpulsliealgebra verträglich.

Eine Hintereinanderausführung von Zeittranslationen, erzeugt vom Hamiltonoperator des Systems, und einer Raumspiegelung zeigt, daß

$$[\hat{H}, \hat{\Pi}] = 0 \tag{25}$$

D.h. der Paritäsoperator kann simultan mit dem Hamiltonoperator diagonalisiert werden, und die Parität ist eine Erhaltungsgröße.

Es bleibt zu bemerken, daß die Raumspiegelsymmetrie in der Natur nur näherungsweise realisiert ist. Die schwache Wechselwirkung verletzt bekanntermaßen diese Symmetrie.

3 Zeitumkehr

Die Operation der Zeitumkehr auf klassischem Level ist wie folgt zu verstehen: Ein System werde durch die Hamiltonschen kanonischen Gleichungen beschrieben. Der Hamiltonoperator ist Erzeugender der Bewegung, d.h. derjenigen kanonischen Transformation, die die Zeitentwicklung beschreibt. Das System starte zur Zeit $t = 0$ mit bestimmten Anfangsbedingungen (Q_0, P_0). Dabei bezeichnet (Q, P) die kartesischen Koordinaten der Punktteilchen und deren generalisierte Impulse. Nach einer gewissen Zeit $t > 0$ wird das System durch einen bestimmten Punkt $(Q(t), P(t))$ im Phasenraum beschrieben. Dabei bezeichnet (Q, P) die kartesischen Koordinaten der Punktteilchen und deren generalisierte Impulse. Jetzt denken wir uns zur Zeit $t = 0$ das System mit den Anfangsbedingungen $Q(t), -P(t)$ (bewegungsumgekehrte Anfangsbedingungen) gestartet. Es ist invariant gegenüber Zeitumkehr, wenn das System zur Zeit t den Anfangszustand (Q_0, P_0) erreicht.

All dies läßt sich formal so ausdrücken, daß beim Übergang $t \to t' = -t$ eine Trajektorie im Phasenraum durchlaufen wird, die bei entsprechender Wahl der bewegungsumgekehrten Anfangsbedingungen auch durch die hamiltonsche Zeitentwicklung beschrieben würde.

Anschaulich bedeutet das, daß ein rückwärts laufender Film eines physikalischen Prozesses, der durch die Hamiltonsche Mechanik beschrieben wird, einen physikalisch möglichen Vorgang beschreibt, der abläuft, wenn man das System im bewegungsumgekehrten Anfangszustand loslaufen läßt.

Diese Betrachtungen zeigen, daß die Zeitumkehroperation sich im Sinne einer Umkehr der Bewegung physikalisch realisieren läßt. Es ist klar, daß diese Realisierungsmöglichkeit für makroskopische Systeme nur rein prinzipiell möglich ist. Praktisch kann man niemals die Impulse von 10^{24} Teilchen umkehren, also die zeitumgekehrten Anfangsbedingungen realisieren.

Bei der Bestimmung der Eigenschaften des Zeitumkehroperators in der Quantenmechanik $\hat{\Theta}$ gehen wir davon aus, daß wir die Phasen geeignet gewählt haben, so daß $\hat{\Theta}^2 = 1$ ist.

Ein Blick auf (23) zeigt, daß $i\hat{p}$ mit $\hat{\Theta}$ kommutiert, $i\hat{x}$ hingegen antikommutiert. Für die Heisenbergsche Orts- Impulsalgebra bedeutet dies:

$$i\hat{\Theta}[\hat{x}, \hat{p}]\hat{\Theta} = -i[\hat{x}, \hat{p}] \tag{26}$$

Damit die Heisenbergalgebra auch für die zeitumgekehrten Operatoren gilt, muß also $\hat{\Theta}$ antiunitär sein. D.h. wie die klassischen Mechanik es nahelegt, ist der Ortsoperator gerade, der Impulsoperator ungerade unter Zeit-Spiegelungen.

Weiter berechnet man mit Hilfe von (23), daß die Zeitspiegelung mit der Rotation vertauscht, also die Drehimpulsoperatoren mit $\hat{\Theta}$ antikommutieren, d.h. der Drehimpuls ist ungerade unter Zeitspiegelungen. Dies ist konsistent mit der Definition der Bahndrehimpulsoperatoren $\hat{L}_j = \epsilon_{jkl}\hat{x}^k\hat{p}^l$ und mit der Liealgebra der Drehgruppe.

Jetzt wenden wir uns der Betrachtung des Hamiltonoperators zu. Hier ist es bequem, das Schrödingerbild zu wählen. Es ist klar, daß dies keine Beschränkung der Allgemeinheit bedeutet, weil alle Bilder der Quantenmechanik unitär äquivalent sind. Im Schrödingerbild wird die Zeitentwicklung des Zustandsvektors vom Hamiltonoperator erzeugt, und die Zustände sind zeitunabhängig (es sei denn es liegt eine explizite Zeitabhängigkeit vor).

D.h. eine infinitesimale Zeitentwicklung ist durch

$$|\psi; \delta t\rangle = (1 - i\hat{H}\delta t)|\psi; 0\rangle \tag{27}$$

gegeben, und die Forderung, daß die Zeitumkehr eine Symmetrietransformation ist, verlangt, daß

$$\hat{\Theta}|\psi; -\delta t\rangle = \hat{\Theta}[1 - i\hat{H}(-\delta t)]|\psi; 0\rangle = (1 - i\hat{H}\delta t)\hat{\Theta}|\psi; 0\rangle \tag{28}$$

Da der Anfangszustand $|\psi; 0\rangle$ beliebig in $\mathscr{H}$ gewählt werden kann, folgt daraus unter Beachtung der Antiunitarität des Zeitumkehroperators, daß

$$[\hat{\Theta}, \hat{H}] = 0 \tag{29}$$

wie es für eine Symmetrietransformation sein muß. Hieran läßt sich auch noch die Konsistenz der Wahl des Zeitumkehroperators als antiunitär nachweisen: Das Energie-Spektrum der zeitumgekehrten Zustände ändert sich nicht, und folglich bleibt der Hamiltonoperator unter Zeitumkehr beschränkt.

4 Ausblick

Diese Betrachtungen der diskreten Raum-Zeit-Transformationen in der nichtrelativistischen Quantenmechanik läßt sich sinngemäß auf die relativistische Quantenfeldtheorie übertragen. Dort existieren allerdings mehrere inäquivalente Realisierungen der entsprechenden uneigentlichen Poincarégruppe (vgl. [Landau-Lifschitz IV]).

5 Literatur

[Fick 79] Eugen Fick, Einführung in die Grundlagen der Quantentheorie, Akademische Verlagsgesellschaft Wiesbaden, 1979

[Wigner 52] E. P. Wigner, Inönü, Representations of the Galilei Group, Il Nuovo Cimento 9, 705-718 (1952)

[Landau-Lifschitz IV] L. D. Landau, E. M. Lifschitz, Lehrbuch der Theoretischen Physik Bd. IV, Quantenelektrodynamik, Akademie-Verlag Berlin 1986

[Weinberg 95] S. Weinberg, The Quantum Theory of Fields Vol. I, Cambridge University Press 1995

Der Beweis des Satzes von Wigner folgt weitgehend dem Vorgehen in

Gottfried, Quantum Mechanics Volume I: Fundamentals, The Benjamin / Cummings Publishing Company 1966