H. van Hees **Wintersemester 2018/2019**

Übungen zur Theoretischen Physik 1 für das Lehramt L3 – Blatt 13

Aufgabe 1: Bewegung im $1/r^2$-Potential, Skaleninvarianz

Wir betrachten die Bewegung eines Teilchens im Zentralpotential $V(\vec{x}) = K/r^2$ mit $K = \text{const}$ und $r = |\vec{x}|$.

Unter Verwendung von kartesischen Koordinaten $\vec{x}$ lautet die Lagrange-Funktion also

$$L(\vec{x}, \dot{\vec{x}}) = T_{\text{kin}} - V = \frac{m}{2}\dot{\vec{x}}^2 - \frac{K}{r^2}. \tag{1}$$

(a) In der Vorlesung haben wir ausführlich das Noether-Theorem auf die Symmetrien der Galilei-Newton-Raumzeit angewandt und dabei für ein *abgeschlossenes* System die zehn Erhaltungssätze für Energie, Impuls, Drehimpuls und Schwerpunktsbewegung gefunden. Da wir hier die Bewegung in einem Zentralpotential betrachten, gelten nun nicht mehr alle Erhaltungssätze. Diskutieren Sie, welche Raum-Zeit-Symmetrien für dieses Problem noch gelten und schließen Sie auf die dazugehörigen Erhaltungsgrößen.

(b) Leiten Sie die Bewegungsgleichungen her und verifizieren Sie die Erhaltung der gefundenen Erhaltungsgrößen.

(c) Außer den verbliebenen Raum-Zeit-Symmetrien weißt das Problem noch eine Symmetrie unter der Transformation

$$t' = \lambda^2 t, \quad \vec{x}' = \lambda \vec{x}, \tag{2}$$

auf. Zeigen Sie, dass dies wirkliche eine Symmetrietransformation ist, indem Sie die Symmetriebedingung (3.5.4) im Skript auswerten und bestimmen Sie $\Omega(\vec{x}, t)$.

(d) Betrachten Sie nun eine *infinitesimale* Transformation, indem Sie $\lambda = 1 + \epsilon$ mit $|\epsilon| \ll 1$ setzen und die Symmetrietransformation bis zur 1. Ordnung in ϵ entwickeln. Lesen Sie die Funktionen $\vec{Q} = \vec{Q}(t, \vec{x}, \dot{\vec{x}})$ und $T = T(t, \vec{x}, \dot{\vec{x}})$ ab und finden Sie die zu der Symmetrie gehörige Erhaltungsgröße.

(e) Verifizieren Sie den entsprechenden Erhaltungssatz mit den Bewegungsgleichungen.