H. van Hees Sommersemester 2018

Übungen zur Theoretischen Physik 2 für das Lehramt L3 – Blatt 2

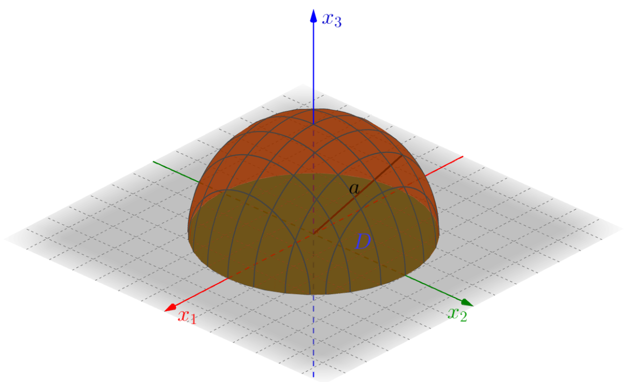
Aufgabe 1: Volumen einer Halbkugel auf drei Rechenwegen

Um zu demonstrieren, wieviel Rechenarbeit man sich durch die geeignete Wahl von Koordinaten sparen kann, berechnen wir das Volumen einer Halbkugel auf drei verschiedene Arten. In allen Teilaufgaben hilft es natürlich, sich immer die Geometrie in einfachen Skizzen zu vergegenwärtigen!

(a) Für eine Halbkugel mit Radius a und Mittelpunkt im Ursprung eines kartesischen Koordinatensystems gilt (*warum?*) die Gleichung

$$x_3 = g(x_1, x_2) = \sqrt{a^2 - x_1^2 - x_2^2}. \tag{1}$$

Finden Sie den Definitionsbereich D dieser Funktion in der $x_1 x_2$-Ebene!



(b) Parametrisieren Sie diesen Definitionsbereich in kartesischen Koordinaten und berechnen Sie das Volumen aus dem entsprechenden Flächenintegral

$$V = \int_D \mathrm{d}^2 r\, g(\vec{r}), \tag{2}$$

wobei $\vec{r}$ der Vektor in der Ebene mit Komponenten (x_1, x_2) ist.

Hinweis: Hierbei ist das Integral

$$\int_{-b}^{b} \mathrm{d}x \sqrt{b^2 - x^2} = \frac{\pi}{2} b^2 \tag{3}$$

nützlich. Es folgt daraus, dass das Integral die Fläche unter einem Halbkreis $y = \sqrt{b^2 - x^2}$ ergibt (*warum?*).

(c) Berechnen Sie das Volumenintegral nochmals mittels (2), verwenden aber diesmal ebene Polarkoordinaten

$$x_1 = R\cos\varphi, \quad x_2 = R\sin\varphi, \quad R \geq 0, \quad \varphi \in (0, 2\pi). \tag{4}$$

Bestimmen Sie dazu zunächst den Bereich, den die Polarkoordinaten (R, φ) durchlaufen, um D zu parametrisieren und zeigen Sie dann, dass das durch die entsprechenden Koordinatenlinien definierte Flächenelement durch

$$\mathrm{d}^2 r = \mathrm{d}R\, \mathrm{d}\varphi\, R \tag{5}$$

gegeben ist. Verwenden Sie diese Vorüberlegungen, um wieder (2) auszuwerten.

(d) Berechnen Sie schließlich das Halbkugelvolumen in räumlichen Kugelkoordinaten

$$x_1 = r\cos\varphi\sin\vartheta, \quad x_2 = r\sin\varphi\sin\vartheta, \quad x_3 = r\cos\vartheta \tag{6}$$

mittels des Volumenintegrals

$$V = \int_K \mathrm{d}^3 r, \tag{7}$$

wobei K die Halbkugel sei. Bestimmen Sie dazu zunächst den Integrationsbereich in Kugelkoordinaten (r,ϑ,φ), die K parametrisieren.

Hinweis: Aus der Vorlesung ist bekannt, dass die von den Koordinaten aufgespannte Volumenelemente durch

$$\mathrm{d}^3 r = \mathrm{d}r\,\mathrm{d}\vartheta\,\mathrm{d}\varphi\, r^2\sin\vartheta \tag{8}$$

gegeben sind.

Aufgabe 2: Coulomb-Feld einer Punktladung aus Gaußschem Gesetz

Es befinde sich im Koordinatenursprung eines Koordinatensystems eine ruhende Punktladung q. Gesucht ist das elektrostatische Feld mittels des Gaußschen Gesetzes

$$\int_{\partial V} \mathrm{d}^2\vec{f}\cdot\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{\epsilon_0} Q_V, \tag{9}$$

wobei V ein beliebiges Volumen mit Rand ∂V bezeichnet; Q_V ist die im Volumen befindliche Ladung und ϵ_0 die elektrische Feldkonstante.

(a) Argumentieren Sie über die Kugelsymmetrie des Problems, dass das elektrische Feld die Form

$$\vec{E}(\vec{r}) = E(r)\vec{e}_r \tag{10}$$

besitzen muss.

(b) Zeigen Sie nun, dass man $E(r)$ finden kann, indem man das Gaußsche Gesetz (9) für eine Kugel mit Radius a um den Ursprung als Volumen (bzw. die entsprechende Kugelschale als deren Rand) anwendet.

(c) Wenden Sie die analoge Überlegung für den Fall einer homogen geladenen Kugel mit Radius a an, d.h. für die Ladungsdichte

$$\rho(\vec{r}) = \begin{cases} \rho_0 & \text{für} \quad |\vec{r}| = r \leq a, \\ 0 & \text{für} \quad r > a. \end{cases} \tag{11}$$

Dabei sei die Gesamtladung Q, also $\rho_0 = Q/V = 3Q/(4\pi a^3)$. Was ergibt sich insbesondere für $\vec{E}(\vec{r})$ für $|\vec{r}| > a$?

(d) Wenden Sie die analoge Überlegung für den Fall einer homogen mit einer Flächenladung

$$\Sigma_0 = \frac{Q}{4\pi a^2} \tag{12}$$

belegten Kugelschale mit Radius a an.
