

Übungen zur Theoretischen Physik 1 – Blatt 1 (29.10.-02.11.2012)

Präsenzübungen

(P1) Skalarprodukt

Welche Relationszeichen gehören statt des Fragezeichens in die folgenden Ausdrücke? Begründen Sie Ihre Wahl mathematisch.

- (a) $\vec{a} \cdot \vec{b} \ ? \ \vec{b} \cdot \vec{a}$
 - (b) $k(\vec{a} \cdot \vec{b}) \ ? \ (k\vec{a}) \cdot \vec{b}$
 - (c) $\vec{a} \cdot (\vec{b} \cdot \vec{c}) \ ? \ (\vec{a} \cdot \vec{b}) \cdot \vec{c}$
 - (d) $\vec{a} \cdot (\vec{b} + \vec{c}) \ ? \ \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{a} \cdot \vec{c}$
-

(P2) Vektoralgebra in der Ebene

Gegeben seien die drei Vektoren \vec{a} , \vec{b} und \vec{c} in der x - y -Ebene bzgl. einer kartesischen Basis: $\vec{a} = (1, 2)^t$, $\vec{b} = (3, 0)^t$, $\vec{c} = (-1, 1)^t$.

- (a) Zeichnen Sie die drei Vektoren in ein Koordinatensystem.
 - (b) Bestimmen Sie den Betrag der drei Vektoren.
 - (c) Berechnen und zeichnen Sie die Vektoren $(-\vec{a})$, $\vec{a} + \vec{b}$, $\vec{a} - \vec{b}$ und $2\vec{a} - \vec{b}$.
 - (d) Wie lautet der Einheitsvektor \vec{e}_c in Richtung des Vektors \vec{c} ?
 - (e) Bestimmen Sie jeweils die Projektion der Vektoren \vec{a} , \vec{b} und $\vec{a} + \vec{b}$ auf den Einheitsvektor \vec{e}_c .
 - (f) Bestimmen Sie die reellen Zahlen α und β derart, daß $\alpha\vec{a} + \beta\vec{b} = \vec{c}$.
-

(P3) Winkel im Skalarprodukt

- (a) Was bedeutet $2(\vec{a} \cdot \vec{b}) = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}|$ für den Winkel zwischen den beiden Vektoren?
 - (b) Beweisen Sie mit Hilfe des Skalarprodukts den Cosinus-Satz der ebenen Geometrie, nach dem in einem Dreieck mit den Seitenlängen a , b und c gilt: $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma$, wobei γ den Gegenwinkel der Seite c bezeichnet.
 - (c) Warum gilt für den Betrag des Skalarprodukts die Schwarzsche Ungleichung: $|(\vec{a} \cdot \vec{b})| \leq |\vec{a}| \cdot |\vec{b}|$.
-

(P4) Drehungen in der Ebene

Im folgenden bilden \vec{e}_1 und \vec{e}_2 das übliche kartesische Koordinatensystem in der Ebene.

- Zeichnen Sie einen beliebigen Vektor $\vec{x} = x_1\vec{e}_1 + x_2\vec{e}_2$ und den um den Winkel α entgegen dem Uhrzeigersinn gedrehten Vektor $\vec{x}' = x'_1\vec{e}_1 + x'_2\vec{e}_2$ ein.
- Stellen Sie \vec{x} und \vec{x}' in Polarkoordinaten dar.
- Bestimmen Sie mit Hilfe der Additionstheoreme für Cosinus und Sinus die kartesischen Koordinaten von \vec{x}' als Funktion der kartesischen Koordinaten von \vec{x} .
- Wie lautet die Matrix dieser Rotationsabbildung: $\vec{x}' = \hat{D}(\alpha)\vec{x}$?
- Berechnen Sie die Matrix für die Hintereinanderausführung zweier Drehungen $\hat{D}(\beta)\hat{D}(\alpha)$ und zeigen Sie, daß es sich wieder um eine Drehung handelt (um welchen Winkel?).
- Bestimmen Sie die Umkehrmatrix $\hat{D}^{-1}(\alpha)$.

Hausübungen (Abgabe: 09.11.2012)

(H1) Vektorkomponenten in kartesischen Basen (4 Punkte)

Seien \vec{e}_1, \vec{e}_2 und \vec{e}_3 orthogonale normierte Einheitsvektoren in x, y, z -Richtung (also eine kartesische Basis).

- Zeigen Sie, daß für die Komponenten des allgemeinen Vektors \vec{x} bzgl. dieser kartesischen Basis gilt

$$x_i = \vec{e}_i \cdot \vec{x} \Rightarrow \vec{x} = \sum_{i=1}^3 x_i \vec{e}_i = \sum_{i=1}^3 \vec{e}_i (\vec{e}_i \cdot \vec{x}) \quad (1)$$

- Interpretieren Sie Gl. (1) anhand einer Skizze geometrisch.

(H2) Orthogonalisierung (6 Punkte)

Seien \vec{e}_1, \vec{e}_2 und \vec{e}_3 orthogonale normierte Einheitsvektoren in x, y, z -Richtung.

- Bestimmen Sie a und b so, dass die neuen Einheitsvektoren

$$\vec{e}'_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}(\vec{e}_1 + \vec{e}_2 + \vec{e}_3) \quad \text{und} \quad \vec{e}'_2 = a\vec{e}_1 + a\vec{e}_2 + b\vec{e}_3$$

orthogonal zueinander sind.

- Bestimmen Sie den dritten Einheitsvektor \vec{e}'_3 so, daß \vec{e}'_1, \vec{e}'_2 und \vec{e}'_3 orthogonal zueinander sind.
- Wie lautet die Matrix \hat{M} für den Basiswechsel, für die definitionsgemäß

$$\begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ x'_3 \end{pmatrix} = \hat{M} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

gilt?
