

## Übungen zur Theoretischen Physik 1 – Blatt 10 (21.01.-25.01.2013)

### Präsenzübungen

#### (P25) Bewegung im allgemeinen Zentralkraftfeld

Wir betrachten allgemein die Bewegung eines Teilchens im Zentralkraftfeld, wobei die Kraft

$$\vec{F}(\vec{x}) = -\vec{\nabla}V(r), \quad r = |\vec{x}|$$

gegeben ist.

- (a) Zeigen Sie, daß

$$\vec{F}(\vec{x}) = -\vec{e}_r \frac{dV}{dr} = F_r \vec{e}_r, \quad \vec{e}_r = \frac{\vec{x}}{r}$$

gilt.

- (b) Zeigen Sie, daß aus der Newtonschen Bewegungsgleichung die Erhaltung der Gesamtenergie des Teilchens

$$E = T + V = \frac{m}{2} \dot{\vec{x}}^2 + V(r)$$

und des Gesamtdrehimpulses

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p} = m \vec{x} \times \dot{\vec{x}}$$

folgen.

- (c) Was bedeutet die Drehimpulserhaltung geometrisch? Diskutieren Sie dazu zuerst die geometrische Bedeutung der Erhaltung der Richtung  $\hat{L} = \vec{L}/|\vec{L}| = \text{const}$  für die Bahn des Teilchens. Im folgenden nehmen wir an, daß das Koordinatensystem so gewählt ist, daß  $\hat{L} = \vec{e}_z$  und  $z(t=0) = 0$  ist. Zeigen Sie, daß dann stets  $z(t) = 0 = \text{const}$  gilt.

- (d) Drücken Sie  $|\vec{L}|$  durch die Polarkoordinaten  $(r, \varphi)$  und deren Zeitableitungen  $\dot{r}$  und  $\dot{\varphi}$  aus, wobei die Polarkoordinaten durch

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} r \cos \varphi \\ r \sin \varphi \\ 0 \end{pmatrix}$$

definiert sind.

- (e) Bestimmen Sie unter Verwendung von Energie- und Drehimpulserhaltung Bewegungsgleichungen für  $r$  und  $\varphi$ . Zeigen Sie dabei, daß die Bewegung für  $r$  durch eine eindimensionale Bewegung eines Teilchens in einem „effektiven Potential“ (welchem?) beschrieben wird.

- (f) Geben Sie ein Kriterium an, daß für vorgegebene Energie  $E$  und Drehimpuls  $L = |\vec{L}|$  eine Kreisbahn  $r = R = \text{const}$  als Lösung existiert.

- (g) Diskutieren Sie, ob diese Kreisbahn stabil gegen kleine Störungen ist. Setzen Sie dazu  $r = R + \eta$  und entwickeln Sie die Bewegungsgleichung für  $r$  bis zur linearen Ordnung nach  $\eta$  und diskutieren Sie die entstehende näherungsweise Bewegungsgleichung für  $\eta$ .

- (h) Für welche  $n$  sind bei Zentralkräften der Form  $F_r(r) = -\alpha/r^n$  mit  $\alpha > 0$  (attraktive Kraft) die Kreisbahnen stabil? Wie verhält es sich demnach bei der Planetenbewegung?

bitte wenden!

### (P26) Zwillingparadoxon

Im folgenden betrachten wir das Ruhssystem der Erde als Inertialsystem. Wir betrachten zwei gleichaltrige Zwillinge, von denen einer mutig ist und ein Karussell besteigt, das mit einer Geschwindigkeit  $v = R\omega = \text{const}$  (d.h. die anfängliche Winkelbeschleunigung nach dem Einsteigen möge vernachlässigt werden) nahe der Lichtgeschwindigkeit  $c$  fährt, während der andere ängstliche Zwilling am Rand stehen bleibt. Wieviel Zeit vergeht für den Zwilling im Karussell im Vergleich zu dem Zwilling auf der Erde? Um wieviel ist der ängstliche Zwilling älter geworden, wenn sich beide nach 20 Umläufen des mutigen Zwilling wieder treffen (die Bremsphase des Karussells möge wieder vernachlässigt werden). Dabei gehen wir von der unrealistischen Annahme aus, der mutige Zwilling überstehe seine Karussellfahrt unbeschadet ;-). Liegt hier wirklich ein Paradoxon vor?

---

## Hausübungen (Abgabe: 01.02.2013)

### (H23) Stab und Relativitätstheorie (4 Punkte)

Ein Stab der Länge 5 m ruht in einem Inertialsystem S im Winkel  $30^\circ$  relativ zur z-Achse. Wie groß sind die Länge und der Orientierungswinkel dieses Stabes in einem Inertialsystem  $S'$ , das sich mit der Geschwindigkeit  $c/2$  entlang der z-Achse bewegt? Dabei bezeichnet  $c$  die Lichtgeschwindigkeit im Vakuum.

---

### (H24) Kann Cäsars Ermordung heute noch „retrokausal“ verhindert werden? (6 Punkte)

Julius Cäsar wurde im Jahre 44 v. C. ermordet. Dieses tragische Ereignis fand also vor etwa 2000 Jahren auf der Erde statt. Sei Cäsars Tod das Ereignis  $x_C = 0, t_C = 0$  im Ruhssystem der Erde und bezeichne  $x_A = 0, t_A = 2000 \text{ y}$  (y steht als Zeiteinheit für Jahre) unseren heutigen Raumzeitpunkt im Bezugssystem der Erde (Ereignis A). Simultan zum Ereignis A im Bezugssystem der Erde kreuze das Raumschiff Enterprise 2 Millionen Lichtjahre von uns entfernt im Andromeda-Nebel und schießt ein Warnsignal in Richtung Erde (Ereignis B).

Wie lauten die Raumzeitkoordinaten des Ereignisses B im Bezugssystem der Erde? Die Enterprise bewege sich relativ zur Erde in x-Richtung mit einer Geschwindigkeit  $v$ . Nehmen Sie an, daß das Ereignis von Cäsars Tod die Raum-Zeit-Koordinaten  $x'_C = 0$  und  $t'_C = 0$  im Ruhssystem der Enterprise besitzt. Wie schnell muß die Enterprise fliegen, damit das Ereignis B in ihrem Bezugssystem simultan zu Cäsars Ermordung stattfindet? Bewegt sie sich von der Erde weg oder auf sie zu? Wie lauten dann die Raum-Zeit-Koordinaten des Ereignisses B im Bezugssystem der Enterprise? Kann das Warnsignal Cäsar warnen und so den Verlauf der Geschichte entscheidend beeinflussen? Kann dies überhaupt durch irgendeine (im Rahmen der Speziellen Relativitätstheorie physikalisch mögliche) Bewegung der Enterprise erreicht werden? Begründen Sie Ihre Antwort.