Prof. C. Greiner, Dr. H. van Hees — Wintersemester 2012/2013

Übungen zur Theoretischen Physik 1 – Lösungen zu Blatt 1

Hausübungen (Abgabe: 09.11.2012)

(H1) Vektorkomponenten in kartesischen Basen (4 Punkte)

Seien $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$ und $\vec{e}_3$ orthogonale normierte Einheitsvektoren in x, y, z-Richtung (also eine kartesische Basis).

(a) Es ist $\vec{x} = \sum_j x_j \vec{e}_j$. Daraus folgt

$$\vec{x} \cdot \vec{e}_i = \sum_j x_j \vec{e}_j \cdot \vec{e}_i. \tag{1}$$

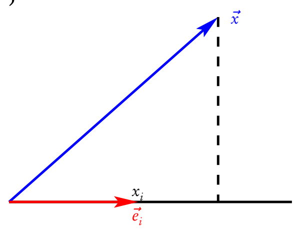
Da die Vektoren orthogonal aufeinander stehen und normiert sind (man sagt auch, sie bilden ein Orthonormalsystem), gilt

$$\vec{e}_i \cdot \vec{e}_j = \delta_{ij} := \begin{cases} 1 & \text{falls} \quad i = j, \\ 0 & \text{falls} \quad i \neq j. \end{cases} \tag{2}$$

Dies in (1) eingesetzt liefert

$$\vec{e}_i \cdot \vec{x} = \sum_j x_j \delta_{ij} = x_i. \tag{3}$$

(b) $\vec{e}_i \cdot \vec{x}$ ist gerade die Länge der Projektion des Vektors $\vec{x}$ in die durch $\vec{e}_i$ gegebene Richtung:



(H2) Orthogonalisierung (6 Punkte)

Seien $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$ und $\vec{e}_3$ orthogonale normierte Einheitsvektoren in x, y, z-Richtung.

(a) Bestimmen Sie a und b so, dass die neuen Einheitsvektoren

$$\vec{e}'_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}(\vec{e}_1 + \vec{e}_2 + \vec{e}_3) \quad \text{und} \quad \vec{e}'_2 = a\vec{e}_1 + a\vec{e}_2 + b\vec{e}_3$$

orthogonal zueinander sind. Zunächst ergibt ein Ausmultiplizieren des Skalarprodukts

$$\vec{e}'_1 \cdot \vec{e}'_2 = \frac{1}{\sqrt{3}}(2a + b) \stackrel{!}{=} 0, \tag{4}$$

denn die beiden Vektoren sollen orthogonal aufeinander stehen, und das ist genau dann der Fall, wenn ihr Skalarprodukt verschwindet. Daraus folgt sofort

$$b = -2a. \tag{5}$$

Weiter soll $|\vec{e}'_2| = 1$ gelten, d.h.

$$|\vec{e}'_2|^2 = \vec{e}'_2 \cdot \vec{e}'_2 = 2a^2 + b^2 = 2a^2 + 4a^2 = 6a^2 \overset{!}{=} 1 \Rightarrow a = \pm\frac{1}{\sqrt{6}}, \quad b = \mp\frac{2}{\sqrt{6}}. \tag{6}$$

Wir wählen im folgenden die Lösung mit dem oberen Vorzeichen, also

$$\vec{e}'_2 = \frac{1}{\sqrt{6}}(\vec{e}_1 + \vec{e}_2) - \frac{2}{\sqrt{6}}\vec{e}_3 = \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}. \tag{7}$$

(b) Um einen dritten zu $\vec{e}'_1$ und $\vec{e}'_2$ orthogonalen und normierten Einheitsvektor zu finden gibt es (mindestens) drei Methoden.

Methode 1 (mittels Skalarprodukt): Damit $\vec{e}'_3 = (c_1, c_2, c_3)^t$ auf den beiden Vektoren $\vec{e}'_1$ und $\vec{e}'_2$ senkrecht steht, muß

$$\vec{e}'_3 \cdot \vec{e}'_1 = 0 \quad \text{und} \quad \vec{e}'_3 \cdot \vec{e}'_2 = 0 \tag{8}$$

sein. Führen wir die Skalarprodukte aus, finden wir

$$\frac{1}{\sqrt{3}}(c_1 + c_2 + c_3) = 0, \quad \frac{1}{\sqrt{6}}(c_1 + c_2 - 2c_3) = 0. \tag{9}$$

Aus der ersten Gleichung folgt $c_3 = -c_1 - c_2$. Dies in die zweite Gleichung eingesetzt liefert die weitere Gleichung $3(c_1 + c_2) = 0$, also $c_2 = -c_1$ und damit wiederum $c_3 = 0$. Insgesamt ist also

$$\vec{e}'_3 = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}. \tag{10}$$

Der Faktor c_1 bestimmt sich wieder aus der Normierungsbedingung zu $c_1 = \pm 1/\sqrt{2}$. Wir wählen diesmal das untere Vorzeichen und erhalten dann

$$\vec{e}'_3 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}. \tag{11}$$

Methode 2 (Schmidtsches Orthonormierungsverfahren): Wir wählen einen beliebigen dritten Vektor $\vec{b}_3$, der von der Menge der Vektoren $\{\vec{e}'_1, \vec{e}_2\}$ linear unabhängig ist. Dann steht offenbar

$$\vec{e}'_3 = N[\vec{b}_3 - \vec{e}'_1(\vec{e}'_1 \cdot \vec{b}_3) - \vec{e}'_2(\vec{e}'_2 \cdot \vec{b}_3)] \tag{12}$$

sowohl auf $\vec{e}'_1$ als auch auf $\vec{e}'_2$ senkrecht. Das rechnet man sofort durch Bildung das Skalarprodukts nach. Der Normierungsfaktor N muß zum Schluß so bestimmt werden, daß $\vec{e}'_3$ auch auf 1 normiert ist. Verwenden wir der Einfachheit halber $\vec{b}_3 = \vec{e}_1$, folgt

$$\vec{e}'_3 = N\left[\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}\right] = N\begin{pmatrix} 1/2 \\ -1/2 \\ 0 \end{pmatrix} = N'\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}. \tag{13}$$

Aus der Forderung $\vec{e}'_3 \cdot \vec{e}'_3 = 1$ folgt dann $N' = \pm 1/\sqrt{2}$. Mit dem unteren Vorzeichen haben wir wieder den mit Methode 1 gefundenen Vektor (11) erhalten.

Methode 3 (Kreuzprodukt). Hat man zwei orthonormierte Vektoren bereits gefunden, wie es ja hier der Fall ist, ist

$$\vec{e}'_3 = \pm \vec{e}'_1 \times \vec{e}'_2 = \pm \frac{1}{\sqrt{18}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} = \pm \frac{1}{\sqrt{18}} \begin{pmatrix} -3 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} = \pm \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}. \tag{14}$$

ein normierter auf beiden Vektoren senkrecht stehender Vektor. Für das obere Vorzeichen ergibt sich wieder die Lösung (11).

Bemerkung: Die Wahl des Vorzeichens für $\vec{e}'_3$ ist also so getroffen worden, daß die neue (geordnete) Basis $(\vec{e}'_1, \vec{e}'_2, \vec{e}'_3)$ nicht nur eine neue Orthonormalbasis (also eine kartesische Basis) ist, sondern auch relativ zur alten Basis $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ gleich orientiert ist. Gewöhnlich arbeitet man mit „Rechtssystemen“, d.h. daß die Rechte-HandRegel gilt, d.h. Streckt man Daumen und Zeigefinger der rechten Hand in Richtung von $\vec{e}_1$ und $\vec{e}_2$, weist der Mittelfinger in Richtung von $\vec{e}_3$. Mit der Konstruktion des dritten Vektors aus zwei gegebenen ortonormierten Vektoren mittels Vektorprodukt (Kreuzprodukt), erhält man stets ein rechtshändiges Koordinatensystem.

(c) Wie lautet die Matrix $\hat{M}$ für den Basiswechsel, für die definitionsgemäß

$$\begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ x'_3 \end{pmatrix} = \hat{M} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

gilt?

Es gilt

$$\vec{x} = \sum_{j=1}^{3} x'_j \vec{e}'_j = \sum_{k=1}^{3} x_k \vec{e}_k = \sum_{j,k=1}^{3} (M^{-1})_{kj} x'_j \vec{e}_k. \tag{15}$$

Daraus folgt

$$\vec{e}'_j = \sum_{k=1}^{3} (M^{-1})_{kj} \vec{e}_k. \tag{16}$$

Für die Transformationsmatrix $\hat{M}$ für die Umrechnung der Komponenten von einer Basis zur anderen gilt also

$$\hat{M}^{-1} = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{6} & -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{3} & -2/\sqrt{6} & 0 \end{pmatrix}. \tag{17}$$

Wir müssen jetzt noch die Matrix invertieren. Da es sich um den Basiswechsel von einem kartesischen zu einem neuen ebenfalls kartesischen Basissystem handelt, ist in unserem Fall $\hat{M}$ eine Orthogonalmatrix und daher die Inverse einfach durch die Transponierte der Matrix gegeben. Es gilt also

$$\hat{M} = (\hat{M}^{-1})^t = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{6} & -2/\sqrt{6} \\ -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 0 \end{pmatrix}. \tag{18}$$