Übungen zur Theoretischen Physik 1 – Lösungen zu Blatt 1

Präsenzübungen

(P1) Skalarprodukt

Welche Relationszeichen gehören statt des Fragezeichens in die folgenden Ausdrücke? Begründen Sie Ihre Wahl mathematisch.

(a) $\vec{a} \cdot \vec{b} = \sum_i a_i b_i = \sum_i b_i a_i = \quad \vec{b} \cdot \vec{a}$

(b) $k(\vec{a} \cdot \vec{b}) = \sum_i k a_i b_i = \sum_i (k a_i) b_i = (k\vec{a}) \cdot \vec{b}$

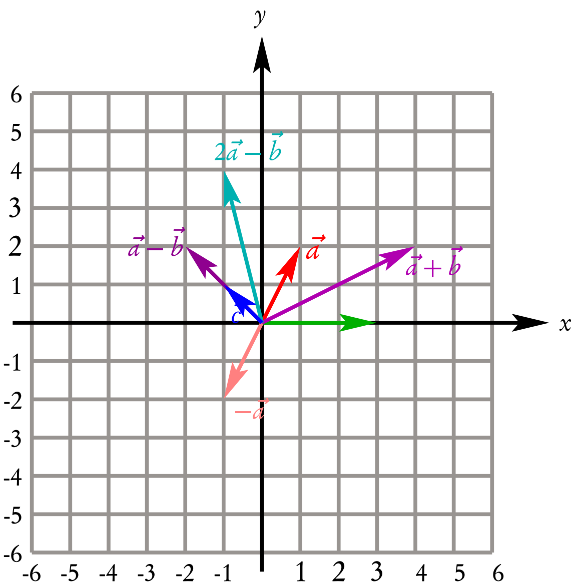
(c) $\vec{a} \cdot (\vec{b} \cdot \vec{c}) \neq (\vec{a} \cdot \vec{b}) \cdot \vec{c}$ wenn $\vec{a}$ und $\vec{c}$ nicht parallel zueinander sind. $\vec{a} \cdot (\vec{b} \cdot \vec{c}) = (\vec{a} \cdot \vec{b}) \cdot \vec{c}$ wenn $\vec{a}$ und $\vec{c}$ parallel zueinander sind, denn mit $\vec{a} = k\vec{c}$ unter Benutzung von (a) und (b) sieht man die Gleichheit sofort.

(d) $\vec{a} \cdot (\vec{b} + \vec{c}) = \sum_i a_i (b_i + c_i) = \sum_i (a_i b_i + a_i c_i) = \sum_i a_i b_i + \sum_i a_i c_i = \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{a} \cdot \vec{c}$

(P2) Vektoralgebra in der Ebene

Gegeben seien die drei Vektoren $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{c}$ in der x-y-Ebene bzgl. einer kartesischen Basis: $\vec{a} = (1,2)^t$, $\vec{b} = (3,0)^t$, $\vec{c} = (-1,1)^t$.

(a) Zeichnen Sie die drei Vektoren in ein Koordinatensystem.



(b) $|\vec{a}| = \sqrt{5}$, $|\vec{b}| = 3$, $|\vec{c}| = \sqrt{2}$.

(c) $-\vec{a} = (-1,-2)$, $\vec{a} + \vec{b} = (4,2)$, $\vec{a} - \vec{b} = (-2,2)$ und $2\vec{a} - \vec{b} = (-1,4)$.

(d) $\vec{e}_c = \frac{\vec{c}}{|\vec{c}|} = \frac{1}{\sqrt{2}}(-1,1)$.

(e) $\vec{a}\cdot\vec{e}_c = 1/\sqrt{2}$, $\vec{b}\cdot\vec{e}_c = -3/\sqrt{2}$, $(\vec{a}+\vec{b})\cdot\vec{e}_c = -\sqrt{2}$.

(f) Die Gleichung für α und β ist $\alpha\vec{a}+\beta\vec{b} = (\alpha+3\beta, 2\alpha) = \vec{c} = (-1,1)^t$. Wir müssen also das lineare Gleichungssystem

$$\begin{aligned} \alpha + 3\beta &= -1 \\ 2\alpha &= 1 \end{aligned}$$

lösen. Aus der zweiten Gleichung folgt $\alpha = 1/2$. Setzen wir das in die erste Gleichung ein, ergibt sich $\beta = -1/2$.

(P3) Winkel im Skalarprodukt

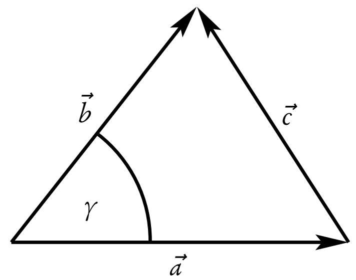
Allgemein gilt

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = |\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot\cos\gamma,$$

wobei γ den von den Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ eingeschlossenen Winkel bezeichnet.

(a) $2(\vec{a}\cdot\vec{b}) = |\vec{a}|\cdot|\vec{b}| \Rightarrow \cos\gamma = 1/2 \Rightarrow \gamma = \pi/3$.

(b) Wir zeichnen das Dreieck mit den Seiten als Vektoren:



Aus der Zeichnung liest man ab, daß $\vec{a}+\vec{c} = \vec{b}$ und also $\vec{c} = \vec{b}-\vec{a}$ ist. Daraus folgt

$$c^2 = \vec{c}\cdot\vec{c} = (\vec{b}-\vec{a})^2 = a^2 + b^2 - 2\vec{a}\cdot\vec{b} = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma.$$

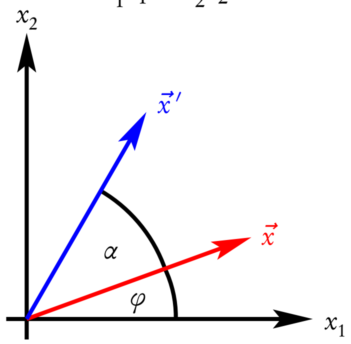
QED

(c) $|(\vec{a}\cdot\vec{b})| = |\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot|\cos\gamma| \leq |\vec{a}|\cdot|\vec{b}|$.

(P4) Drehungen in der Ebene

Im folgenden bilden $\vec{e}_1$ und $\vec{e}_2$ das übliche kartesisches Koordinatensystem in der Ebene.

(a) Zeichnen Sie einen beliebigen Vektor $\vec{x} = x_1\vec{e}_1 + x_2\vec{e}_2$ und den um den Winkel α entgegen dem Uhrzeigersinn gedrehten Vektor $\vec{x}\,' = x_1'\vec{e}_1 + x_2'\vec{e}_2$ ein.



(b) Aus der Skizze lesen wir ab, daß

$$\vec{x} = x\begin{pmatrix}\cos\varphi \\ \sin\varphi\end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \vec{x}\,' = x\begin{pmatrix}\cos(\varphi+\alpha) \\ \sin(\varphi+\alpha)\end{pmatrix} \tag{1}$$

gilt, wobei wir benutzt haben, daß $x' = x$, denn die Länge eines Vektors bleiben unter Drehungen definitionsgemäß gleich.

(c) Aus (b) folgt unter Verwendung der Additionstheoreme für sin und cos

$$\vec{x}\,' = \begin{pmatrix}x(\cos\varphi\cos\alpha - \sin\varphi\sin\alpha) \\ x(\cos\varphi\sin\alpha + \sin\varphi\cos\alpha)\end{pmatrix}.$$

Weiter ergibt sich aus der Beziehung der kartesischen zu den Polarkoordinaten des Vektors $\vec{x}$

$$\vec{x}\,' = \begin{pmatrix}x_1\cos\alpha - x_2\sin\alpha \\ x_1\sin\alpha + x_2\cos\alpha\end{pmatrix} \tag{2}$$

(d) Die Matrix einer linearen Abbildung ergibt sich einfach aus der Anordnung der Koeffizienten der Komponenten des Vektors $\vec{x}$. Es ist also wegen (2)

$$\hat{D}(\alpha) = \begin{pmatrix}\cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha\end{pmatrix}. \tag{3}$$

(e) Wir multiplizieren zuerst die Matrizen einfach aus:

$$\begin{aligned}\hat{D}(\beta)\hat{D}(\alpha) &= \begin{pmatrix}\cos\beta & -\sin\beta \\ \sin\beta & \cos\beta\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}\cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha\end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix}\cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta & -\sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta \\ \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta & \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta\end{pmatrix}\end{aligned} \tag{4}$$

Hier erkennen wir die Additionstheoreme für cos und sin wieder. Es folgt also

$$\hat{D}(\beta)\hat{D}(\alpha) = \begin{pmatrix}\cos(\alpha+\beta) & -\sin(\alpha+\beta) \\ \sin(\alpha+\beta) & \cos(\alpha+\beta)\end{pmatrix} = \hat{D}(\alpha+\beta). \tag{5}$$

Durch eine kleine Skizze macht man sich schnell geometrisch klar, daß das so sein muß: Bei der Hintereinanderausführung von zwei Drehungen um dieselbe Achse (hier senkrecht zur Zeichenebene) addieren sich die Drehwinkel. Bemerkenswert ist, daß hier die Hintereinanderausführung von zwei Drehungen **vertauschbar** ist. Dies ist bei der Hintereinanderausführung von Drehungen im $\mathbb{R}^3$ mit verschiedenen Drehachsen *nicht mehr der Fall*!

(f) Bestimmen Sie die Umkehrmatrix $\hat{D}^{-1}(\alpha)$. Geometrisch ist klar, daß die Umkehrung der Drehung einfach durch eine Drehung in die entgegengesetzte Richtung gegeben ist. Dazu müssen wir offenbar einfach das Vorzeichen des Drehwinkels umkehren. Daraus ergibt sich

$$\hat{D}^{-1}(\alpha) = \hat{D}(-\alpha) = \begin{pmatrix} \cos\alpha & +\sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}. \tag{6}$$

Man kann sich durch direktes Ausmultiplizieren der Matrizen (3) und (6) auch direkt davon überzeugen, daß wegen $\cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1$ in der Tat $\hat{D}(\alpha)\hat{D}(-\alpha) = \mathbb{1}_2$ ist. Dies folgt auch direkt aus (5), denn demnach ist $\hat{D}(\alpha)\hat{D}(-\alpha) = \hat{D}(\alpha - \alpha) = \hat{D}(0) = \mathbb{1}_2$, denn $\cos 0 = 1$ und $\sin 0 = 0$.