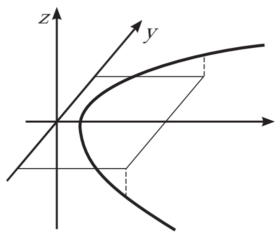
Prof. C. Greiner, Dr. H. van Hees **Wintersemester 2012/2013**

Übungen zur Theoretischen Physik 1 – Lösungen zu Blatt 3

Hausübungen (Abgabe: 23.11.2012)

(H5) Bahnkurve eines Teilchens (4 Punkte)

(a) Die Projektion der Kurve auf die xy-Ebene ist eine Hyperbel. Außerdem schraubt sich die Kurve mit gleichförmiger Geschwindigkeit in positiver z-Richtung. Sizze:



(b) Wir berechnen die Bogenlänge mit Hilfe der Geschwindigkeit:

$$\begin{aligned}
\vec{v}(t) &= r_0 k(\sinh(t), \cosh(t), 1), \\
s(t) &= \int_0^s \mathrm{d}s' = \int_0^t |\vec{v}(t')| \mathrm{d}t' \\
&= r_0 k \int_0^t \mathrm{d}t' \sqrt{\sinh^2(kt') + \cosh^2(kt') + 1} \\
&= \sqrt{2} r_0 k \int_0^t \mathrm{d}t' \cosh(kt') \\
&= \sqrt{2} r_0 \sinh(kt).
\end{aligned}$$

(c) Das begleitende Dreibein ergibt sich aus dessen Definition:

$$\begin{aligned}
\vec{T}(t) &= \frac{\vec{v}(t)}{|\vec{v}(t)|} = \frac{1}{\sqrt{2}\cosh(kt)}(\sinh(kt), \cosh(kt), 1) \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}}(\sinh(kt)/\cosh(kt), 1, 1/\cosh(kt)), \\
\frac{\mathrm{d}\vec{T}(t)}{\mathrm{d}t} &= \frac{k}{\sqrt{2}\cosh^2(kt)}(1, 0, -\sinh(kt)), \\
\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} &= |\vec{v}| = \sqrt{2} r_0 k \cosh(kt), \\
\frac{\mathrm{d}\vec{T}}{\mathrm{d}s} &= \frac{\mathrm{d}\vec{T}/\mathrm{d}t}{\mathrm{d}s/\mathrm{d}t} = \frac{1}{2r_0\cosh^3(kt)}(1, 0, -\sinh(kt)), \\
\vec{N}(t) &= \frac{\mathrm{d}\vec{T}}{\mathrm{d}s} \Big/ \left|\frac{\mathrm{d}\vec{T}}{\mathrm{d}s}\right| = \frac{1}{\cosh(kt)}(1, 0, -\sinh(kt)), \\
\vec{B}(t) &= \vec{T} \times \vec{N} = \frac{1}{\sqrt{2}\cosh(kt)}(-\sinh(kt), \cosh(kt), -1).
\end{aligned}$$

(d) Für die Krümmung erhalten wir

$$\varkappa = \left|\frac{d\vec{T}}{ds}\right| = \frac{1}{2r_0\cosh^3(kt)}\sqrt{1+\sinh^2(kt)} = \frac{1}{2r_0\cosh^2(kt)}.$$

(H6) Logarithmische Spirale (4 Punkte)

(a) $\vec{v} = \dot{\vec{r}} = a\exp(bt)[b\vec{e}_r + \omega\vec{e}_\varphi]$ mit

$$\vec{e}_r = \frac{\vec{r}}{r} = \begin{pmatrix} \cos(\omega t) \\ \sin(\omega t) \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{e}_\varphi = \frac{1}{\omega}\dot{\vec{e}}_r = \begin{pmatrix} -\sin(\omega t) \\ \cos(\omega t) \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Es gilt $\vec{e}_r^{\,2} = \vec{e}_\varphi^{\,2} = 1, \quad \vec{e}_r \cdot \vec{e}_\varphi = 0$. Nochmaliges Ableiten nach der Zeit liefert die Beschleunigung

$$\vec{a} = \dot{\vec{v}} = a\exp(bt)\left[(b^2-\omega^2)\vec{e}_r + 2b\omega\vec{e}_\varphi\right].$$

(b) Es gilt $|\vec{v}| = a\exp(bt)\sqrt{b^2+\omega^2}$. Der Tangenteneinheitsvektor ist

$$\vec{T} = \frac{\vec{v}}{|\vec{v}|} = \frac{1}{\sqrt{b^2+\omega^2}}\left[b\vec{e}_r + \omega\vec{e}_\varphi\right].$$

Die Krümmung ist

$$\varkappa = \left|\frac{\mathrm{d}\vec{T}}{\mathrm{d}s}\right| = \frac{|\dot{\vec{T}}|}{|\vec{v}|} = \frac{\omega}{\sqrt{b^2+\omega^2}}\frac{\exp(-bt)}{a} \tag{1}$$

und damit der Krümmungsradius

$$\rho = \frac{1}{\varkappa} = \frac{\sqrt{b^2+\omega^2}}{\omega} a \exp(bt).$$

(c) Die Bogenlänge für eine Windung ist

$$s = \int_0^{2\pi/\omega} \mathrm{d}t\, |\vec{v}| = a\sqrt{b^2+\omega^2} \int_0^{2\pi/\omega} \mathrm{d}t\, \exp(bt) = \frac{\sqrt{b^2+\omega^2}}{b} a \left[\exp\left(\frac{2\pi b}{\omega}\right) - 1\right].$$

(d) Für $b \to \infty$ ist bereits für kleine $t > 0$ die Krümmung sehr klein, d.h. die Kurve geht sehr schnell näherungsweise in eine Gerade über.

Bemerkungen: Die logarithmische Spirale weist einige interessante Eigenschaften auf. Als erstes schneiden alle Geraden durch den Ursprung, das **Zentrum der Spirale**, das asymptotisch für $t \to -\infty$ erreicht wird, die Kurve unter demselben Winkel. Die Gerade, die zur x-Achse den Winkel φ besitzt, ist durch den Einheitsvektor $\vec{g} = (\cos\varphi, \sin\varphi)$ bestimmt. Sie schneidet die Spirale in den Punkten mit $\omega t_n = \varphi + 2\pi n$ mit $n \in \mathbb{Z}$, und es gilt $\vec{g} = \vec{e}_\varphi(t_n)$. Der Winkel zwischen dieser Geraden und der Kurve ergibt sich also aus

$$\cos\alpha = \vec{T}(t_n) \cdot \vec{g} = \frac{\omega}{\sqrt{\omega^2+b^2}}.$$

Zum anderen ist die **Evolute** der logarithmische Spirale wieder eine Evolute mit dem gleichen Zentrum und dem gleichen Windungssinn. Die Evolute einer Kurve ist dabei definiert als die Menge ihrer Krümmungsmittelpunkte. Für den Punkt $\vec{r}(t)$ berechnet sich der dazugehörige Krümmungsmittelpunkt mit Hilfe des Normalenvektors und des Krümmungsradiusses zu

$$\vec{K}(t) = \vec{r}(t) + \rho(t)\vec{N}(t) = \frac{ab}{\omega} \exp(bt) \begin{pmatrix} -\sin(\omega t) \\ \cos(\omega t) \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Dabei ist der Normalenvektor

$$\vec{N}(t) = \frac{\dot{\vec{T}}}{|\dot{\vec{T}}|} = \frac{1}{\sqrt{b^2+\omega^2}}(-\omega\vec{e}_r + b\vec{e}_\varphi)$$

und der Krümmungsradius wegen (1)

$$\rho = \frac{1}{\varkappa} = a\exp(bt)\frac{\sqrt{b^2+\omega^2}}{\omega}.$$

Das ist offensichtlich in der Tat wieder eine logarithmische Spirale, die für $\omega > 0$ entgegen dem Uhrzeigersinn durchlaufen wird wie die ursprüngliche Kurve.

(H7) Linienintegral (2 Punkte)

Eine Strecke, die den Punkt mit dem Ortsvektor $\vec{r}_1$ mit dem Punkt mit dem Ortsvektor $\vec{r}_2$ verbindet, wird offenbar durch die Parametrisierung

$$\vec{r}(t) = \vec{r}_1 + t(\vec{r}_2 - \vec{r}_1), \quad t \in [0,1] \tag{2}$$

beschrieben.

Für die drei angegebenen Wege haben wir also

$$\begin{aligned}
C_1: \quad \vec{r}(t) &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \dot{\vec{r}}(t) = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \\
C_2: \quad \vec{r}(t) &= \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \dot{\vec{r}}(t) = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \\
C_3: \quad \vec{r}(t) &= \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \dot{\vec{r}}(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}.
\end{aligned} \tag{3}$$

Die Wegintegrale sind also nacheinander

$$\begin{aligned}
\int_{C_1} \mathrm{d}\vec{r} \cdot \vec{A}(\vec{r}) &= \int_0^1 \mathrm{d}t \; \dot{\vec{r}}(t) \cdot \vec{A}[\vec{r}(t)] = \int_0^1 \mathrm{d}t \; 4 = 4, \\
\int_{C_2} \mathrm{d}\vec{r} \cdot \vec{A}(\vec{r}) &= \int_0^1 \mathrm{d}t \; \dot{\vec{r}}(t) \cdot \vec{A}[\vec{r}(t)] = \int_0^1 \mathrm{d}t \; (3t^2 - 8t) = -3, \\
\int_{C_2} \mathrm{d}\vec{r} \cdot \vec{A}(\vec{r}) &= \int_0^1 \mathrm{d}t \; \dot{\vec{r}}(t) \cdot \vec{A}[\vec{r}(t)] = \int_0^1 \mathrm{d}t \; (t-1)^2 = 1/3.
\end{aligned} \tag{4}$$

Das Integral entlang des gesamten geschlossenen Weges ist die Summe dieser Teilintegrale:

$$\int_{C_1 + C_2 + C_3} \mathrm{d}\vec{r} \cdot \vec{A}(\vec{r}) = 4 - 3 + \frac{1}{3} = \frac{4}{3}. \tag{5}$$