Prof. C. Greiner, Dr. H. van Hees Wintersemester 2012/2013

Übungen zur Theoretischen Physik 1 – Lösungen zu Blatt 4

Hausübungen (Abgabe: 30.11.2012)

(H8) Differentialoperatoren der Vektoranalysis (3 Punkte)

$$
\begin{aligned}
&\vec{\nabla}\cdot\vec{A} = 3yz^2 + 6xy^2 - x^2 y,\\
&\vec{\nabla}\Phi = (6x, -z, -y)^t, \quad \vec{A}\cdot\vec{\nabla}\Phi = 18x^2yz^2 - 2xy^3z + x^2y^2z,\\
&\vec{\nabla}\cdot(\Phi\vec{A}) = (\vec{\nabla}\Phi)\cdot\vec{A} + \Phi(\vec{\nabla}\cdot\vec{A})\\
&\qquad = -3x^4y + 18x^3y^2 + 2x^2y^2z - 8xy^3z + 27x^2yz^2 - 3\,y^2z^3,\\
&\vec{\nabla}\times\vec{A} = (-x^2z, 8xyz, 2y^3 - 3xz^2)^t.
\end{aligned}
$$

(H9) Radialfelder (2 Punkte)

$$
\vec{\nabla} r = \vec{\nabla}\sqrt{x^2+y^2+z^2} = \frac{(2x,2y,2z)}{2\sqrt{x^2+y^2+z^2}} = \left(\frac{x}{r}, \frac{y}{r}, \frac{z}{r}\right)^t = \frac{\vec{r}}{r} = \vec{e}_r
$$

$$
\vec{\nabla} f(r) = \left(\frac{\partial f(r)}{\partial x}, \frac{\partial f(r)}{\partial y}, \frac{\partial f(r)}{\partial z}\right)^t = \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}r}\left(\frac{\partial r}{\partial x}, \frac{\partial r}{\partial y}, \frac{\partial r}{\partial z}\right)^t = \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}r}\vec{\nabla} r = \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}r}\vec{e}_r
$$

(H10) Wegintegral über das Newtonsche Gravitationsfeld (5 Punkte)

(a i)

$$
\begin{aligned}
\int_{(a,0,a)}^{(3a,0,a)} \vec{F}\cdot d\vec{r} &= -GM\int_a^{3a} dx\,\frac{x}{(x^2+a^2)^{3/2}} = GM\frac{1}{\sqrt{x^2+a^2}}\bigg|_a^{3a} = \frac{GM}{a}\left(\frac{1}{\sqrt{10}} - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)\\
\int_{(3a,0,a)}^{(3a,2a,a)} \vec{F}\cdot d\vec{r} &= -GM\int_0^{2a} dy\,\frac{y}{(9a^2+y^2+a^2)^{3/2}} = GM\frac{1}{\sqrt{y^2+10a^2}}\bigg|_0^{2a} = \frac{GM}{a}\left(\frac{1}{\sqrt{14}} - \frac{1}{\sqrt{10}}\right)\\
\int_{(3a,2a,a)}^{(3a,2a,2a)} \vec{F}\cdot d\vec{r} &= -GM\int_a^{2a} dz\,\frac{z}{(9a^2+4a^2+z^2)^{3/2}} = GM\frac{1}{\sqrt{z^2+13a^2}}\bigg|_a^{2a} = \frac{GM}{a}\left(\frac{1}{\sqrt{17}} - \frac{1}{\sqrt{14}}\right)\\
\sum &= \frac{GM}{a}\left(\frac{1}{\sqrt{17}} - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)
\end{aligned}
$$

(a ii)

$$\begin{aligned}
\int_{(a,0,a)}^{(a,0,2a)} \vec{F}\cdot d\vec{r} &= -GM\int_a^{2a} dz\, \frac{z}{(a^2+z^2)^{3/2}} = GM \frac{1}{\sqrt{z^2+a^2}}\Bigg|_a^{2a} = \frac{GM}{a}\left(\frac{1}{\sqrt{5}}-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\\
\int_{(a,0,2a)}^{(a,2a,2a)} \vec{F}\cdot d\vec{r} &= -GM\int_0^{2a} dy\, \frac{y}{(a^2+y^2+4a^2)^{3/2}} = GM \frac{1}{\sqrt{y^2+5a^2}}\Bigg|_0^{2a} = \frac{GM}{a}\left(\frac{1}{\sqrt{9}}-\frac{1}{\sqrt{5}}\right)\\
\int_{(a,2a,2a)}^{(3a,2a,2a)} \vec{F}\cdot d\vec{r} &= -GM\int_a^{3a} dx\, \frac{x}{(x^2+4a^2+4a^2)^{3/2}} = GM \frac{1}{\sqrt{x^2+8a^2}}\Bigg|_a^{3a} = \frac{GM}{a}\left(\frac{1}{\sqrt{17}}-\frac{1}{\sqrt{9}}\right)\\
\sum &= \frac{GM}{a}\left(\frac{1}{\sqrt{17}}-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)
\end{aligned}$$

(b) Offenbar gilt für das angegebene Gravitationsfeld

$$\vec{F}(\vec{r}) = -\frac{GM}{r^2}\vec{e}_r,$$

wobei $r = |\vec{r}| = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$. Wir können also die Ergebnisse von Aufgabe (H9) verwenden. Das Skalarfeld ist demnach von der Form

$$\Phi(\vec{r}) = f(r), \tag{1}$$

wobei

$$f'(r) \stackrel{!}{=} -\frac{GM}{r^2} \Rightarrow f(r) = \frac{GM}{r} = \frac{GM}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}, \tag{2}$$

woraus man durch Bilden des Gradienten sofort zeigt, daß tatsächlich

$$\vec{F}(\vec{r}) = \vec{\nabla}\Phi(\vec{r}). \tag{3}$$

Wir haben dabei die Integrationskonstante so gewählt, daß $\lim_{r\to\infty} f(r) = 0$. Das Skalarfeld Φ ist sowieso nur bis auf eine additive Konstante, die physikalisch irrelevant ist, bestimmt.

Wir haben schon bei Aufgabe (P13) ausführlich begründet, warum für ein Gradientenfeld Wegintegrale nur von Anfangs- und Endpunkt des Weges, nicht aber von der Form der sie verbindenden Kurve abhängen.