

## Übungen zur Theoretischen Physik 1 – Lösungen zu Blatt 4

### Präsenzübungen

#### (P11) Differentialoperatoren der Vektoranalysis

(a) Aus der Definition des Nabla-Operators folgt

$$\begin{aligned}\vec{\nabla}\Phi &= (y+z, x+z, y+x) \\ \vec{\nabla}\times\vec{A} &= (-y^2, -z^2, -x^2) \\ \vec{\nabla}\times(\Phi\vec{A}) &= \begin{pmatrix} z^3x + z^2x^2 - 2y^3z - y^3x - 2y^2xz \\ x^3y + x^2y^2 - 2z^3x - z^3y - 2z^2xy \\ y^3z + y^2z^2 - 2x^3y - x^3z - 2x^2yz \end{pmatrix}\end{aligned}$$

(b) Wir schreiben den Ausdruck mit Hilfe des Levi-Civita-Symbols in Komponenten aus und wenden die Produktregel an:

$$\begin{aligned}\left(\vec{\nabla}\times(\Phi\vec{A})\right)_i &= \sum_j \sum_k \epsilon_{ijk} \partial_j (\Phi A_k) = \sum_j \sum_k \epsilon_{ijk} (\partial_j \Phi) A_k + \Phi \sum_j \sum_k \epsilon_{ijk} \partial_j A_k \\ &= \left((\vec{\nabla}\Phi)\times\vec{A}\right)_i + \Phi(\vec{\nabla}\times\vec{A})_i,\end{aligned}$$

und das war zu zeigen.

#### (P12) Rotationsellipsoid

Wir definieren das skalare Feld  $\Phi(\vec{r}) = x^2/a^2 + y^2/a^2 + z^2/b^2$  und wissen, daß dann das Gradientenfeld  $\vec{\nabla}\Phi(\vec{r})$  senkrecht auf der Fläche  $\Phi(\vec{r}) = \text{const.}$  steht. Es folgt

$$\vec{n} = \frac{\vec{\nabla}\Phi}{|\vec{\nabla}\Phi|} = \frac{(x/a^2, y/a^2, z/b^2)}{\sqrt{(x^2+y^2)/a^4 + z^2/b^4}}.$$

In dem Punkt  $(a/\sqrt{2}, a/\sqrt{2}, 0)$  ist  $\vec{n} = (1, 1, 0)/\sqrt{2}$ .

#### (P13) Wegunabhängigkeit eines Wegintegrals

Wir zeigen, daß  $\vec{A}$  der Gradient eines Skalarfeldes ist. Dafür gibt es (mindestens) zwei Lösungswege.

##### Lösungsweg 1: Bestimmung des Skalarfeldes durch sukzessive Integration des Vektorfeldes

Dazu machen wir den Ansatz

$$\vec{A}(\vec{r}) = \vec{\nabla}\Phi(\vec{r}) \tag{1}$$

und bestimmen  $\Phi$  aus der Definition des Gradienten:

$$\partial_x \Phi \stackrel{!}{=} A_1 = 2xy + z^3 \Rightarrow \Phi = x^2y + xz^3 + C_1(y, z). \tag{2}$$

Dabei ist  $C_1$  eine noch unbestimmte Funktion von  $y$  und  $z$ . Weiter folgt daraus

$$\partial_y \Phi = x^2 + \partial_y C_1 \stackrel{!}{=} A_2 = x^2 + 2y \Rightarrow \partial_y C_1 = 2y \Rightarrow C_1 = y^2 + C_2(z). \quad (3)$$

Wir haben also eine Lösung für  $C_1$  gefunden, die nicht von  $x$  abhängt. Bis jetzt besitzt also  $\Phi$  die Form

$$\Phi = x^2 y + x z^3 + y^2 + C_2(z). \quad (4)$$

Um die unbekannte Funktion  $C_2$  zu bestimmen, benutzen wir die  $z$ -Komponente von (1):

$$\partial_z \Phi = 3xz^2 + \partial_z C_2 \stackrel{!}{=} A_3 = 3xz^2 - 2 \Rightarrow C_2 = -2z + C, \quad (5)$$

wobei  $C$  eine Konstante ist. Daß wir  $C_2$  unabhängig von  $x$  und  $y$  haben wählen können, zeigt endgültig, daß  $\vec{A}$  ein Gradientenfeld ist, und wir haben schließlich für die dazugehörige Skalarfunktion die Lösungen

$$\Phi = x^2 y + x z^3 + y^2 - 2z + C \quad (6)$$

gefunden. Die Konstante ist unbestimmt, da ihr Gradient trivialerweise verschwindet. Man prüft durch Berechnung des Gradienten leicht nach, daß mit diesem  $\Phi$  tatsächlich (1) erfüllt ist.

Es gilt nun ganz allgemein für irgendeine durch  $\vec{r}(t)$  ( $t \in [a, b]$ ) parametrisierten Kurve  $C$

$$\int_C d\vec{r} \cdot \vec{A}(\vec{r}) = \int_a^b dt \frac{d\vec{r}}{dt} \cdot \vec{A}[\vec{r}(t)] = \int_a^b dt \frac{d\vec{r}}{dt} \cdot \vec{\nabla} \Phi[\vec{r}(t)]. \quad (7)$$

Wegen der Kettenregel für Funktionen von mehreren Veränderlichen ist aber

$$\frac{d\vec{r}}{dt} \cdot \vec{\nabla} \Phi[\vec{r}(t)] = \frac{d}{dt} \Phi[\vec{r}(t)], \quad (8)$$

und daraus folgt mit dem Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung

$$\int_C d\vec{r} \cdot \vec{A}(\vec{r}) = \Phi[\vec{r}(b)] - \Phi[\vec{r}(a)]. \quad (9)$$

Das Resultat hängt tatsächlich nur von Anfangs- und Endpunkt der Kurve ab, und das Wegintegral ist durch irgendein Skalarfeld  $\Phi$ , für das  $\vec{A} = \vec{\nabla} \Phi$  gilt, gegeben. Für ein vorgegebenes Feld  $\vec{A}$  ist  $\Phi$  (falls es überhaupt existiert!) bis auf eine Konstante eindeutig bestimmt, und diese Konstante fällt in (9) heraus. Wir erhalten also für einen beliebigen Weg  $C$ , der den Ursprung mit  $\vec{R} = (X, Y, Z)^t$  verbindet, eindeutig

$$\int_C d\vec{r} \cdot \vec{A}(\vec{r}) = \Phi(\vec{R}) - \Phi(0) = X^2 Y + X Z^3 + Y^2 - 2Z. \quad (10)$$

Wir hätten also auch ein  $\Phi$  finden können indem wir ein solches Kurvenintegral berechnet hätten und danach durch Gradientenbildung nachweisen können, daß es tatsächlich (1) erfüllt.

### Lösungsweg 2: Bestimmung des Skalarfeldes über ein Wegintegral

Wir können das Gradientenfeld auch direkt über ein Wegintegral entlang eines beliebigen Weges  $C_{\vec{r}_0 \vec{R}}$  berechnen, der einen beliebigen im Definitionsbereich des Vektorfeldes gelegenen festen Punkt  $\vec{r}_0$  mit dem variablen Punkt  $\vec{R}$  (ebenfalls im Definitionsbereich des Vektorfeldes) verbindet. Falls  $\vec{A}$  ein Gradientenfeld ist, ist dieses Wegintegral nämlich unabhängig vom gewählten Weg und hängt nur von der

Wahl des Anfangs- und Endpunktes ab. Dabei ergibt eine Änderung des willkürlichen Anfangspunktes nur eine additive Konstante zum Skalarfeld, und diese ist unerheblich, weil sie bei der Gradientenbildung ohnehin herausfällt.

In unserem Fall ist es bequem, als Anfangspunkt  $\vec{r}_0 = 0$  und als Weg die gerade Verbindungsstrecke zu wählen. Eine bequeme Parametrisierung ist

$$\vec{r}(t) = \vec{R}t, \quad \dot{\vec{r}}(t) = \vec{R}, \quad t \in [0, 1]. \quad (11)$$

Daraus ergibt sich (mit  $\vec{R} = (X, Y, Z)$ ) als Ansatz für die Skalarfunktion

$$\begin{aligned} \Phi(\vec{R}) &= \int_{C_{\vec{r}_0 \vec{R}}} d\vec{r} \cdot \vec{A}(\vec{r}) = \int_0^1 dt \dot{\vec{r}}(t) \cdot \vec{A}[\vec{r}(t)] \\ &= \int_0^1 dt (3t^2 X^2 Y + 2t Y^2 - 2Z + 4t^3 X Z^3) \\ &= X^2 Y + X Z^3 + Y^2 - 2Z. \end{aligned} \quad (12)$$

Das stimmt tatsächlich mit (10) überein.

Wir müssen nun unbedingt durch Bildung des Gradienten die Probe machen, ob  $\Phi$  tatsächlich ein Skalarfeld mit  $\vec{A} = \vec{\nabla} \Phi$  ist (s.o.).