Übungen zur Theoretischen Physik 1 – Lösungen zu Blatt 6

Präsenzübungen

(P16) Teilchen auf Ellipse

Für die Geschwindigkeit und Beschleunigung des Teilchens ergibt sich durch Ableiten des Ortsvektors nach der Zeit

$$\vec{v}(t) = \dot{\vec{x}}(t) = \begin{pmatrix} -a\omega\sin(\omega t) \\ b\omega\cos(\omega t) \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{a}(t) = \dot{\vec{v}}(t) = \begin{pmatrix} -a\omega^2\cos(\omega t) \\ -b\omega^2\sin(\omega t) \\ 0 \end{pmatrix} = -\omega^2 \vec{r}(t). \tag{1}$$

Für die Kraft gilt also

$$\vec{F} = -m\omega^2 \vec{r}. \tag{2}$$

Offensichtlich ist $\vec{\nabla} \times \vec{F}(\vec{r}) = 0$. Da $\vec{F}(\vec{r})$ überall stetig differenzierbar ist, muß es also ein Potential geben, so daß (bis auf eine unwesentliche additive Konstante für das Potential)

$$\vec{F}(\vec{r}) = -\vec{\nabla} V(\vec{r}) \Rightarrow V(\vec{r}) = \frac{m\omega^2}{2}\vec{r}^2 \tag{3}$$

folgt.

(P17) Bewegung mit Reibung

Es genügt, von der Bewegungsgleichung nur die x-Komponente zu berücksichtigen. Es folgt

$$m\dot{v}_x = -\gamma v_x^2, \tag{4}$$

wobei wir angenommen haben, daß $v_x > 0$ ist. Offenbar gilt

$$\frac{\dot{v}_x}{v_x^2} = -\frac{\gamma}{m}. \tag{5}$$

Die linke Seite dieser Gleichung können wir wegen der Kettenregel offenbar als

$$\frac{\dot{v}_x}{v_x^2} = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{1}{v_x}\right) \tag{6}$$

schreiben. Dies in (5) eingesetzt und über das Intervall $(0, t)$ bzgl. der Zeit integriert liefert

$$\frac{1}{v_x} - \frac{1}{v_0} = \frac{\gamma}{m}t \Rightarrow v_x(t) = \frac{m v_0}{\gamma v_0 t + m}. \tag{7}$$

Angenommen, es ist $v_0 > 0$. Dann ist für alle $t > 0$ auch $v_x(t) > 0$, so daß die obige Annahme bei der Aufstellung der Bewegungsgleichung (4) erfüllt ist.

Der Ort des Teilchens ergibt sich unter Berücksichtigung der Anfangsbedingung $x(0) = 0$ durch abermalige Integration bzgl. t über das Intervall $(0, t)$:

$$x(t) = \frac{m}{\gamma}\ln\left(\frac{\gamma v_0 t + m}{m}\right). \tag{8}$$

Obwohl also wegen (7) $v(t) \to 0$ für $t \to \infty$ gilt, bewegt sich das Teilchen beliebig weit von seinem Ausgangspunkt weg, denn wegen (8) ist $x(t) \to \infty$ für $t \to \infty$

(P18) Bewegung entlang einer Schraubenlinie

Erste Lösungsmöglichkeit. Wir verwenden den Energiesatz. Für die Gewichtskraft gilt nämlich

$$\vec{F}_g = -mg\vec{e}_z. \tag{9}$$

Diese Kraft besitzt das Potential

$$V = mgz. \tag{10}$$

Es gilt also

$$E = \frac{m}{2}\vec{v}^2 + mgz = \text{const.} \tag{11}$$

Dabei haben wir berücksichtigt, daß in jedem Moment die Reaktionskraft der Führungen, die das Teilchen auf die Spiralbahn zwingen, senkrecht zur Geschwindigkeit stehen und somit keine Arbeit an dem Teilchen verrichten[1].

Wir berechnen nun die Geschwindigkeit durch Ableiten des Ortsvektors nach der Zeit:

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} -a\dot{\varphi}\sin\varphi \\ a\dot{\varphi}\cos\varphi \\ c\dot{\varphi} \end{pmatrix}. \tag{12}$$

Dies in (11) eingesetzt liefert

$$E = \frac{m}{2}(a^2 + c^2)\dot{\varphi}^2 + mgc\varphi. \tag{13}$$

Leiten wir diese Gleichung nach der Zeit ab, ergibt sich

$$m(a^2 + c^2)\ddot{\varphi}\dot{\varphi} + mgc\dot{\varphi} = 0. \tag{14}$$

Dividieren wir durch $\dot{\varphi}$, ergibt sich nach einer einfachen Umformung

$$\ddot{\varphi} = -\frac{gc}{a^2 + c^2}. \tag{15}$$

Dies können wir sehr einfach zweimal nach der Zeit integrieren. Wir erhalten die allgemeine Lösung

$$\varphi(t) = -\frac{gc}{2(a^2 + c^2)}t^2 + \dot{\varphi}_0 t + \varphi_0. \tag{16}$$

Zweite Lösungsmöglichkeit. Es wirkt nur die Schwerkraftskomponente tangential zur Bahn als beschleunigende Kraft. Berechnen wir die Beschleunigung durch Ableiten der Geschwindigkeit (12) nach der Zeit, erhalten wir

$$\vec{a} = \dot{\vec{v}} = \begin{pmatrix} -a\ddot{\varphi}\sin\varphi - a\dot{\varphi}^2\cos\varphi \\ a\ddot{\varphi}\cos\varphi - a\dot{\varphi}^2\sin\varphi \\ c\ddot{\varphi} \end{pmatrix}. \tag{17}$$

Die Projektion der Kraft auf die Tangentialrichtung der Bahn ist also

$$m\dot{\vec{v}} \cdot \frac{\vec{v}}{|\vec{v}|} = \frac{m(a^2 + c^2)}{|\vec{v}|}\dot{\varphi}\ddot{\varphi} \stackrel{!}{=} \vec{F}_g \cdot \frac{\vec{v}}{|\vec{v}|} = -\frac{mgc}{|\vec{v}|}\dot{\varphi}. \tag{18}$$

Eine einfache Umformung liefert dann wieder die Bewegungsgleichung (15).

[1] Dies gilt freilich nur unter Vernachlässigung der Reibung!