

Übungen zur Theoretischen Physik 1 – Lösungen zu Blatt 8

Präsenzübungen

(P22) Rakete

- (a) Es genügt, im folgenden die z-Komponente der Bewegungsgleichung zu berücksichtigen, da sich die Rakete offenbar entlang der z-Richtung bewegt.

Wenn kein Gravitationsfeld vorhanden ist, ist der Gesamtimpuls in z-Richtung erhalten. Es ist also

$$\frac{d}{dt}(p_R + p_G) = 0. \quad (1)$$

Dabei ist p_G der Impuls des Anteils des ausgestoßenen Gases. Nun gilt

$$p_R = m_R v_R = (m_0 - \alpha t) v_R, \quad (2)$$

und für die Änderung des Impulses der ausgestoßenen Gases

$$\frac{d}{dt} p_G = \alpha (v_R - v_{\text{rel}}), \quad (3)$$

denn im Zeitinkrement dt wird das Gasmassenelement $dm_G = \alpha dt$ ausgestoßen, und diese Gasmasse hat die Geschwindigkeit $v - v_{\text{rel}}$ im Ruhssystem der Erde, denn v_{rel} ist definitionsgemäß die Relativgeschwindigkeit des Gases, gemessen im Ruhssystem der Rakete.

Ohne Schwerkraft wirkt also auf die Rakete die **Rückstoßkraft**

$$F_{\text{rück}} = \dot{p}_R = -\dot{p}_G = -\alpha (v_R - v_{\text{rel}}), \quad (4)$$

und das war zu zeigen.

- (b) Zu dieser rüktreibenden Kraft kommt noch die Gravitationskraft $F_g = -mg$. Die allgemeine Newtonsche Bewegungsgleichung gemäß des zweiten Newtonschen Postulats besagt nun, daß

$$\dot{p}_R = -\alpha (v_R - v_{\text{rel}}) - (m_0 - \alpha t)g. \quad (5)$$

- (c) Man darf für dieses Problem nicht die vereinfachte Gleichung $F = ma$ anwenden, weil zum einen die Masse der Rakete veränderlich ist und zum anderen das System aus der Sicht der Rakete allein betrachtet offen ist, denn es strömt Gas aus und transportiert Impuls mit sich fort, und dieser Impuls des Gases ist wie eben gezeigt zu berücksichtigen.

- (d) Nun ist

$$\dot{p}_R = \frac{d}{dt} [(m_0 - \alpha t)v_R] = -\alpha v_R + (m_0 - \alpha t)\dot{v}_R \quad (6)$$

Dies in (5) eingesetzt liefert nach einigen einfachen Umformungen

$$\dot{v}_R = \frac{\alpha v_{\text{rel}}}{m_0 - \alpha t} - g. \quad (7)$$

(e) Dies können wir einfach bzgl. t von $t = 0$ bis t integrieren. Wegen $v_R(0) = 0$ folgt

$$v_R(t) = v_{\text{rel}} \ln \left(\frac{m_0}{m_0 - \alpha t} \right) - g t. \quad (8)$$

(f) Um $z_R(t)$, also die Höhe der Rakete als Funktion der Zeit, zu erhalten, müssen wir dies nochmals nach der Zeit integrieren. Dazu berechnen wir zunächst das unbestimmte Integral $\int dt \ln(A - Bt)$ durch partielle Integration:

$$\begin{aligned} \int dt 1 \cdot \ln(A - Bt) &= t \ln(A - Bt) + \int dt \frac{Bt}{A - Bt} \\ &= t \ln(A - Bt) + \int dt \frac{(Bt - A) + A}{A - Bt} \\ &= \left(t - \frac{A}{B} \right) \ln(A - Bt) - t. \end{aligned} \quad (9)$$

Dies auf die Integration von (8) angewandt liefert mit $z(0) = 0$ nach einigen einfachen Umformungen schließlich

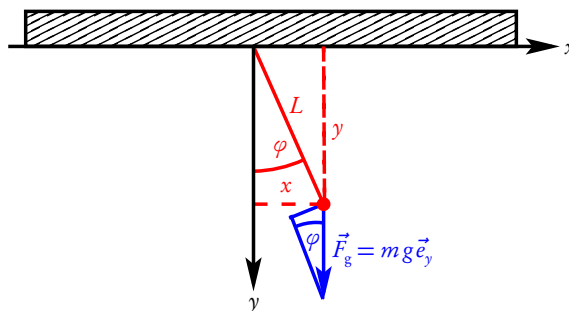
$$z_R(t) = v_{\text{rel}} t - \frac{g}{2} t^2 - v_{\text{rel}} \frac{m_0 - \alpha t}{\alpha} \ln \left(\frac{m_0}{m_0 - \alpha t} \right). \quad (10)$$

(P23) Mathematisches Pendel (Kleinwinkelnäherung)

(a) Der Massenpunkt bewegt sich auf einer Kreisbahn mit Radius L . Aus der Skizze lesen wir ab, daß für unsere Wahl des Winkels φ und der Koordinatenachsen

$$\vec{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = L \begin{pmatrix} \sin \varphi \\ \cos \varphi \end{pmatrix} \quad (11)$$

gilt.



Für Geschwindigkeit und Beschleunigung erhalten wir also

$$\dot{\vec{r}} = \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = L \dot{\varphi} \begin{pmatrix} \cos \varphi \\ -\sin \varphi \end{pmatrix}, \quad \ddot{\vec{r}} = \begin{pmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{y} \end{pmatrix} = L \ddot{\varphi} \begin{pmatrix} \cos \varphi \\ -\sin \varphi \end{pmatrix} + L \dot{\varphi}^2 \begin{pmatrix} -\sin \varphi \\ -\cos \varphi \end{pmatrix}. \quad (12)$$

Aufgrund der Zwangskraft durch den Faden wird nur die Tangentialkomponente von Beschleunigung und Kraft in der Bewegungsgleichung relevant, denn die Komponente der Schwerkraft in Richtung des Fadens wird durch die von ihm ausgeübte Zwangskraft kompensiert, so daß keine Beschleunigung in Richtung des Fadens stattfindet.

Die entsprechende Projektion auf die Tangentialrichtung erhalten wir durch skalare Multiplikation der entsprechenden Vektoren mit dem Einheitstangentenvektor

$$\vec{t} = \frac{\dot{\vec{r}}}{|\dot{\vec{r}}|} = \begin{pmatrix} \cos \varphi \\ -\sin \varphi \end{pmatrix} \quad (13)$$

und damit

$$\vec{t} \cdot \ddot{\vec{r}} = L\ddot{\varphi} \quad (14)$$

Die entsprechende Kraftkomponente ist

$$\vec{t} \cdot \vec{F}_g = \vec{t} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ mg \end{pmatrix} = -mg \sin \varphi. \quad (15)$$

Die Bewegungsgleichung für die Tangentialkomponente liefert die Bewegungsgleichung für φ :

$$m\vec{t} \cdot \ddot{\vec{r}} = mL\ddot{\varphi} = \vec{t} \cdot \vec{F}_g = -mg \sin \varphi \Rightarrow \ddot{\varphi} = -\frac{g}{L} \sin \varphi. \quad (16)$$

Bemerkung: Diese nichtlineare Gleichung läßt sich nicht mit elementaren Funktionen lösen, sondern führt auf sogenannte **elliptische Funktionen**.

- (b) Es gilt auch der Energiesatz, der uns die Berechnung der Beschleunigung und der Projektionen auf die Tangentialkomponente erspart. Die Kraft $\vec{F}_g = mg\vec{e}_y$ besitzt offenbar das Potential $V = -mgy = -mgL \cos \varphi$. Wir erhalten also für die Energie

$$E = \frac{m}{2} \dot{\vec{x}}^2 - mgL \cos \varphi = \frac{mL^2}{2} \dot{\varphi}^2 - mgL \cos \varphi. \quad (17)$$

Leitet man dies nach der Zeit ab, erhält man wegen des Energieerhaltungssatzes

$$\dot{E} = mL^2 \dot{\varphi} \ddot{\varphi} + mgL \dot{\varphi} \sin \varphi = 0. \quad (18)$$

Division durch $mL\dot{\varphi}$ (vorausgesetzt $\dot{\varphi} \neq 0$) liefert dann wieder die Bewegungsgleichung (16).

- (c) Die Kleinwinkelnäherung erhalten wir durch Entwicklung des sin in (16) bis zur ersten Ordnung:

$$\ddot{\varphi} = -\frac{g}{L} \varphi. \quad (19)$$

Dies ist die Bewegungsgleichung eines ungedämpften harmonischen Oszillators mit der Eigenfrequenz $\omega_0 = \sqrt{g/L}$. Aus der Vorlesung wissen wir, daß die Lösung des Anfangswertproblems $\varphi(0) = \varphi_0, \dot{\varphi}(0) = \omega$

$$\varphi(t) = \varphi_0 \cos(\omega_0 t) + \frac{\omega}{\omega_0} \sin(\omega_0 t). \quad (20)$$

Zu derselben Näherung gelangen wir, indem wir im Ausdruck für die Energie die Entwicklung

$$\cos \varphi = 1 - \frac{\varphi^2}{2} + \dots \quad (21)$$

einsetzen und die höheren Terme vernachlässigen. Das liefert für kleine Winkel die Näherung

$$E = \frac{mL^2}{2} \dot{\varphi}^2 - mgL \left(1 - \frac{\varphi^2}{2} \right). \quad (22)$$

Wieder die Zeitableitung berechnet und den Energieerhaltungssatz angewandt, liefert ebenfalls (19).