

## Übungen zur Theoretischen Physik 1 – Lösungen zu Blatt 10

### Präsenzübungen

#### (P25) Bewegung im allgemeinen Zentralkraftfeld

(a) Der Gradient des Potentials ist nach der Kettenregel

$$\vec{\nabla} V(r) = V'(r) \vec{\nabla} r, \quad (1)$$

wobei der Strich die Ableitung nach  $r$  bezeichnet. Weiter gilt, wieder nach der Kettenregel,

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}, \Rightarrow \frac{\partial r}{\partial x} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} = \frac{x}{r}. \quad (2)$$

Insgesamt ist also

$$\vec{\nabla} r = \frac{\vec{x}}{r} = \vec{e}_r, \quad (3)$$

und damit folgt die Formel für die Kraft auf dem Aufgabenblatt.

(b) Die Newtonschen Bewegungsgleichungen lauten

$$m \ddot{\vec{x}} = \vec{F} = F_r(r) \vec{e}_r. \quad (4)$$

Für die Zeitableitung der Gesamtenergie folgt

$$\dot{E} = m \dot{\vec{x}} \cdot \ddot{\vec{x}} + \dot{r} V'(r). \quad (5)$$

Wegen der Kettenregel ist aber

$$\dot{r} = \dot{\vec{x}} \cdot \vec{\nabla} r \stackrel{(3)}{=} \dot{\vec{x}} \cdot \vec{e}_r. \quad (6)$$

Damit folgt

$$\dot{E} = \dot{\vec{x}} \cdot [m \ddot{\vec{x}} + \vec{e}_r V'(r)] = \dot{\vec{x}} \cdot [m \ddot{\vec{x}} - \vec{F}] \stackrel{(4)}{=} 0. \quad (7)$$

Für den Drehimpuls finden wir

$$\dot{\vec{L}} = m(\dot{\vec{x}} \times \dot{\vec{x}} + \vec{x} \times \ddot{\vec{x}}) = \vec{x} \times (m \ddot{\vec{x}}) \stackrel{(4)}{=} \vec{x} \times F_r \vec{e}_r = 0. \quad (8)$$

Sowohl die Energie als auch der Drehimpuls sind also für Zentralkräfte erhalten.

(c) Wegen  $\hat{L} = \vec{e}_z = \text{const}$  ergibt sich aufgrund der geometrischen Bedeutung des Vektorprodukts, daß  $\vec{x}$  und  $\vec{v} = \dot{\vec{x}}$  stets in der  $xy$ -Ebene des gewählten Koordinatensystems liegen. In Komponenten ist der Drehimpuls also

$$\vec{L} = m \begin{pmatrix} y\dot{z} - z\dot{y} \\ z\dot{x} - x\dot{z} \\ x\dot{y} - y\dot{x} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ L \end{pmatrix}. \quad (9)$$

Aus der Annahme, daß das Koordinatensystem so gelegt ist, daß  $z_0 = z(0) = 0$  ist, folgt daraus, daß auch  $v_z(0) = \dot{z}(0) = 0$  sein muß. Die Bewegungsgleichung für die  $z$ -Koordinate ist

$$m\ddot{z} = F_r(r)\frac{z}{r}. \quad (10)$$

Diese wird zusammen mit den Anfangsbedingungen offenbar durch  $z(t) = 0 = \text{const}$  gelöst.

Es bleibt noch die Erhaltung des Drehimpulsbetrages zu deuten. Betrachten wir dazu die Bewegung des Teilchens zur Zeit  $t$  über ein infinitesimales Zeitintervall  $dt$ . Dann ist

$$dA = \frac{1}{2}|\vec{x} \times (\vec{x} + \dot{\vec{x}}dt)| = \frac{1}{2}|\vec{x} \times \dot{\vec{x}}|dt = \frac{L}{2m}dt \quad (11)$$

die Änderung der Fläche des von den Radiusvektoren  $\vec{x}$  und  $\vec{x} + \dot{\vec{x}}dt$  aufgespannten Dreiecks, d.h. bis auf einen Faktor beschreibt die Erhaltung des Drehimpulsbetrags die Konstanz der Änderungsgeschwindigkeit dieser Fläche:

$$\frac{dA}{dt} = \frac{L}{2m}. \quad (12)$$

Bei der Planetenbewegung entspricht dies dem zweiten Keplerschen Gesetz. Wie wir eben nachgewiesen haben, gilt es für beliebige Zentralkräfte und nicht nur für das Newtonsche Gravitationsgesetz  $|\vec{F}_{\text{grav}}| \propto 1/r^2$ .

(d) Für die Geschwindigkeit folgt damit in Zylinderkoordinaten  $(r, \varphi, z)$

$$\vec{v} = \dot{\vec{r}} = \dot{r} \begin{pmatrix} \cos \varphi \\ \sin \varphi \\ 0 \end{pmatrix} + r\dot{\varphi} \begin{pmatrix} -\sin \varphi \\ \cos \varphi \\ 0 \end{pmatrix} = \dot{r}\vec{e}_r + r\dot{\varphi}\vec{e}_\varphi. \quad (13)$$

Da weiter  $\vec{e}_r \times \vec{e}_\varphi = \vec{e}_z$  gilt, folgt

$$\vec{L} = m\vec{r} \times \vec{v} = mr^2\dot{\varphi}\vec{e}_r \times \vec{e}_\varphi = mr^2\dot{\varphi}\vec{e}_z \Rightarrow L = mr^2\dot{\varphi}. \quad (14)$$

(e) Im Ausdruck für die Gesamtenergie können wir  $\dot{\varphi}$  mit Hilfe des Drehimpulsbetrags gemäß (14) eliminieren:

$$E = \frac{m}{2}\vec{v}^2 + V(r) = \frac{m}{2}(\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2) + V(r) = \frac{m}{2}\dot{r}^2 + \frac{L^2}{2mr^2} + V(r). \quad (15)$$

Dies ist analog zur Gesamtenergie eines Teilchens, das sich entlang einer festen Richtung im „effektiven Potential“

$$V_{\text{eff}}(r) = \frac{L^2}{2mr^2} + V(r) \quad (16)$$

bewegt. Ableiten von  $E$  nach der Zeit liefert wegen (7) die entsprechende Bewegungsgleichung

$$\dot{E} = \dot{r}[m\ddot{r} + V'_{\text{eff}}(r)] = 0, \quad (17)$$

also

$$m\ddot{r} = -V'_{\text{eff}}(r) = \frac{L^2}{mr^3} - V'(r) = \frac{L^2}{mr^3} + F_r(r). \quad (18)$$

Neben der Radialkraft wirkt also bei der effektiven Radialbewegung auch noch die momentane Zentrifugalkraft.

$$F_Z = \frac{L^2}{m r^3} \stackrel{(14)}{=} \frac{m^2 r^4 \dot{\phi}^2}{m r^3} = m r \dot{\phi}^2. \quad (19)$$

Aus der Erhaltung des Drehimpulses folgt

$$\dot{L} = 2m r \dot{r} \dot{\phi} + m r^2 \ddot{\phi} = 0 \rightarrow m r^2 \ddot{\phi} = -2m r \dot{r} \dot{\phi}. \quad (20)$$

- (f) Offenbar besitzt die Radialbewegungsgleichung (18) genau dann eine Lösung  $r = R = \text{const}$ , wenn es eine Lösung der Gleichung  $V'_{\text{eff}}(R) = 0$  gibt, also wenn  $V$  entweder ein lokales Extremum (Minimum oder Maximum) oder einen Sattelpunkt mit horizontaler Wendetangente besitzt.
- (g) Anschaulich ist klar, daß die Kreisbahn nur dann stabil gegen kleine Störungen ist, wenn das Potential ein lokales Minimum bei  $r = R$  besitzt. Formal erkennen wir dies, indem wir die Energie (15) bis zur zweiten Ordnung in der Störung  $\eta$  entwickeln

$$E = \frac{m}{2} \dot{\eta}^2 + V_{\text{eff}}(R) + V'_{\text{eff}}(R)\eta + \frac{1}{2} V''_{\text{eff}}(R)\eta^2 + \mathcal{O}(\eta^3) = \frac{m}{2} \dot{\eta}^2 + V_{\text{eff}}(R) + \frac{1}{2} V''_{\text{eff}}(R)\eta^2 + \mathcal{O}(\eta^3), \quad (21)$$

denn voraussetzungsgemäß ist  $V'_{\text{eff}}(R) = 0$ . Durch Zeitableitung und Verwendung des Energiesatzes findet man

$$m \ddot{\eta} = -V''_{\text{eff}}(R)\eta + \mathcal{O}(\eta^2). \quad (22)$$

Das ist (unter Vernachlässigung der Terme  $\mathcal{O}(\eta^2)$ ) die Bewegungsgleichung für einen harmonischen Oszillator falls  $V''_{\text{eff}}(R) > 0$  ist, falls  $V_{\text{eff}}$  an der Stelle  $r = R$  ein Minimum besitzt. Für  $V''_{\text{eff}}(R) < 0$  erhält man hingegen für  $\eta$  eine exponentiell mit der Zeit wachsende Lösung, d.h. die anfangs kleine Störung wächst exponentiell an, so daß die Näherung für große Zeiten sicher nicht mehr gültig ist, d.h. in diesem Falle ist die Kreisbahn mit Sicherheit instabil gegen kleine Störungen.

**Bemerkung:** Falls  $V''_{\text{eff}}(R) = 0$ , muß man höhere Ordnungen der Taylorreihe in (21) betrachten. Ist die erste nicht verschwindende Ableitung von  $V_{\text{eff}}$  an der Stelle  $r = R$  gerade, liegt wieder entweder ein Minimum oder Maximum vor, und entsprechend erhält man stabile bzw. instabile Kreisbahnen. Falls die erste nicht verschwindende Ableitung ungerade ist, besitzt  $V_{\text{eff}}$  bei  $r = R$  einen Wendepunkt mit horizontaler Wendetangente, und die Bewegung ist i.a. instabil unter kleinen Störungen.

- (h) Im gegebenen Fall gilt erste Ableitung ist

$$V'_{\text{eff}}(r) = -\frac{L^2}{m r^3} - F_r(r) = -\frac{L^2}{m r^3} + \frac{\alpha}{r^n}. \quad (23)$$

Für  $V'_{\text{eff}}(R) = 0$  gilt also

$$\frac{L^2}{m R^3} = \frac{\alpha}{R^n} \quad (24)$$

Für die zweite Ableitung folgt

$$V''_{\text{eff}}(R) = \frac{3L^2}{m R^4} - \frac{n\alpha}{R^{n+1}} \stackrel{(24)}{=} \frac{\alpha(3-n)}{R^{n+1}}. \quad (25)$$

Die Kreisbahn ist also für  $n < 3$  in jedem Fall stabil, für  $n > 3$  instabil. Für die Planetenbewegung ist  $n = 2$  (Newtonsches Gravitationsgesetz), und damit sind Kreisbahnen stabil.

---

### (P26) Zwillingsparadoxon

Für beide Zwillinge vergeht ihre jeweilige Eigenzeit. Bezeichne  $t$  die Zeit im erdfesten Koordinatensystem. Für die Eigenzeit  $\tau$  des Karussell-Fahrer nach  $N$  Umläufen gilt also

$$\tau = \int_0^{nT} dt \sqrt{1 - \frac{v^2(t)}{c^2}}. \quad (26)$$

Dabei ist die Geschwindigkeit durch

$$v = R\omega = \text{const} \quad (27)$$

und die Zeit für einen Umlauf im erdfesten Koordinatensystem durch  $T = 2\pi/\omega$  gegeben. Es ist also

$$\tau = NT \sqrt{1 - \frac{R^2 \omega^2}{c^2}} \quad (28)$$

gegeben. Für den in Ruhe gebliebenen Zwilling vergeht also eine um den Lorentz-Faktor

$$\gamma = 1/\sqrt{1 - R^2 \omega^2/c^2} \quad (29)$$

längere Zeit, und er altert folglich relativ zum Karussell-Fahrer um diesen Faktor mehr (Zeit-Dilatation).

Es liegt allerdings keine paradoxe Situation vor, denn aufgrund der Beschleunigung des Karussell-Fahrers befindet sich dieser nicht in einem Inertialsystem, d.h. seine physikalische Situation läßt sich von der des ruhenden Zwillinges objektiv unterscheiden, z.B. aufgrund der auftretenden Fliehkraft im Ruhesystem des Karussells.

**Bemerkung:** Dieser (übrigens rein kinematische!) Effekt der speziellen Relativitätstheorie läßt sich mit hoher Präzision nachmessen. Ein Beispiel ist die mittlere Lebensdauer instabiler Teilchen in Experimentierspeicherringen, wo sie relativ zum Labor mit sehr großer Geschwindigkeit unterwegs sind. Nachgewiesenermaßen verlängert sich deren Lebenszeit, gemessen vom Labor aus, um den Lorentzfaktor  $\gamma$ . Solche Experimente zeigen auch, daß die (zum Teil sehr großen) Beschleunigungen der Teilchen keinen Einfluß auf den Zeitdilationsfaktor haben. Details dazu finden Sie in der Wikipedia:

[http://en.wikipedia.org/wiki/Time\\_dilation\\_of\\_moving\\_particles](http://en.wikipedia.org/wiki/Time_dilation_of_moving_particles)