Übungen zur Theoretischen Physik 1 – Lösungen zu Blatt 12

Hausübungen (Abgabe: 08.02.2013)

(H25) Relativistische Ladung im homogenen elektrischen Feld (10 Punkte)

Der Ansatz liefert keine Widersprüche für die y- und z-Komponenten der Bewegungsgleichung. Zusammen mit den Anfangsbedingungen folgt, daß $y(t) = z(t) = 0 = \text{const}$ diese Gleichungen lösen.

Allein die x-Komponente ist eine nichttriviale Differentialgleichung. Wir können sie wegen $E = \text{const}$ zunächst unter Berücksichtigung der Anfangebedingung $v_x(t = 0) = 0$ einfach hochintegrieren. Das liefert

$$\frac{v_x}{\sqrt{1 - v_x^2/c^2}} = \frac{q}{m_0} E t = At. \tag{1}$$

Quadrieren dieser Gleichung liefert

$$v_x^2 = A^2 t^2 (1 - v_x^2/c^2). \tag{2}$$

Es ist also

$$v_x(t) = \frac{Act}{\sqrt{c^2 + A^2 t^2}}. \tag{3}$$

Das Vorzeichen beim Auflösen der Wurzel ergibt sich dabei aus dem anfänglich gültigen relativistischen Grenzfall, der für $c^2 \gg A^2 t^2$ gilt. Dann ist $v_x \simeq At$.
Nun gilt aufgrund der Kettenregel

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \sqrt{c^2 + A^2 t^2} = \frac{A^2 t}{\sqrt{c^2 + A^2 t^2}}, \tag{4}$$

d.h. zusammen mit der Anfangsbedingung $x(t = 0) = 0$ folgt durch weiteres Hochintegrieren

$$x(t) = \int_0^t \mathrm{d}t' v_x(t') = \frac{c}{A} \left(\sqrt{c^2 + A^2 t^2} - c \right). \tag{5}$$

Für $A^2 t^2 \ll c^2$ können wir die Wurzel in eine Reihe entwickeln

$$\sqrt{c^2 + A^2 t^2} = c \sqrt{1 + A^2 t^2/c^2} = c \left[1 + \frac{A^2 t^2}{2c^2} + \mathcal{O}\left(\frac{A^4 t^4}{c^4} \right) \right]. \tag{6}$$

Dies in (3) bzw. (5) eingesetzt liefert die nichtrelativistische Näherung

$$v(t) \approx At, \quad x(t) \approx \frac{A}{2} t^2, \tag{7}$$

wie zu erwarten für die Bewegung eines nichtrelativistischen Teilchens bei einer konstanten Beschleunigung $A = qE/m_0$.

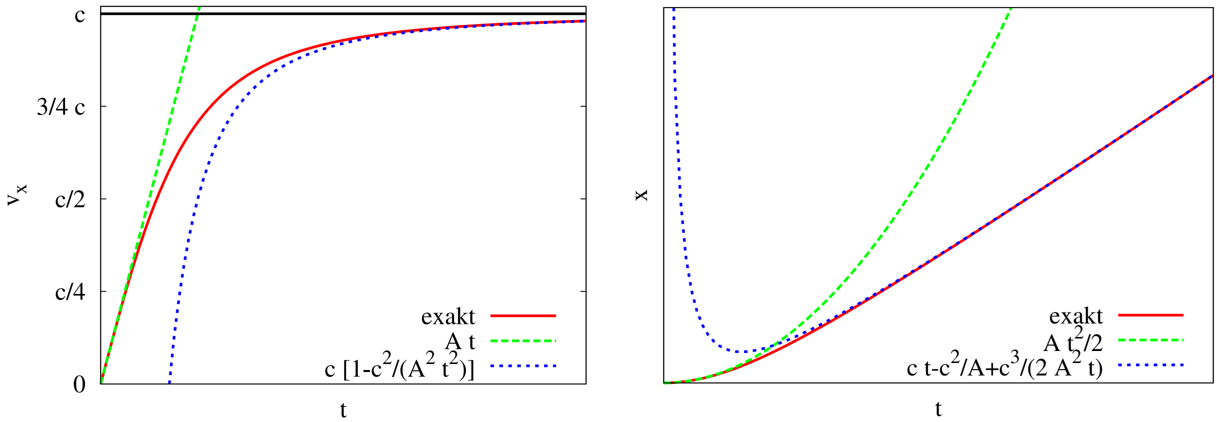

Abbildung 1: Geschwindigkeit und Ortskoordinate eines relativistischen Teilchens im konstanten elektrischen Feld (rot: exakte Lösung (3,5); grün: nichtrelativistische Näherung (7), gültig für $|At| \ll c$; blau: ultrarelativistische Näherung (9,10), gültig für $|At| \gg c$).

Für $A^2t^2 \gg c^2$ ergibt sich hingegen[1]

$$\frac{1}{\sqrt{c^2+A^2t^2}} = \frac{1}{At}\frac{1}{\sqrt{1+c^2/(A^2t^2)}} \approx \frac{1}{At}\left(1-\frac{c^2}{2A^2t^2}\right). \tag{8}$$

Dies in (3) eingesetzt liefert

$$v_x(t) \approx c\left(1-\frac{c^2}{2A^2t^2}\right). \tag{9}$$

Die Geschwindigkeit strebt also für $t \to \infty$ gegen c, bleibt aber immer $< c$, wie wir oben angenommen haben.
Für x haben wir

$$\sqrt{c^2+A^2t^2} = At\sqrt{1+c^2/(A^2t^2)} \approx At + \frac{c^2}{2At} \Rightarrow x(t) \approx \frac{c}{A}\left(At - c + \frac{c^2}{2At}\right). \tag{10}$$

[1]Wir nehmen hier o.B.d.A. an, daß $A > 0$.