Prof. C. Greiner, Dr. H. van Hees **Wintersemester 2012/2013**

Übungen zur Theoretischen Physik 1 – Lösungen zum Mathe-Test

Aufgabe 1: Bruchrechnung

Lösen Sie die folgenden Gleichungen nach x auf

(a) $\frac{x}{x-2} - \frac{1}{2} = \frac{3}{2x-4}$

Lösung: Angenommen, daß $x \neq 2$, darf man die Gleichung mit $x-2$ multiplizieren. Es folgt

$$x - \frac{1}{2}(x-2) = \frac{3}{2} \Leftrightarrow \frac{x}{2} + 1 - \frac{3}{2} \Leftrightarrow x = 1.$$

(b) $2x + (4-2u)\frac{ux+3}{u-1} = 0$

Für $u \neq 1$ dürfen wir mit $u-1$ durchmultiplizieren. Ausmultiplizieren und Zusammenfassen der Terme mit und ohne x liefern dann

$$(3u - u^2 - 1)x - 3u + 6 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{3u-6}{3u-u^2-1},$$

vorausgesetzt, daß $3u - u^2 - 1 \neq 0$ bzw. $u \neq (3 \pm \sqrt{5})/2$.

Aufgabe 2: Differentiation

Geben Sie die Ableitung folgender Funktionen an

- Produktregel

  (a) $f(x) = u(x)v(x)$

  Die Produktregel lautet

  $$f'(x) = u'(x)v(x) + u(x)v'(x).$$

  (b) $f(x) = x^2 \sin x$

  Mit der Produktregel mit $u(x) = x^2$ und $v(x) = \sin x$ folgt wegen $u'(x) = 2x$ und $v'(x) = \cos x$

  $$f'(x) = 2x \sin x + x^2 \cos x.$$

- Quotientenregel

  (a) $f(x) = \frac{u(x)}{v(x)}$

  Die Quotientenregel lautet

  $$f'(x) = \frac{u'(x)v(x) - u(x)v'(x)}{v^2(x)}.$$

(b) $f(x) = \frac{\cos x}{x^2+1}$
Mit der Quotientenregel mit $u(x) = \cos x$ und $v(x) = x^2 + 1$ folgt wegen $u'(x) = -\sin x$ und $v'(x) = 2x$

$$f'(x) = -\frac{(x^2+1)\sin x + 2x\cos x}{(x^2+1)^2}$$

- Kettenregel

(a) $f(x) = u[v(x)]$
Die Kettenregel lautet

$$f'(x) = v'(x)u'[v(x)].$$

(b) $f(x) = \mathrm{e}^{x^2+5x}$
Mit der Kettenregel folgt mit $u(x) = \exp x$ und $v(x) = x^2 + 5x$ wegen $u'(x) = \exp x$ und $v'(x) = 2x + 5$

$$f'(x) = (2x+5)\exp(x^2+5x)$$

Aufgabe 3: Grenzwerte
Bestimmen Sie die folgenden Grenzwerte:

(a) $\lim_{n\to\infty} \frac{n^2+2n+5}{n^2+1}$
Es gilt

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^2+2n+5}{n^2+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n^2+1)+2n+4}{n^2+1} = 1 + \lim_{n\to\infty} \frac{2n+4}{n^2+1} = 1.$$

(b) $\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x}$
Da der Grenzwert von der Form “0/0” ist, können wir die de L’Hospitalsche Regel anwenden, wonach in dem Fall

$$\lim_{x\to x_0} \frac{u(x)}{v(x)} = \lim_{x\to x_0} \frac{u'(x)}{v'(x)}$$

ist. Auf unseren Fall $u(x) = \sin x$, $v(x) = x$, d.h. $u'(x) = \cos x$ und $v'(x) = 1$ angewandt liefert dies mit $x_0 = 0$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{\cos x}{1} = 1. \tag{1}$$

(c) $\lim_{x\to 0} x \ln x$
Auch hier ist die de L’Hospitalsche Regel für Grenzwerte der Form “∞/∞” anwendbar, und zwar wie folgt

$$\lim_{x\to 0} x \ln x = \lim_{x\to 0} \frac{\ln x}{1/x} = \lim_{x\to 0} \frac{1/x}{-1/x^2} = \lim_{x\to 0}(-x) = 0.$$

Aufgabe 4: Integration

(a) Partielle Integration. Rechenvorschrift:

$$\int u(x)v'(x)\mathrm{d}x = u(x)v(x) - \int u'(x)v(x)\,\mathrm{d}x.$$

Berechnen Sie $\int x\sin^2 x\,\mathrm{d}x$. Tipp: Benutzen Sie $\sin^2\alpha = \frac{1}{2}[1-\cos(2\alpha)]$. Setzen wir $u(x)=x$ und $v(x)=\sin^2 x$ finden wir $u'(x)=1$ und mit Hilfe des Hinweises

$$v(x) = \int \sin^2 x\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int [1-\cos(2x)]\,\mathrm{d}x = \frac{x}{2} - \frac{\sin(2x)}{4}.$$

All das in die oben angegebene Produktregel eingesetzt liefert schließlich

$$\int x\sin^2 x\,\mathrm{d}x = \frac{x^2}{2} - \frac{x\sin(2x)}{4} - \int\left(\frac{x}{2} - \frac{\sin(2x)}{4}\right) = \frac{x^2 - x\sin(2x)}{4} - \frac{1}{8}\cos(2x).$$

(b) Substitution. Rechenvorschrift:

$$\int_a^b f[u(x)]u'(x)\,\mathrm{d}x = \int_{u(a)}^{u(b)} f(u)\mathrm{d}u$$

Berechnen Sie $\int x\mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x$ mit der Substitution $u(x)=x^2$.
Es gilt $2x\mathrm{d}x = \mathrm{d}u$ und also

$$\int x\mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int \mathrm{e}^{-u}\,\mathrm{d}u = -\frac{\mathrm{e}^{-u}}{2} = -\frac{\mathrm{e}^{-x^2}}{2}.$$

(c) Partialbruchzerlegung. Berechnen Sie $\int \frac{x^3}{x^2-1}\,\mathrm{d}x$. Hinweis: Formen Sie den Bruch durch Partialbruchzerlegung in die Form

$$\frac{P_1(x)}{P_2(x)} = P_3(x) + \frac{A_1}{x-a_1} + \frac{A_2}{x-a_2} + \cdots$$

um, wobei P_1, P_2 und P_3 Poloynome und $a_1, a_2, \ldots$ die (einfachen) Nullstellen des Nennerpolynoms sind.

Es ist

$$\frac{x^3}{x^2-1} = \frac{x(x^2-1+1)}{x^2-1} = x + \frac{x}{x^2-1} = x + \frac{A_1}{x-1} + \frac{A_2}{x+1}.$$

Multipliziert man diese Gleichung mit x^2-1, folgt

$$x^3 = x(x^2-1) + A_1(x+1) + A_2(x-1).$$

Setzt man in diese Gleichung $x=1$ ein, erhält man sofort

$$1 = 2A_1 \Rightarrow A_1 = \frac{1}{2},$$

und mit $x = -1$

$$-1 = -2A_2 \Rightarrow A_2 = \frac{1}{2}.$$

Es ist also

$$\int \frac{x^3}{x^2-1}\,\mathrm{d}x = \int \left(x + \frac{1/2}{x-1} + \frac{1/2}{x+1}\right) = \frac{x^2}{2} + \frac{1}{2}\left[\ln(|x-1|) + \ln(|x+1|)\right] = \frac{x^2}{2} + \frac{1}{2}\ln(|x^2-1|).$$

Aufgabe 5: Vektorrechnung

Die folgenden Vektoren sind in Komponentendarstellung bzgl. einer kartesischen Basis im $\mathbb{R}^3$ zu verstehen. Gegeben sind die folgenden Vektoren

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1/2 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \vec{c} = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix}, \quad \vec{d} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Berechnen Sie die folgenden Ausdrücke bzw. beantworten Sie die folgenden Fragen.

- Addition, Subtraktion, Längen und Winkel von Vektoren:

  (a) $\vec{a} + \vec{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ 7/2 \\ 3 \end{pmatrix}$

  (b) $\vec{a} - \vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 5/2 \\ 5 \end{pmatrix}$

  (c) $a = |\vec{a}| = \sqrt{29}$, $b = |\vec{b}| = 3/2$

  (d) $\angle(\vec{a}, \vec{b}) = \arccos\left(\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{ab}\right) = \arccos\left(-\frac{1}{3\sqrt{29}}\right)$

- Skalarprodukt, Kreuzprodukt und Spatprodukt:

  Das Skalarprodukt zweier Vektoren in kartesischen Koordinaten lautet

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3$$

  und das Vektorprodukt

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_2 b_3 - a_3 b_2 \\ a_3 b_1 - a_1 b_3 \\ a_1 b_2 - a_2 b_1 \end{pmatrix}.$$

  Daraus folgt durch Einsetzen der obigen Vektoren

  (a) $\vec{a} \cdot \vec{b} = -1/2$

(b) $\vec{a} \times \vec{b} = \begin{pmatrix} -5 \\ 6 \\ -2 \end{pmatrix}$. Was bedeutet dieses Produkt geometrisch? Es handelt sich um einen Vektor, der senkrecht auf $\vec{a}$ und $\vec{b}$ steht, und zwar so, daß $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{a} \times \vec{b}$ in dieser Reihenfolge rechtshändig orientiert sind („Rechte-Hand-Regel"). Die Länge ist der Flächeninhalt des von $\vec{a}$ und $\vec{b}$ aufgespannten Parallelogramms.

(c) $(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{d} = 21$. Was bedeutet dieser Ausdruck geometrisch? Es handelt sich um das Volumen des von $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{d}$ aufgespannten Parallelepipeds (also eines „schiefen Quaders").

- Linearkombinationen

  (a) Sind $\vec{a}$ und $\vec{b}$ linear abhängig? Nein, denn dann müßte es eine Zahl λ mit $\vec{a} = \lambda\vec{b}$ geben. Dann wäre aber $\vec{a} \times \vec{b} = \lambda\vec{a} \times \vec{a} = 0$, und das ist nicht der Fall, wie wir oben nachgerechnet haben.

  (b) Liegt $\vec{c}$ in der von $\vec{a}$ und $\vec{b}$ aufgespannten Ebene? Wir bilden das Spatprodukt aus den drei Vektoren. Es folt durch direktes Rechnen $(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} = 0$, d.h. die drei Vektoren liegen in einer Ebene.

Aufgabe 6: Komplexe Zahlen

Gegeben seien die komplexen Zahlen $z_1 = 9 - 7\mathrm{i}$ und $z_2 = 3 + 2\mathrm{i}$.

- Grundrechenarten: Berechnen Sie

  (a) $z_1 + z_2 = 12 - 5\mathrm{i}$

  (b) $z_1 z_2 = 41 - 3\mathrm{i}$

  (c) $\frac{z_1}{z_2} = 1 - 3\mathrm{i}$

- Darstellung in Polarform $z = r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$ $(\theta \in (-\pi, \pi])$. Stellen Sie $z_3 = -1 - \mathrm{i}$ in Polarform dar!

  Es gilt

$$\begin{aligned} r &= |z_3| = \sqrt{2}, \\ \theta = \operatorname{sign}(\operatorname{Im} z_3) \arccos\left(\frac{\operatorname{Re} z_3}{|z_3|}\right) &= -\arccos\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = -\frac{3\pi}{4} \\ \Rightarrow z_3 &= \sqrt{2}\exp\left(-\frac{3\pi\mathrm{i}}{4}\right). \end{aligned}$$

Aufgabe 7: Einfache lineare Differentialgleichungen

Eine homogene lineare Differentialgleichung n-ter Ordnung besitzt die Form

$$a_0(x) + a_1(x)\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + \cdots + a_n(x)\frac{\mathrm{d}^n x}{\mathrm{d}t^n} = 0.$$

Falls $x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)$ genau n voneinander linear unabhängige Lösungen sind, so lautet die allgemeine Lösung der Differentialgleichung

$$x(t) = A_1 x_1(t) + A_2 x_2(t) + \dots + A_n x_n(t),$$

wobei $A_1, A_2, \dots, A_n$ beliebige „Integrationskonstanten" sind.
Geben Sie die allgemeine Lösung der folgenden linearen Differentialgleichungen an.

(a) $\frac{\mathrm{d}N}{\mathrm{d}t} = -\lambda N$

Durch „Trennen der Variablen" erhält man

$$\frac{\mathrm{d}N}{N} = -\lambda \mathrm{d}t \Rightarrow \ln\left(\frac{N}{A_1}\right) = -\lambda t \Rightarrow N(t) = A \exp(-\lambda t). \tag{2}$$

(b) $\frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2} = -\omega^2 x.$

Offenbar sind $\cos(\omega t)$ und $\sin(\omega t)$ voneinander linear unabhängige Lösungen der Differentialgleichung. Also ist die allgemeine Lösung durch

$$x(t) = A_1 \cos(\omega t) + A_2 \sin(\omega t)$$

gegeben.

(c) Welche zusätzlichen Angaben braucht man jeweils, um eine Lösung eindeutig festzulegen, damit die Koeffizienten $A_1, \dots, A_n$ eindeutig bestimmt werden können?

Man benötigt noch Anfangsbedingungen, z.B. zur Zeit $t = 0$, d.h. für Aufgabe (a) den Anfangswert $N(0)$ und für Aufgabe (b) den Anfangswert $x(0)$ und den Wert der ersten Ableitung $\dot{x}(0)$.