Taylorentwicklung von Funktionen einer Veränderlichen

17. Januar 2013

Kapitel 1

Mathematische Grundlagen

1.1 Stetigkeit, Differenzierbarkeit und $\mathscr{C}^n$-Funktionen

Der Begriff der **Stetigkeit** ist sehr wichtig. Daher Betrachten wir zunächst das $\epsilon - \delta - Kriterium$ für Stetigkeit:

Satz 1.1.1. *$\epsilon - \delta - Kriterium$.*
*Eine Funktion $y = f(x)$ heißt an der Stelle $x = x_0$ **stetig**, wenn es zu jedem beliebigen, noch so kleinen, $\epsilon > 0$ ein $\delta > 0$ gibt, so dass gilt:*

$$|f(x) - f(x_0)| < \epsilon \ \forall \ x \ mit \ |x - x_0| < \delta \tag{1.1}$$

*Ist eine Funktion $y = f(x)$ an jeder Stelle $x_0 \in \mathbb{D}$ **stetig**, so heißt die Funktion **stetig**.*

Im Klartext bedeutet dieser Satz, dass eine Funktion **stetig** ist, wenn kleine Änderungen im Argument der Funktion auch nur kleine Änderungen im Funktionswert hervorrufen - die Funktion also keine Sprünge aufweist. Der nächste wichtige Begriff, den wir benötigen, ist der der **Differenzierbarkeit**. Diese Eigenschaft ist unerlässlich um Funktionen zu untersuchen und um - in der Physik - Naturvorgänge darstellen zu können.

Satz 1.1.2. *Differenzierbarkeit.*
*Eine Funktion f heißt **differenzierbar** an der Stelle $x = x_0$, falls f an der Stelle $x = x_0$ **stetig** ist und der Grenzwert*

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \left(\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \right) \tag{1.2}$$

beziehungsweise

$$f'(x_0) = \lim_{h \to 0} \left(\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \right) \tag{1.3}$$

*existiert. Die Grenzwerte (1.2) („Differenzenquotient"), (1.3) („h-Regel") sind absolut äquivalent und heißen **Ableitung** von f an der Stelle $x = x_0$. Ist eine Funktion f in allen x_0 des Definitionsbereichs **differenzierbar**, so heißt die Funktion f **differenzierbar**.*

Man mache sich nun klar, dass aus der Differenzierbarkeit einer Funktion $f(x)$ direkt deren Stetigkeit folgt, der Umkehrschluss im Allgemeinen allerdings nicht gilt. Ein einfaches Beispiel wäre etwa die Betragsfunktion, welche auf ganz $\mathbb{R}$ stetig ist, im Ursprung jedoch nicht differenzierbar ist. Ein extremeres Beispiel wäre die sog. Weierstraßfunktion. Sie ist in jedem Punkt ihres Definitionsbereiches stetig, jedoch nirgends differenzierbar. Wie wir bald sehen werden, ist es wichtig auch höhere Ableitungen einer

Funktion bestimmen zu können. Daher müssen die Ableitungen der gegebenen Funktion $f(x)$ erneut differenzierbar sein um diese erneut ableiten zu können. Hierzu definieren wir:

Definition 1.1.3. *Stetige Differenzierbarkeit.*
Eine Funktion f heißt ***stetig differenzierbar*** *im Intervall $I = [a, b]$, wenn f in I differenzierbar und f' dort stetig ist. Man nennt solche Funktionen dann auch* $\mathscr{C}^1$***-Funktionen*** *in I oder* $\mathscr{C}^1$***-differenzierbar*** *in I.*
Analog heißt eine Funktion f für $n \in \mathbb{N}_0$ ***n-mal stetig differenzierbar*** *in I, wenn f in I n-mal differenzierbar ist und $f^{(n)}$ in I stetig ist. Man nennt solche Funktionen dann auch* $\mathscr{C}^n$***-Funktionen*** *in I oder* $\mathscr{C}^n$***-differenzierbar*** *in I.*
Die Menge aller $\mathscr{C}^n$***-Funktionen*** *mit $n \in \mathbb{N}_0$ auf dem Intervall $I = [a, b]$ bezeichnet man mit $\mathscr{C}^n(I)$.*

Bemerkung 1.1.4. *Unter den $\mathscr{C}^0$-Funktionen versteht man einfach stetige Funktionen. Daher auch die Notation „$\mathbb{N}_0$“ im vorangegangenen Abschnitt. Ist eine Funktion f beliebig oft differenzierbar, so heißt die Funktion f* $\mathscr{C}^\infty$***-Funktion****. Dementsprechend bezeichnet man die Gesamtheit dieser Funktionen auf dem Intervall I mit $\mathscr{C}^\infty(I)$.*

Kapitel 2

Taylorentwicklung

2.1 Der Satz von Taylor

Zuerst sehen wir uns den Satz von Taylor an:

Theorem 2.1.1. *Taylor.*
Jede Funktion $f \in \mathscr{C}^{n+1}(I)$ auf einem offenen Intervall $I = (a, b)$ läßt sich für $x, \xi \in I$ auf folgende Weise nach Potenzen von $(x - \xi)$ entwickeln:

$$\begin{aligned} f(x) &= f(\xi) + f'(\xi)(x-\xi) + \frac{f''(\xi)}{2!}(x-\xi)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(\xi)}{n!}(x-\xi)^n + R_n(x) \\ &= \sum_{j=0}^{n} \frac{f^{(j)}(\xi)}{j!}(x-\xi)^j + R_n(x) \\ &= P_n(x) + R_n(x) \quad , \end{aligned} \tag{2.1}$$

dabei ist das Restglied $R_n(x)$ von der Form

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)(\Theta)}}{(n+1)!}(x-\xi)^{n+1} \quad , \tag{2.2}$$

mit einer passenden, zwischen ξ und x liegenden Stelle Θ. Das heißt es gilt $\Theta = \xi + \vartheta(x - \xi)$ mit $0 < \vartheta < 1$.

Wie schon erwähnt, ermöglicht uns dieser Satz eine geeignete Funktion f in der Umgebung des Entwicklungspunktes ξ zu approximieren und somit das Verhalten der Funktion zu verstehen. Der Restterm $R_n(x)$ gibt uns letztendlich an, wie „gut“ unsere Approximation ist, also wie groß die Abweichung unserer Approximation von der tatsächlichen Funktion ist. Weiterhin sei bemerkt, dass für den Restterm mehrere verschiedene Darstellungen existieren. Bei der in Theorem 2.1.1 angegebenen Darstellung handelt es sich um die **Lagrange'sche** Form des Restgliedes. Eine weitere mögliche Form des Restgliedes wäre z.B. die **Cauchy'sche** Form:

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\Theta)}{(n+1)!}(x-\Theta)^n(x-\xi) \quad . \tag{2.3}$$

Mit der Funktion $P_n(x)$, dem **Taylorpolynom**, beschäftigen wir uns nun im Folgenden.

2.2 Taylorpolynome n-ter Ordnung

Aus dem Satz von Taylor Glg.(2.1) haben wir außer dem Restterm $R_n(x)$ noch eine weitere Funktion - die eigentliche Approximation - erhalten. Für diese Funktion $P_n(x)$ gilt:

Definition 2.2.1. *Taylorpolynom.*
Der Ausdruck

$$\begin{aligned} P_n(x) &= \sum_{j=0}^{n} \frac{f^{(j)}(\xi)}{j!}(x-\xi)^j \\ &= f(\xi) + f'(\xi)(x-\xi) + \frac{f''(\xi)}{2!}(x-\xi)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(\xi)}{n!}(x-\xi)^n \end{aligned} \tag{2.4}$$

heißt ***Taylorpolynom*** n***-ter Ordnung*** *von f an der Stelle ξ.*

2.3 Taylorreihen

Wie man schnell erkennt, ist der Parameter n aus Theorem 2.1.1 endlicher Natur. Jetzt stellt sich natürlich die Frage, was für den Grenzübergang $n \longrightarrow \infty$ passiert.

Satz 2.3.1. *Taylorreihe.*
Sei $f \in \mathscr{C}^\infty(I)$. Gilt für das Restglied $R_n(x)$ der Taylorentwicklung (2.2) der Funktion f

$$\lim_{n \longrightarrow \infty} R_n(x) = 0 \tag{2.5}$$

auf dem Intervall I, so läßt sich f dort in eine ***Taylorreihe*** *entwickeln:*

$$f(x) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{f^{(j)}(\xi)}{j!}(x-\xi)^j \quad . \tag{2.6}$$

Das letzte Resultat ist besonders wichtig, da es uns ermöglicht geeignete Funktionen in Potenzreihen zu entwickeln. Potenzreihen spielen in der Mathematik, der Physik und den Ingenieurswissenschaften eine große Rolle. Abschließend sei angemerkt, dass die Entwicklung einer Funktion um den Punkt $\xi = 0$ als **Maclaurin-Entwicklung** bezeichnet wird.

Kapitel 3

Beispiele

3.1 Reihenentwicklung von Standardfunktionen

Nun wollen wir uns einige einfache Beispiele ansehen:

(i) Entwickelt man die Exponentialfunktion um den Punkt $x = 0$ in eine Taylorreihe, so findet man:

$$\begin{aligned} \exp(x) &= 1 + x + \frac{x^2}{2} + \dots \\ &= \sum_{j=0}^{\infty} \frac{x^j}{j!} \end{aligned} \tag{3.1}$$

die bekannte Reihendarstellung der Exponentialfunktion. Nun bleibt strenggenommen noch zu überprüfen, ob das Restglied $R_n(x)$ für $n \longrightarrow \infty$ tatsächlich gegen Null geht. Nach Theorem 2.1.1. gilt:

$$\begin{aligned} \exp(x) &= \sum_{j=0}^{n} \frac{x^j}{j!} + R_n(x) \\ &= \sum_{j=0}^{n} \frac{x^j}{j!} + \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} \exp(\vartheta x) \quad , \end{aligned} \tag{3.2}$$

wobei nach Definition $\vartheta \in (0, 1)$ gilt. Hieraus folgt sofort:

$$\left| \exp(x) - \sum_{j=0}^{n} \frac{x^j}{j!} \right| \leq |R_n(x)| \leq \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!} \exp(|x|) \overset{n \to \infty}{\to} 0 \quad . \tag{3.3}$$

(ii) Entwickelt man die Kosinusfunktion um den Punkt $x = 0$ in eine Talorreihe, so findet man:

$$\begin{aligned} \cos(x) &= 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} - \dots \\ &= \sum_{j=0}^{\infty} (-1)^j \frac{x^{2j}}{(2j)!} \quad . \end{aligned} \tag{3.4}$$

Den Beweis, dass der Restterm hier ebenfalls verschwindet, möge der geneigte Leser selbst führen. (Tipp: Die Folge $|x|^{2n+2}/(2n+2)!$ ist eine Nullfolge.)