

Quantenfeldtheorie II

Owe Philipsen

Goethe-Universität Frankfurt am Main – Sommersemester 2023

Version: 3. Mai 2024

Inhaltsverzeichnis

1	Pfadintegrale in QM und QFT	3
1.1	Die quantenmechanische Übergangsamplitude, 1+1 dim.	3
1.2	Erinnerung Funktionalableitung:	7
1.3	Der harmonische Oszillator	8
1.4	Das euklidische Pfadintegral	11
1.5	Vakuumerwartungswerte	12
1.6	Greenfunktionen	15
1.7	Erzeugendes Funktional für den harmonischen Oszillator	17
1.8	Verallgemeinerung: n -dim Systeme mit quadratischer Wirkung . . .	21
1.9	Pfadintegralquantisierung skalarer Felder	23
1.10	Euklidische Formulierung der skalaren QFT	26
2	Erzeugende Funktionale und Entwicklungsverfahren	30
2.1	Störungsentwicklung im Rahmen der PI-Quantisierung	30

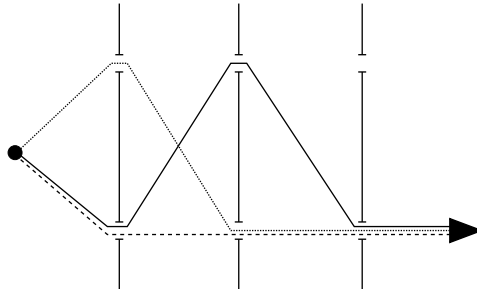
1 Pfadintegrale in QM und QFT

- + Alternativer und faszinierender Formalismus zur Quantisierung
- + elegant, ohne Kommutationsregeln
- + einfachere und z. T. systematischere Gestaltung von Rechnungen
- + nichtstörungstheoretische Methoden
- ⇒ Dyson-Schwinger, funktionale Renormierungsgruppe, Gitterfeldtheorie

Grundidee Doppelspaltexperiment:

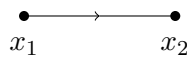
Klassische Teilchentrajektorie entweder durch einen oder anderen Spalt

Interferieren mit mehreren-unendlich vielen Spalten und Blenden: beliebige Wege von Quelle zum Zielpunkt auf dem Schirm möglich:



1.1 Die quantenmechanische Übergangsamplitude, 1+1 dim.

Teilchen zur Zeit t_1 bei x_1 , zu $t_2 > t_1$ bei x_2



Zeitentwicklung $U(t_2 - t_1) = e^{-iH(t_2-t_1)}$, QM Übergangsamplitude:

$$\underbrace{\langle x_2 | U(t_2 - t_1) | x_1 \rangle}_{\text{Schrödingerbild}} = \underbrace{\langle x_2 | e^{-iH(t_2-t_1)} | x_1 \rangle}_{\text{Heisenbergbild}} = \langle x_2, t_2 | x_1, t_1 \rangle \quad (1.1)$$

Notation letzte Gleichung:

$|x_1, t_1\rangle$ ist Heisenberg-Zustand, entspricht Schrödingerzustand zum Zeitpunkt t_1

Eigenzustand des Ortsoperators mit

$$x(t_1)|x_1, t_1\rangle = x_1|x_1, t_1\rangle \quad (1.2)$$

a) Freies Teilchen: $H = H_0 = \frac{p^2}{2m}$

$$\begin{aligned} \langle x_2 | e^{-i\frac{p^2}{2m}(t_2-t_1)} | x_1 \rangle &= \int dp \langle x_2 | p \rangle e^{-i\frac{p^2}{2m}(t_2-t_1)} \langle p | x_1 \rangle, & \langle x | p \rangle &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{ipx} \\ &= \int \frac{dp}{2\pi} e^{ip(x_2-x_1)} e^{-i\frac{p^2}{2m}(t_2-t_1)} \end{aligned} \quad (1.3)$$

$$\text{Gaußintegral: } \int_{-\infty}^{\infty} dx e^{-\frac{a}{2}x^2} = \sqrt{\frac{2\pi}{a}} \quad a > 0 \quad (1.4)$$

Besitzt analytische Fortsetzung nach: $a \in \mathbb{C}, \operatorname{Re} a > 0$

Rand: $a = iA, A \in \mathbb{R}/\{0\}$:

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx e^{-i\frac{A}{2}x^2} = \sqrt{\frac{2\pi}{iA}} \quad (1.5)$$

Quadratische Ergänzung:

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx e^{-\frac{a}{2}x^2 + bx} = \int_{-\infty}^{\infty} dx e^{-\frac{a}{2}(x - \frac{b}{a})^2 + \frac{b^2}{2a}} \quad (1.6)$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} dy e^{-\frac{a}{2}y^2} e^{\frac{b^2}{2a}} = e^{\frac{b^2}{2a}} \sqrt{\frac{2\pi}{a}} \quad (1.7)$$

Damit:

$$\boxed{\langle x_2 | e^{-iH_0(t_2-t_1)} | x_1 \rangle = \sqrt{\frac{m}{2\pi i(t_2-t_1)}} e^{i\frac{m(x_2-x_1)^2}{2(t_2-t_1)}}} \quad (1.8)$$

$$\text{mit } \frac{a}{2} = \frac{i(t_2-t_1)}{2m}, \quad b = i(x_2-x_1), \quad \frac{b^2}{2a} = \frac{-(x_2-x_1)^2 m}{2i(t_2-t_1)}$$

b) Mit Wechselwirkung: $H = H_0 + V(x)$

Im Allgemeinen keine geschlossene Lösung mehr

Für kleine Zeitintervalle $t_2 - t_1 = \varepsilon$

$$\begin{aligned} U(\varepsilon) = e^{-iH\varepsilon} = e^{-i(H_0+V)\varepsilon} &= e^{-iV\frac{\varepsilon}{2}} e^{-iH_0\varepsilon} e^{-iV\frac{\varepsilon}{2}} + O(\varepsilon^3) \\ &\equiv W(\varepsilon) + O(\varepsilon^3) \end{aligned} \quad (1.9)$$

wg. Baker-Campbell-Hausdorff $e^A e^B = e^{A+B+\frac{1}{2}[A,B]+\dots}$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \langle x_2 | W(\varepsilon) | x_1 \rangle &= e^{-iV(x_2)\frac{\varepsilon}{2}} \langle x_2 | e^{-iH_0\varepsilon} | x_1 \rangle e^{-iV(x_1)\frac{\varepsilon}{2}} \\ &= \sqrt{\frac{m}{2\pi i\varepsilon}} \exp \left\{ i \frac{m}{2\varepsilon} (x_2 - x_1)^2 - i \frac{\varepsilon}{2} [V(x_2) + V(x_1)] \right\} \end{aligned} \quad (1.10)$$

$$\left(\hat{V}|y\rangle = V(y)|y\rangle \quad \text{wurde verwendet} \right) \quad (1.11)$$

Teile Zeitintervall in kleine Stücke: $\varepsilon = \frac{t_2 - t_1}{N}$, $\begin{matrix} \varepsilon \\ ++++++ \\ t_1 \qquad t_2 \end{matrix}$

$$e^{-iH(t_2-t_1)} = \lim_{N \rightarrow \infty} e^{-iH\varepsilon N} = \lim_{N \rightarrow \infty} U(\varepsilon)^N = \lim_{N \rightarrow \infty} [W(\varepsilon)^N + O(\varepsilon^3)] \quad (1.12)$$

$$= \lim_{N \rightarrow \infty} W(\varepsilon)^N \quad \text{Lie-Trotter-Produktformel} \quad (1.13)$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \quad \langle x_2 | e^{-iH(t_2-t_1)} | x_1 \rangle &= \lim_{N \rightarrow \infty} \langle x_2 | (e^{-iH\varepsilon})^N | x_1 \rangle, \quad 1 = \int dy |y\rangle \langle y| \\ &= \lim_{N \rightarrow \infty} \int dy_1 \dots dy_{N-1} \langle x_2 | e^{-iH\varepsilon} | y_1 \rangle \langle y_1 | e^{-iH\varepsilon} | y_2 \rangle \dots \langle y_{N-1} | e^{-iH\varepsilon} | x_1 \rangle \\ &= \lim_{N \rightarrow \infty} \int dy_1 \dots dy_{N-1} \langle x_2 | U(\varepsilon) | y_1 \rangle \dots \langle y_{N-1} | U(\varepsilon) | x_1 \rangle \\ &= \lim_{N \rightarrow \infty} \left(\frac{m}{2\pi i\varepsilon} \right)^{\frac{N}{2}} \int dy_1 \dots dy_{N-1} \\ &\quad \exp \left\{ i \frac{m}{2\varepsilon} \left[(x_2 - y_1)^2 + (y_1 - y_2)^2 + \dots + (y_{N-1} - x_1)^2 \right] \right. \\ &\quad \left. - i\varepsilon \left[\frac{V(x_2)}{2} + V(y_1) + \dots + V(y_{N-1}) + \frac{V(x_1)}{2} \right] \right\} \end{aligned} \quad (1.14)$$

$$\text{Exponent:} \quad S_N = \sum_{k=1}^N \varepsilon \left\{ \frac{m}{2} \left(\frac{y_{k-1} - y_k}{\varepsilon} \right)^2 - \frac{V(y_{k-1}) + V(y_k)}{2} \right\} \quad (1.15)$$

$$\text{mit} \quad y_0 \equiv x_2, \quad y_N \equiv x_1, \quad y_k = y(t'_k)$$

$$S = \lim_{N \rightarrow \infty} S_N = \int_{t_1}^{t_2} dt' \left[\frac{m}{2} \dot{y}^2 - V(y(t')) \right] \quad (1.16)$$

Klassische Wirkung!

$$S[y] = \int dt' L[y(t'), \dot{y}(t')] \quad (1.17)$$

$$\text{Def:} \quad Dy = Dy(t) \equiv \lim_{N \rightarrow \infty} \left(\frac{m}{2\pi i\varepsilon} \right)^{\frac{N}{2}} dy(t_1) \dots dy(t_{N-1}) \quad (1.18)$$

$$\text{Damit} \quad \boxed{\langle x_2 | e^{-iH(t_2-t_1)} | x_1 \rangle = \int_{y(t_1)=x_1}^{y(t_2)=x_2} Dy e^{iS[y]}} \quad (1.19)$$

Pfadintegral: Integration über alle Wege von x_1 nach x_2

N.B.: QM-Übergangsamplitude ist ein Funktionalintegral, Ausdruck hergeleitet ohne Kommutatorregeln für Operatoren, hängt ab von klassischer Wirkung

Klassische Trajektorie: $\delta S = 0$

QM: Überlagerung *aller* Trajektorien, gewichtet mit ihrer klassischen Wirkung

Mathematisch *nicht* wohldefiniert:

- Integralmaß nur für endliches N definiert, d.h. erst integrieren, dann Grenzwert bilden
- Normierungsfaktor im Maß divergiert für $N \rightarrow \infty$
- Integrand oszilliert, d.h. selbst für endliche N konvergiert das Integral im Allgemeinen nicht

1.2 Erinnerung Funktionalableitung:

$$\begin{aligned}\underline{\text{Def.:}} \quad \delta F[x] &= \int ds \frac{\delta F}{\delta x(s)} \delta x(s) \quad \text{in Analogie zu} \\ df &= \sum_i \frac{\partial f}{\partial x_i} dx_i\end{aligned}$$

Beispiele:

1.

$$\begin{aligned}F[x] &= x(a) = \int ds x(s) \delta(s-a) \\ \delta F &= \int ds \delta x(s) \delta(s-a) = \int ds \frac{\delta F}{\delta x(s)} \delta x(s) \\ \Rightarrow \frac{\delta x(a)}{\delta x(s)} &= \delta(s-a)\end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned}F[x] &= \int ds f(s)x(s) \\ \delta F &= \int ds f(s)\delta x(s) \\ \frac{\delta F}{\delta x(s)} &= f(s)\end{aligned}$$

3.

$$\begin{aligned}F[x] &= \int ds \int dt f(s,t)x(s)x(t) \\ \delta F &= \int ds \int dt f(s,t) \left[\delta x(s)x(t) + x(s)\delta x(t) \right] \\ &= \int ds \int dt \left[f(s,t)x(t)\delta x(s) + f(t,s)x(t)\delta x(s) \right] \\ &= \int ds \int dt \left[f(s,t)x(t) + f(t,s)x(t) \right] \delta x(s) \\ \frac{\delta F}{\delta x(s)} &= \int dt x(t) \{ f(s,t) + f(t,s) \}\end{aligned}$$

$$\text{"Taylor-Formel": } F[x] = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \int ds_1 \dots \int ds_n F^{(n)}(s_1, \dots, s_n) x(s_1) \dots x(s_n)$$

1.3 Der harmonische Oszillator

$$L = \frac{m}{2} \dot{x}^2 - \frac{m\omega^2}{2} x^2 \quad (1.20)$$

$$\text{Bewegungsgleichung:} \quad -\frac{\delta S}{\delta x(t)} = m \frac{d^2 x}{dt^2} + m\omega^2 x(t) = 0 \quad (1.21)$$

Sei $x_c(t)$ Lösung mit Randbedingungen $x_c(t_1) = x_1$, $x_c(t_2) = x_2$

Beliebiger Pfad: $x(t) = x_c(t) + y(t)$ mit $y(t_1) = y(t_2) = 0$

$$S[x] = S[x_c] + \int_{t_1}^{t_2} dt \frac{\delta S[x_c]}{\delta x(t)} y(t) + \frac{1}{2} \int_{t_1}^{t_2} \int_{t_1}^{t_2} dt dt' \frac{\delta^2 S}{\delta x(t) \delta x(t')} y(t) y(t') \quad (1.22)$$

$$+ \dots \quad (1.23)$$

Es ist $\frac{\delta S}{\delta x}[x_c] = 0$

$$\frac{\delta^2 S}{\delta x(t) \delta x(t')} = -m \frac{d^2}{dt^2} \delta(t-t') - m\omega^2 \delta(t-t') = -m \left(\frac{d^2}{dt^2} + \omega^2 \right) \delta(t-t') \quad (1.24)$$

$$S[x] = S[x_c] + \frac{m}{2} \int_{t_1}^{t_2} dt (\dot{y}^2 - \omega^2 y^2) = S[x_c] + S[y] \quad (1.25)$$

$$\text{mit} \quad \int dt \ddot{y}(t) y(t) = - \int dt \dot{y}(t)^2 \quad (1.26)$$

Beachte: Dieser Ausdruck für S ist exakt, weil die volle Wirkung keine höheren als quadratische Terme besitzt!

Übergangsamplitude:

$$K(x_2, t_2; x_1, t_1) = \langle x_2 | e^{-iH(t_2-t_1)} | x_1 \rangle = \int_{\substack{y(t_1)=0 \\ y(t_2)=0}} Dx e^{iS[x]} = e^{iS[x_c]} \int Dy e^{iS[y]} \quad (1.27)$$

Abhängigkeit von Randbedingungen steckt vollständig in x_c

$$x_c(t) = A \sin \omega t + B \cos \omega t \quad (1.28)$$

$$x_c(t_1) = x_1 = A \sin \omega t_1 + B \cos \omega t_1 \quad (1.29)$$

$$x_c(t_2) = x_2 = A \sin \omega t_2 + B \cos \omega t_2 \quad (1.30)$$

$$\Rightarrow x_1 \sin \omega t_2 - x_2 \sin \omega t_1 = B \underbrace{(\cos \omega t_1 \sin \omega t_2 - \cos \omega t_2 \sin \omega t_1)}_{\sin \omega(t_2 - t_1)} \quad (1.31)$$

$$x_2 \cos \omega t_1 - x_1 \cos \omega t_2 = A \underbrace{(\sin \omega t_2 \cos \omega t_1 - \cos \omega t_2 \sin \omega t_1)}_{\sin \omega(t_2 - t_1)} \quad (1.32)$$

$$x_c(t) = \frac{1}{\sin \omega(t_2 - t_1)} \left[(x_2 \cos \omega t_1 - x_1 \cos \omega t_2) \sin \omega t \right. \quad (1.33)$$

$$\left. + (x_1 \sin \omega t_2 - x_2 \sin \omega t_1) \cos \omega t \right] \quad (1.34)$$

Einsetzen in L und Integration, $T = t_2 - t_1$

$$S[x_c] = \frac{m\omega}{2 \sin \omega T} \left[(x_2^2 + x_1^2) \cos \omega T - 2x_1 x_2 \right] \quad (1.35)$$

Noch zu berechnen:

$$F(T) \equiv \int Dy e^{iS[y]} = K(0, T; 0, 0) \quad (1.36)$$

$$\Rightarrow K(x_2, t_2; x_1, t_1) = e^{iS[x_c]} F(T) \quad (1.37)$$

Partielle Integration:

$$S[y] = \frac{m}{2} \int_0^T dt y(t) \left(-\frac{d^2}{dt^2} - \omega^2 \right) y(t) \quad (1.38)$$

$F(T)$ ist Gaußintegral mit Operatorkern

$$\text{Eigenfunktion von } \left(-\frac{d^2}{dt^2} - \omega^2 \right) : y_n(t) = \sqrt{\frac{2}{T}} \sin \frac{n\pi t}{T} \quad (1.39)$$

$$\text{orthonormal: } \int_0^T dt y_n(t) y_m(t) = \delta_{n,m} \quad (1.40)$$

$$\text{Eigenwerte: } \left(-\frac{d^2}{dt^2} - \omega^2 \right) y_n(t) = \left(\frac{n^2 \pi^2}{T^2} - \omega^2 \right) y_n(t) \equiv \lambda_n y_n(t) \quad (1.41)$$

$$\text{Entwicklung von } y(t) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n y_n(t) \quad (1.42)$$

$$\Rightarrow S[y] = \frac{m}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \int_0^T dt a_n a_m y_n(t) y_m(t) \lambda_m \quad (1.43)$$

$$= \frac{m}{2} \sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 \lambda_n \quad (1.44)$$

Variablentrafo:

$$\begin{aligned} y(t) &= \sum_{n=1}^{\infty} a_n y_n(t) \\ dy(t) &= \sum_{n=1}^{\infty} da_n y_n(t) \\ Dy &= J \prod_{n=1}^{\infty} da_n \end{aligned} \quad (1.45)$$

Jacobideterminante:

$$J = N \frac{\partial(y_1 \dots y_N)}{\partial(a_1 \dots a_n)} = N \begin{vmatrix} \frac{\partial y(t_1)}{\partial a_1} & \frac{\partial y(t_2)}{\partial a_1} & \dots & \frac{\partial y(t_n)}{\partial a_1} \\ \vdots & & & \\ \frac{\partial y(t_1)}{\partial a_n} & & & \frac{\partial y(t_n)}{\partial a_n} \end{vmatrix} \quad (1.46)$$

N ist die (unendliche) Konstante aus dem Maß (1.18)

$\Rightarrow J$ ist ω -unabhängig!

$$F(T) = \int Dy e^{iS[y]} = J \int \prod_{n=1}^{\infty} da_n e^{i \frac{m}{2} \sum_n \lambda_n a_n^2} \quad (1.47)$$

$$= J \prod_{n=1}^{\infty} \int da_n e^{i \frac{m}{2} \lambda_n a_n^2} = J \prod_{n=1}^{\infty} \left[\frac{m}{2\pi i} \lambda_n \right]^{-\frac{1}{2}} \quad (1.48)$$

Bestimmung von J ohne die Determinante auszurechnen:

Für $\omega = 0$ ist die Übergangsamplitude die eines freien Teilchens mit $x_2 = x_1 = 0$, vgl. (1.36),

$$\langle x_2 | e^{-iH_0 T} | x_1 \rangle = \sqrt{\frac{m}{2\pi i T}} e^{i \frac{m}{2T} (x_2 - x_1)^2} \quad (1.49)$$

$$\Rightarrow F_{\omega=0}(T) = \left(\frac{m}{2\pi i T} \right)^{1/2}, \quad \lambda_n^{\omega=0} = \frac{n^2 \pi^2}{T^2} \quad (1.50)$$

Verhältnis für $\omega = 0$ und $\omega \neq 0$ enthält kein J ,

$$\begin{aligned} \frac{F(T)}{F_{\omega=0}(T)} &= \prod_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\lambda_n}{\lambda_n^{\omega=0}} \right)^{-1/2} = \prod_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\frac{n^2 \pi^2}{T^2} - \omega^2}{\frac{n^2 \pi^2}{T^2}} \right)^{-1/2} \\ &= \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{\omega^2 T^2}{n^2 \pi^2} \right)^{-1/2} = \left(\frac{\sin \omega T}{\omega T} \right)^{-1/2} \end{aligned} \quad (1.51)$$

$$\Rightarrow F(T) = \left(\frac{m\omega}{2\pi i \sin \omega T} \right)^{1/2} \quad (1.52)$$

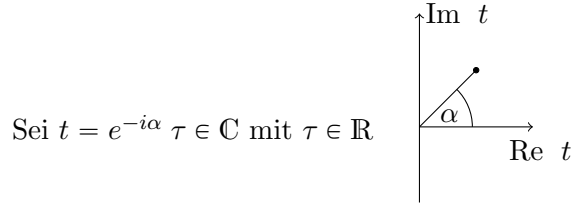
$$\Rightarrow \boxed{K(x_2, t_2; x_1, t_1) = \left(\frac{m\omega}{2\pi i \sin \omega T} \right)^{1/2} \exp \left\{ i \frac{m\omega}{2 \sin \omega T} [(x_2^2 + x_1^2) \cos \omega T - 2x_1 x_2] \right\}} \quad (1.53)$$

Dies ist die Mehlerformel

1.4 Das euklidische Pfadintegral

PIs aufgrund ihres oszillierenden Integranden (und des ∞ -dimensionalen Maßes) mathematisch nicht wohldefiniert

a) Übergang zu imaginärer Zeit, Wickrotation



Sei $t = e^{-i\alpha} \tau \in \mathbb{C}$ mit $\tau \in \mathbb{R}$

speziell $\alpha = \frac{\pi}{2} : t = -i\tau$

τ : "euklidische Zeit", da $x^\mu \cdot x_\mu = t^2 - \mathbf{x}^2$

$$\longrightarrow -\tau^2 - \mathbf{x}^2 = -x_E^\mu x_{E\mu} = -x_{E\mu} \cdot x_{E\mu} \quad (1.54)$$

Mit euklidischem 4er-Vektor $x_E^\mu = x_{E\mu} = (\tau, \mathbf{x})$

Zeitentwicklungsoperator: $U = e^{-iHt} \rightarrow e^{-H\tau}$

\Rightarrow für $\tau > 0$ positiv definit und beschränkter Operator!

$$\langle x_2 | e^{-iH(t_2-t_1)} | x_1 \rangle \longrightarrow \langle x_2 | e^{-H(\tau_2-\tau_1)} | x_1 \rangle \quad (1.55)$$

$$S = \int_0^t dt' \left[\frac{m}{2} \dot{x}^2 - V(x(t)) \right] \longrightarrow -i \int_0^\tau d\tau' \left[-\frac{m}{2} \left(\frac{dx}{d\tau'} \right)^2 - V(x(-i\tau')) \right] \quad (1.56)$$

$$\Rightarrow iS \rightarrow - \int_0^\tau d\tau' \left[\frac{m}{2} \dot{x}^2 + V(x(\tau')) \right] \equiv -S_E \quad (1.57)$$

Durch Aufteilung in infinitesimale euklidische Zeitintervalle zeigt man auch direkt analog zu (1.14)

$$\langle x_2 | e^{-H(\tau_2-\tau_1)} | x_1 \rangle = \int Dx e^{-S_E[x]} \quad (1.58)$$

Bemerkungen:

- S_E reell und von unten beschränkt, Integral konvergiert
- euklidisches Pfadintegral ist reell
- Faktor e^{-S_E} unterdrückt Pfade, die stark von klassischer Lösung abweichen, Dämpfung

1.5 Vakuumerwartungswerte

Vakuumerwartungswerte = vacuum expectation values, VEV's

Behauptung:

i)

$$\langle 0|A|0\rangle = \lim_{\tau \rightarrow \infty} \frac{\langle x_2, \frac{\tau}{2} | A | x_1, -\frac{\tau}{2} \rangle}{\langle x_2, \frac{\tau}{2} | x_1, -\frac{\tau}{2} \rangle} \quad (1.59)$$

ii)

$$\langle 0|A|0\rangle = \lim_{\tau \rightarrow \infty} \frac{\text{Tr}(e^{-H\tau} A)}{\text{Tr}(e^{-H\tau})} \quad (1.60)$$

vgl. Statistische Mechanik

Beweis:

i) Anmerkung: $\langle \alpha | e^{iHt} = (e^{-iHt} | \alpha \rangle)^\dagger \rightarrow \langle \alpha | e^{H\tau} \neq (e^{-H\tau} | \alpha \rangle)^\dagger$

$$\langle x_2, \frac{\tau}{2} | A | x_1, -\frac{\tau}{2} \rangle = \langle x_2 | e^{-H\frac{\tau}{2}} A e^{-H\frac{\tau}{2}} | x_1 \rangle \quad (1.61)$$

$$= \sum_{n,m} \langle x_2 | n \rangle \langle n | A | m \rangle \langle m | x_1 \rangle \underbrace{e^{-E_n \frac{\tau}{2}}}_{e^{-E_0 \frac{\tau}{2}}} \underbrace{e^{-E_m \frac{\tau}{2}}}_{e^{-(E_n - E_0) \frac{\tau}{2}}} \dots$$

$$\begin{array}{c} \uparrow \\ \text{Einschub} \\ \text{zweier VONS} \end{array} \quad H | n \rangle = E_n | n \rangle$$

$$\xrightarrow{\tau \rightarrow \infty} \langle x_2 | 0 \rangle \langle 0 | x_1 \rangle \langle 0 | A | 0 \rangle e^{-E_0 \tau} \{1 + O(e^{-\text{const.} \tau})\} \quad (1.62)$$

$$\langle x_2, \frac{\tau}{2} | x_1, -\frac{\tau}{2} \rangle = \langle x_2, \frac{\tau}{2} | \mathbb{1} | x_1, -\frac{\tau}{2} \rangle \xrightarrow{\tau \rightarrow \infty} \langle x_2 | 0 \rangle \langle 0 | x_1 \rangle e^{-E_0 \tau} \{1 + O(e^{-\text{const.} \tau})\} \quad (1.63)$$

Division beider Ausdrücke \Rightarrow Behauptung

ii) Setze $x_1 = x_2 = x$ und integriere über $x \Rightarrow$ Spur

$$\int dx \langle x | e^{-H\frac{\tau}{2}} A e^{-H\frac{\tau}{2}} | x \rangle = \text{Tr} \left(e^{-H\frac{\tau}{2}} A e^{-H\frac{\tau}{2}} \right) = \text{Tr}(A e^{-H\tau}) \quad (1.64)$$

$$= \int dx \sum_{n,m} \langle x | n \rangle \langle n | A | m \rangle \langle m | x \rangle e^{-E_n \frac{\tau}{2}} e^{-E_m \frac{\tau}{2}} \quad (1.65)$$

$$= \sum_{n,m} \langle n | A | m \rangle \langle m | \underbrace{\int dx | x \rangle \langle x |}_= \mathbb{1} | n \rangle e^{-E_n \frac{\tau}{2}} e^{-E_m \frac{\tau}{2}} \quad (1.66)$$

$$= \sum_n \langle n | A | n \rangle e^{-E_n \tau} \quad \text{wg. } \langle m | n \rangle = \delta_{mn} \quad (1.67)$$

$$\xrightarrow{\tau \rightarrow \infty} e^{-E_0 \tau} \langle 0 | A | 0 \rangle \{1 + O(e^{-\text{const.} \tau})\} \quad (1.68)$$

Wiederhole mit $A = \mathbb{1}$ und bilde Verhältnis

Bemerkungen:

- Asymptotisches Verhalten für $\tau \rightarrow \infty$ bewirkt Projektion auf Grundzustand
- Aus Gleichheit von i) und ii): Randbedingungen an x_1, x_2 spielen mit $\tau \rightarrow \infty$ keine Rolle bzw. kürzen sich heraus

Von besonderem Interesse sind VEV's von Operatorprodukten, z.B.

$$\langle 0|A|0\rangle = \langle 0|x(t_2)x(t_1)|0\rangle, \quad t_2 > t_1 \quad (1.69)$$

mit $x(t) = e^{iHt} x e^{-iHt}$ Heisenbergbild $\rightarrow e^{H\tau} x e^{-H\tau} = x(\tau)$

$$\begin{aligned} \langle 0|x(t_2)x(t_2)|0\rangle &= \langle 0|e^{iHt_2} x e^{-iH(t_2-t_1)} x e^{-iHt_1}|0\rangle \\ &\xrightarrow[\substack{\text{Wick} \\ t=-i\tau}]{\quad} \langle 0|e^{H\tau_2} x e^{-H(\tau_2-\tau_1)} x e^{-H\tau_1}|0\rangle \\ &= \langle 0|x(\tau_2)x(\tau_1)|0\rangle \\ &\stackrel{\text{i)}}{=} \lim_{\tau \rightarrow \infty} \frac{\langle x_2, \frac{\tau}{2} | x(\tau_2)x(\tau_1) | x_1, -\frac{\tau}{2} \rangle}{\langle x_2, \frac{\tau}{2} | x_1, -\frac{\tau}{2} \rangle} \end{aligned} \quad (1.70)$$

Pfadintegraldarstellung Nenner bereits bekannt, wg. Analogie zu stat. Mech. (1.60) nennt man ihn "Zustandssumme":

$$Z_E(\tau) \equiv \langle x_2, \frac{\tau}{2} | x_1, -\frac{\tau}{2} \rangle = \langle x_2 | e^{-H\tau} | x_1 \rangle = \int Dy e^{-S_E[y]} \quad (1.71)$$

Pfadintegraldarstellung Zähler: wieder in diskretisierter Zeit

$$\begin{array}{ccccccc} & & x & & x & & \\ | & | & | & | & | & | & | \\ -\frac{\tau}{2} & & \tau_1 & & \tau_2 & & \frac{\tau}{2} \end{array}$$

Rechnung analog zu (1.14), lediglich mit zusätzlichen Ortsoperatoren x , die auf die eingeschobenen Orsteigenzustände entsprechende Faktoren $x(\tau_1), x(\tau_2)$ liefern.

Alternativ:

$$\begin{aligned} & \langle x_2, \frac{\tau}{2} | x(\tau_2) x(\tau_1) | x_1, -\frac{\tau}{2} \rangle \\ &= \langle x_2 | e^{-H(\tau/2-\tau_2)} x e^{-H(\tau_2-\tau_1)} x e^{-H(\tau_1+\tau/2)} | x_1 \rangle \end{aligned} \quad (1.72)$$

$$\begin{aligned} &= \int dx(\tau_2) \int dx(\tau_1) \langle x_2 | e^{-H(\tau/2-\tau_2)} | x(\tau_2) \rangle x(\tau_2) \langle x(\tau_2) | e^{-H(\tau_2-\tau_1)} | x(\tau_1) \rangle x(\tau_1) \\ & \quad \langle x(\tau_1) | e^{-H(\tau_1+\tau/2)} | x_1 \rangle \\ &= \int dx(\tau_2) \int dx(\tau_1) \left(\int_{y((\tau_2)=x(\tau_2))}^{y(\tau/2)=x_2} Dy e^{-S_E[y]} \right) x(\tau_2) \\ & \quad \left(\int_{y((\tau_1)=x(\tau_1))}^{y(\tau_2)=x(\tau_2)} Dy e^{-S_E[y]} \right) x(\tau_1) \\ & \quad \left(\int_{y((- \tau/2)=x_1)}^{y(\tau_1)=x(\tau_1)} Dy e^{-S_E[y]} \right) \end{aligned} \quad (1.73)$$

Umbenennen der Pfade ergibt insgesamt:

$$\langle x_2, \frac{\tau}{2} | x(\tau_2) x(\tau_1) | x_1, -\frac{\tau}{2} \rangle = \int Dx x(\tau_2) x(\tau_1) e^{-S_E[x]} \quad (1.74)$$

mit Pfaden $x(\tau)$, $\tau \in [-\frac{\tau}{2}, \frac{\tau}{2}]$

Beachte: linke und rechte Seite unterschiedlich bezüglich Zeitargumenten:

$$\begin{aligned} & \begin{matrix} \tau_2 \geq \tau_1 \\ \downarrow \end{matrix} \langle 0 | x(\tau_2) x(\tau_1) | 0 \rangle = \lim_{\tau \rightarrow \infty} \frac{1}{Z_E(\tau)} \int Dx \begin{matrix} \text{symm. unter } \tau_1 \leftrightarrow \tau_2 \\ \uparrow \end{matrix} x(\tau_2) x(\tau_1) e^{-S_E[x]}, \end{aligned} \quad (1.75)$$

Def. Zeitordnung:

$$T x(\tau_1) x(\tau_2) \equiv \Theta(\tau_1 - \tau_2) x(\tau_1) x(\tau_2) + \Theta(\tau_2 - \tau_1) x(\tau_2) x(\tau_1) \quad (1.76)$$

\Rightarrow PI-Darstellung von VEV's:

$$\langle 0 | T x(\tau_1) x(\tau_2) | 0 \rangle = \lim_{\tau \rightarrow \infty} \frac{1}{Z_E(\tau)} \int Dx x(\tau_1) x(\tau_2) e^{-S_E[x]} \quad (1.77)$$

$$Z_E(\tau) = \int Dx e^{-S_E[x]} \quad (1.78)$$

Bemerkung: Für endliches τ wähle periodische R. B.: $x(-\frac{\tau}{2}) = x(\frac{\tau}{2}) = 0$
Im Limes $\tau \rightarrow \infty$ spielen die R.B. keine Rolle, siehe oben

1.6 Greenfunktionen

Verallgemeinerung auf n -faches Produkt von Ortsoperatoren zu verschiedenen Zeiten: n -Punkt -Greenfunktionen

$$\langle 0 | T x(\tau_1) \dots x(\tau_n) | 0 \rangle = \lim_{\tau \rightarrow \infty} \frac{1}{Z_E(\tau)} \int Dx x(\tau_1) \dots x(\tau_n) e^{-S_E[x]} \quad (1.79)$$

$\tau \rightarrow \infty$: Projektion auf Vakuumzustand wie oben

$\lim_{\tau \rightarrow \infty}$ ab sofort impliziert, notiere durch $Z_E(\tau) \rightarrow Z_E$

Erzeugende Funktionale:

Sei $j(\tau)$ eine reellwertige Funktion.

$$\text{Def.:} \quad Z_E[j] \equiv \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \int d\tau_1 \dots d\tau_n \langle 0 | T x(\tau_1) \dots x(\tau_n) | 0 \rangle j(\tau_1) \dots j(\tau_n) \quad (1.80)$$

$Z_E[j]$ ist ein Funktional

$$Z_E[j] = 1 + \int d\tau \langle 0 | x(\tau) | 0 \rangle j(\tau) \quad (1.81)$$

$$+ \frac{1}{2!} \int d\tau_1 d\tau_2 \langle 0 | T x(\tau_1) x(\tau_2) | 0 \rangle j(\tau_1) j(\tau_2) \quad (1.82)$$

$$+ \dots \quad (1.83)$$

$$= \langle 0 | T \exp \left\{ \int d\tau x(\tau) j(\tau) \right\} | 0 \rangle \quad (1.84)$$

Die Koeffizienten der Taylorentwicklung dieses Funktionals sind die n -Punkt-Greenfunktionen:

$$\langle 0 | T x(\tau_1) \dots x(\tau_n) | 0 \rangle = \frac{\delta^n Z_E[j]}{\delta j(\tau_1) \dots \delta j(\tau_n)} \Big|_{j=0} \quad (1.85)$$

Man nennt $Z_E[j]$ erzeugendes Funktional, da n -fache funktionale Differenziation die n -Punkt-Funktionen erzeugt. Die $j(\tau_i)$ heißen "Quellen".

Kompakte Darstellung durch PI:

$$Z_E[j] = \frac{\int Dx e^{-S_E[x] + \int d\tau j(\tau) x(\tau)}}{\int Dx e^{-S_E[x]}} \quad (1.86)$$

Zurück zu reeller Zeit: Umkehrung der Wickrotation

$$t = e^{-i\alpha}\tau, \quad \alpha \rightarrow 0 \quad (1.87)$$

$$\langle 0 | T x(\tau_1) \dots x(\tau_n) | 0 \rangle \rightarrow \langle 0 | T x(t_1) x(t_n) | 0 \rangle \quad (1.88)$$

$$Z[j] = \langle 0 | T \exp \left\{ i \int dt x(t) j(t) \right\} | 0 \rangle \quad (1.89)$$

$$\langle 0 | T x(t_1) \dots x(t_n) | 0 \rangle = \frac{1}{i^n} \left. \frac{\delta^n Z[j]}{\delta j(t_1) \dots \delta j(t_n)} \right|_{j=0} \quad (1.90)$$

1.7 Erzeugendes Funktional für den harmonischen Oszillator

$$S_E = \int d\tau \left(\frac{m}{2} \dot{x}^2 + \frac{m\omega^2}{2} x^2 \right) = \frac{m}{2} \int d\tau x(\tau) \underbrace{\left(-\frac{d^2}{d\tau^2} + \omega^2 \right)}_{=A} x(\tau) \quad (1.91)$$

$$Z_E[j] = Z_E^{-1} \int Dx e^{-S_E[x] + (j,x)} \quad (1.92)$$

$$Z_E = \int Dx e^{-S_E[x]} \quad (1.93)$$

Klassische Lösung:

$$\frac{\delta(S_E[x] - (j,x))}{\delta x(\tau)} = m \left(-\frac{d^2}{d\tau^2} + \omega^2 \right) x(\tau) - j(\tau) = 0 \quad (1.94)$$

R.B.: $x(\tau) \rightarrow 0$ für $\tau \rightarrow \infty$

$$Ax = \frac{1}{m}j, \quad \Rightarrow \quad x_c = \frac{1}{m}A^{-1}j \quad (1.95)$$

Explizite Form von A^{-1} ?

Lösung durch Fouriertrafo:

$$x(\tau) = \int \frac{d\nu}{2\pi} \tilde{x}(\nu) e^{-i\nu\tau} \quad (1.96)$$

$$j(\tau) = \int \frac{d\nu}{2\pi} \tilde{j}(\nu) e^{-i\nu\tau} \quad (1.97)$$

Einsetzen in Bewegungsgleichung:

$$(\nu^2 + \omega^2)\tilde{x}(\nu) = \frac{1}{m}\tilde{j}(\nu), \quad \Rightarrow \quad \tilde{x}(\nu) = \frac{1}{m} \frac{1}{\nu^2 + \omega^2} \tilde{j}(\nu) \quad (1.98)$$

Rücktransformation

$$x(\tau) = \frac{1}{m} \int \frac{d\nu}{2\pi} \frac{e^{-i\nu\tau}}{\nu^2 + \omega^2} \tilde{j}(\nu) \quad (1.99)$$

$$= \frac{1}{m} \int \frac{d\nu}{2\pi} \int d\tau' \frac{e^{-i\nu(\tau-\tau')}}{\nu^2 + \omega^2} j(\tau') \quad (1.100)$$

$$= - \int d\tau' D_E(\tau - \tau') j(\tau') = -(D_E, j) = -D_E \cdot j \quad (1.101)$$

mit der Definition

$$D_E(\tau) \equiv - \int \frac{d\nu}{2\pi} \frac{e^{-i\nu\tau}}{\nu^2 + \omega^2} \quad (1.102)$$

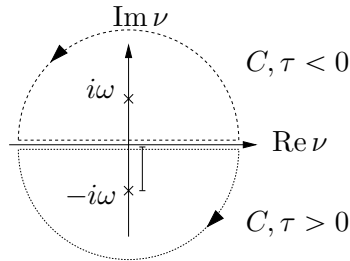
Dies ist offenbar eine Green'sche Funktion zum Operator A ,

$$\left(-\frac{d^2}{d\tau^2} + \omega^2\right) D_E(\tau) = -\delta(\tau) \quad \Leftrightarrow \quad A \cdot D_E = -\mathbb{1} \quad (1.103)$$

Bemerkungen:

- Lösung $x(\tau)$ ist eindeutig wegen R.B.
- Anwesenheit der "Quelle" j führt zu inhomogener Dgl.
- D_E ist Lösung der inhomogenen Dgl. mit Punktquelle

Auswertung von D_E mit Residuensatz, komplexes ν :



$$\begin{aligned} D_E(\tau) &= - \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\nu}{2\pi} \frac{e^{-i\nu\tau}}{(\nu + i\omega)(\nu - i\omega)} \\ &= - \int_C \frac{d\nu}{2\pi} \frac{e^{-i\nu\tau}}{(\nu + i\omega)(\nu - i\omega)} \\ &= -i \left(-\theta(\tau) \frac{e^{-\omega\tau}}{-2i\omega} + \theta(-\tau) \frac{e^{\omega\tau}}{2i\omega} \right) \\ &= -\frac{1}{2\omega} e^{-\omega|\tau|} \end{aligned} \quad (1.104)$$

Zurück zum Pfadintegral: Zerlege Pfade $x(\tau) = x_c(\tau) + y(\tau)$ mit $x_c = -\frac{1}{m}D_E \cdot j$

$$\begin{aligned}
S_E[x] - (j, x) &= \frac{m}{2}(x, Ax) - (j, x) \\
&= \frac{m}{2}(x_c, Ax_c) + \underbrace{2\frac{m}{2}(y, Ax_c)}_{\text{(wg. } A \text{ symm.)}} + \frac{m}{2}(y, Ay) - (j, x_c) - (j, y) \\
&= -\frac{1}{2m}(j, D_E j) - (y, \underbrace{A \cdot D_E j}_{=-1}) + \frac{m}{2}(y, Ay) \\
&\quad + \frac{1}{m}(j, D_E j) - \cancel{(j, y)} \\
&= \frac{1}{2m}(j, D_E j) + \frac{m}{2}(y, Ay)
\end{aligned} \tag{1.105}$$

$$\Rightarrow \int Dx e^{-S_E[x] + (j, x)} = e^{-\frac{1}{2m}(j, D_E j)} \int Dy e^{-S_E[y]} \tag{1.106}$$

Damit erzeugendes Funktional:

$$Z_E[j] = \exp -\frac{1}{2m} \int d\tau d\tau' j(\tau) D_E(\tau - \tau') j(\tau') \tag{1.107}$$

Greenfunktionen durch Differenziation nach j , z.B.

$$\langle 0 | T x(\tau_1) x(\tau_2) | 0 \rangle = \frac{\delta^2 Z_E[j]}{\delta j(\tau_1) \delta j(\tau_2)} \Big|_{j=0} = -\frac{1}{m} D_E(\tau_1 - \tau_2) \tag{1.108}$$

Analytische Fortsetzung zu reellen Zeiten:

$$\tau = it \quad , \quad \nu = i\nu_E \tag{1.109}$$

$$D(t) = -i D_E(it) = - \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\nu}{2\pi} \frac{e^{-i\nu t}}{\nu^2 - \omega^2} \tag{1.110}$$

Fortsetzung nicht eindeutig, da Pole auf reeller Achse, diese können auf verschiedene Weise integriert werden. Äquivalente DGL:

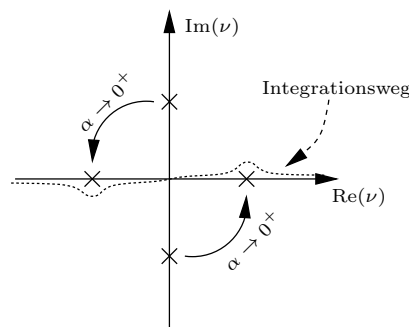
$$\left(-\frac{d^2}{dt^2} - \omega^2 \right) D(t) = -\delta(t) \tag{1.111}$$

besitzt mehrere Lösungen, analytische Fortsetzung wählt eine aus

Vorschrift:

$$\left. \begin{array}{l} \text{Rotation von } t \text{ Gegenuhreigersinn} \\ \text{Rotation von } \nu \text{ Uhreigersinn} \end{array} \right\} \nu t \text{ bleibt reell}$$

⇒ Legt fest, wie an Polen vorbei integriert werden kann



Dies ist äquivalent zu

$$-\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int \frac{d\nu}{2\pi} \frac{e^{-i\nu t}}{\nu^2 - \omega^2 + i\varepsilon} \quad (1.112)$$

Damit wieder aus Residuensatz:

$$D(t) = \frac{i}{2\omega} [\Theta(t) e^{-i\omega t} + \Theta(-t) e^{i\omega t}] = \frac{i}{2\omega} e^{-i\omega|t|} \quad (1.113)$$

Erzeugendes Funktional:

$$Z[j] = \exp \left\{ \frac{i}{2m} \int dt ds j(t) D(t-s) j(s) \right\} \quad (1.114)$$

$$\langle 0 | T(x(t_1) x(t_2)) | 0 \rangle = -\frac{i}{m} D(t_1 - t_2) \quad (1.115)$$

Bestimmung des Spektrums aus euklidischer Zweipunktfunktion:

$$\begin{aligned} \langle 0 | x(\tau) x(0) | 0 \rangle &= \langle 0 | e^{H\tau} x(0) e^{-H\tau} x(0) | 0 \rangle = \sum_n \langle 0 | x(0) | n \rangle \langle n | x(0) | 0 \rangle e^{-(E_n - E_0)\tau} \\ &= \sum_n |\langle 0 | x(0) | n \rangle|^2 e^{-(E_n - E_0)\tau} \end{aligned} \quad (1.116)$$

Klassifizierung der Zustände durch erhaltene Quantenzahlen, beim H.O. Parität:

$$P : \quad x^P = P^\dagger x P = -x, \quad [H, P] = 0 \quad (1.117)$$

P -Operator vertauscht mit Hamiltonian, da H gerade in x ; Matrixelemente:

$$\langle n | x | m \rangle = -\langle n | P^\dagger x P | m \rangle = -p_n p_m \langle n | x | m \rangle \quad (1.118)$$

mit Paritätseigenwerten $p_n \in \{-1, 1\}$. D.h. Matrixelemente zwischen Zuständen gleicher Parität verschwinden, insbes. $\langle 0 | x(0) | 0 \rangle = 0$. Sei $|1\rangle$ niedrigster Zustand mit negativer Parität.

$$\lim_{\tau \rightarrow \infty} \langle 0 | x(\tau) x(0) | 0 \rangle = |\langle 0 | x(0) | 1 \rangle|^2 e^{-(E_1 - E_0)\tau} + \dots, \quad (1.119)$$

weitere Terme gehen schneller gegen Null als der führende. Aus dem exponentiellen Abfall Bestimmung des niedrigsten Energieeigenwerts über dem Vakuum. Vergleich mit (1.104) zeigt tatsächlich

$$E_1 - E_0 = \omega. \quad (1.120)$$

1.8 Verallgemeinerung: n -dim Systeme mit quadratischer Wirkung

Harmonischer Oszillator, Systeme gekoppelter Oszillatoren, Gitterschwingungen, freies e.m. Feld, Näherungen wie Störungstheorie oder semiklassische Approximation

Für QM-Systeme in einer Dimension:

$$S_E = \frac{1}{2} (x, Ax) = \frac{1}{2} \int d\tau d\tau' x(\tau) A(\tau, \tau') x(\tau') \quad (1.121)$$

Beispiel harmonischer Oszillator:

$$A(\tau, \tau') = m \left(-\frac{d^2}{d\tau^2} + \omega^2 \right) \delta(\tau - \tau') \quad (1.122)$$

$$Z_E[j] = \frac{1}{Z_E} \int Dx e^{-\frac{1}{2}(x, Ax) + (j, x)} \quad (1.123)$$

$$Z_E = \int Dx e^{-\frac{1}{2}(x, Ax)} \quad (1.124)$$

Gaußintegral über \mathbb{R} :

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx e^{-\frac{a}{2}x^2 + bx} = \sqrt{\frac{2\pi}{a}} e^{\frac{b^2}{2a}}, \quad a > 0 \quad (1.125)$$

Jetzt Ausdehnung auf \mathbb{R}^n :

Sei $x \in \mathbb{R}^n$, $A = (A_{ij})$ $i, j = 1, \dots, n$, A reell, symmetrisch, positiv

$$(x, Ax) = \sum_{i,j} x_i A_{ij} x_j \quad (1.126)$$

Nun betrachte n -dimensionales Gaußintegral

$$I = \int d^n x e^{-\frac{1}{2}(x, Ax) + (j, x)} \quad (1.127)$$

\Rightarrow Berechnung wie in 1-Dim., zerlege in Fluktuationen um klassische Lösung

$$\delta S = 0 : \quad \frac{d}{dx_k} \left(+\frac{1}{2} x_i A_{ij} x_j - j_i x_i \right) = 0 \quad (1.128)$$

$$\frac{1}{2} A_{kj} x_j + \frac{1}{2} x_i A_{ik} - j_k = 0 \quad (1.129)$$

$$A_{jk}^{-1} \mid A_{ki} x_i = j_k \quad (1.130)$$

$$\Rightarrow x_{cj} = A_{jk}^{-1} j_k \quad (1.131)$$

$$\text{Allgemeiner Pfad: } x_i = A_{ij}^{-1} j_j + y_i \quad (1.132)$$

$$d^n x = d^n y \quad (1.133)$$

$$\begin{aligned}
-\frac{1}{2}(x, Ax) + (j, x) &= -\frac{1}{2}(A_{ik}^{-1} j_k + y_i) A_{ij}(A_{jl}^{-1} j_l + y_j) + j_i(A_{ik}^{-1} j_k + y_i) \\
&= -\frac{1}{2}(A_{ik}^{-1} j_k j_i + j_k y_k + y_i j_i + y_i A_{ij} y_j) + j_i A_{ik}^{-1} j_k + j_i y_i \\
&= \frac{1}{2} j_i A_{ij}^{-1} j_j - \frac{1}{2} y_i A_{ij} y_j \tag{1.134}
\end{aligned}$$

$$= \frac{1}{2}(j, A^{-1} j) - \frac{1}{2}(y, Ay) \tag{1.135}$$

$$\Rightarrow I = \exp \frac{1}{2}(j, A^{-1} j) \int d^n y \exp -\frac{1}{2}(y, Ay) \tag{1.136}$$

Mit $A = A^{1/2} A^{1/2}$ (Wurzel der Matrix definiert über Diagonalform und Eigenwerte)

Variablentrafo: $y'_i = A_{ij}^{1/2} y_j$

$$\int d^n y \exp -\frac{1}{2}(y, Ay) \tag{1.137}$$

$$= (\det A^{1/2})^{-1} \int d^n y' e^{-\frac{1}{2} \sum_{i=1}^n y'_i y'_i} \tag{1.138}$$

$$= (\det A)^{-1/2} (2\pi)^{\frac{n}{2}} \tag{1.139}$$

$$\Rightarrow I = \int d^n x e^{-\frac{1}{2}(x, Ax) + (j, x)} = (2\pi)^{\frac{n}{2}} (\det A)^{-\frac{1}{2}} \exp \frac{1}{2}(j, A^{-1} j) \tag{1.140}$$

Pfadintegral: benötigte Variante für unendlich viele Zeitscheiben

$$Z_E[j] = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{\left((2\pi)^{\frac{n}{2}} (\det A)^{-\frac{1}{2}} \right)^{N/2} \exp \frac{1}{2} \sum_{k=1}^N \varepsilon(j(\tau_k), A^{-1} j(\tau_k))}{\left((2\pi)^{\frac{n}{2}} (\det A)^{-\frac{1}{2}} \right)^{N/2}} \tag{1.141}$$

$$\Rightarrow \boxed{Z_E[j] = \exp \frac{1}{2}(j, A^{-1} j)} \tag{1.142}$$

mit $(j, A^{-1} j) = \int d\tau j_k(\tau) A_{kl}^{-1} j_l(\tau)$

1.9 Pfadintegralquantisierung skalarer Felder

- Skalares Feld ϕ beschreibt Teilchen mit Spin 0 (elementare skalare Teilchen: Higgs-Boson; zusammengesetzte skalare Teilchen: Mesonen mit Spin 0).
- Feldtheorie entspricht System mit unendlich vielen Freiheitsgraden
 - Freiheitsgrade eines Vielteilchensystems: $x_j(t)$.
 - Übergang zur Feldtheorie: Identifiziere $x \rightarrow \phi$ und $j \rightarrow \mathbf{x}$; damit $x_j(t) \rightarrow \phi(\mathbf{x}, t)$.

Damit Übergangsamplitude zwischen Feldkonfigurationen als PI analog zur QM:

$$\begin{aligned}\langle \phi_2(\mathbf{x}), t_2 | \phi_1(\mathbf{x}), t_1 \rangle &= \langle \phi_2(\mathbf{x}) | e^{-iH(t_2-t_1)} | \phi_1(\mathbf{x}) \rangle \\ &= \int_{\phi(\mathbf{x}, t_1)=\phi_1(\mathbf{x})}^{\phi(\mathbf{x}, t_2)=\phi_2(\mathbf{x})} D\phi e^{iS[\phi]}\end{aligned}\quad (1.143)$$

dabei ist

$$\int D\phi \equiv N \int \prod_{\mathbf{x}, t} d\phi(\mathbf{x}, t) \quad , \quad S[\phi] = \int_{t_1}^{t_2} dt \int d^3x \mathcal{L}(\phi, \partial_\mu \phi) \quad (1.144)$$

$\phi_1(\mathbf{x})$ und $\phi_2(\mathbf{x})$ sind die Randbed. bei $t = t_1$ und $t = t_2$

N ist ein unbekannter (math. nicht wohldefinierter) Normierungsfaktor

Mit $\phi_1 = \phi_2 = 0$ (Vakuumkonfiguration) und $t_1 \rightarrow -\infty, t_2 \rightarrow \infty$ folgt

$$\langle \Omega, t_2 = \infty | \Omega, t_1 = -\infty \rangle = \int D\phi e^{iS[\phi]} \equiv Z \quad (1.145)$$

und

$$\begin{aligned}G_n(x_1, \dots, x_n) &\equiv \langle \Omega | T \{ \phi(x_1) \dots \phi(x_n) \} | \Omega \rangle \\ &= \frac{1}{Z} \int D\phi \phi(x_1) \dots \phi(x_n) e^{iS[\phi]}\end{aligned}\quad (1.146)$$

G_n sind die n -Punkt-Funktionen oder Greensche Funktionen; sie hängen mit physikalischen Größen zusammen, z.B. mit S -Matrixelementen über LSZ-Formel

$\int D\phi$ impliziert wie in der QM die Randbed. $\phi(\mathbf{x}, t = -\infty) = \phi(\mathbf{x}, t = +\infty) = 0$

Normierungsfaktor kürzt sich in Greenfunktionen heraus

Bemerkungen:

- PI-Formalismus in offensichtlicher Weise von QM auf QFT übertragbar, einheitliche Beschreibung

- VEVs nun als Funktionalintegral über Produkte von gewöhnlichen Funktionen, keine Operatoren/Kommutatoren mehr
- Quantisierung durch Beiträge *aller* Feldkonfigurationen, nicht nur der klassischen
- VEVs (1.146) können störungstheoretisch berechnet werden, Berechnung ist aber nicht auf Störungstheorie beschränkt!

Definition erzeugendes Funktional:

$$Z[J] \equiv \frac{\int D\phi \exp\left(iS[\phi] + i \int d^4x J(x)\phi(x)\right)}{\int D\phi \exp\left(iS[\phi]\right)} = \frac{1}{Z} \int D\phi e^{iS[\phi] + i(J(x), \phi(x))} \quad (1.147)$$

J wird als äußere Quelle bezeichnet; $Z[0] = 1$

Damit n -Punktfunktionen durch funktionales Ableiten von $Z[J]$:

$$G_n(x_1, x_2, \dots, x_n) = (-i)^n \frac{\delta^n Z[J]}{\delta J(x_1) \delta J(x_2) \dots \delta J(x_n)} \Big|_{J=0}, \quad (1.148)$$

da

$$\frac{\delta^n Z[J]}{\delta J(x_1) \delta J(x_2) \dots \delta J(x_n)} \Big|_{J=0} = (+i)^n \frac{1}{Z} \int D\phi \phi(x_n) \dots \phi(x_2) \phi(x_1) e^{iS[\phi]}, \quad (1.149)$$

Wiederum Darstellung als funktionale Taylorreihe:

$$Z[J] = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{i^n}{n!} \int d^4x_1 \dots d^4x_n G_n(x_1, \dots, x_n) J(x_1) \dots J(x_n) = \langle 0 | T e^{i(J, \phi)} | 0 \rangle \quad (1.150)$$

Beispiel: Freies Skalarfeld

- Wirkung:

$$\begin{aligned} S[\phi] &= \int d^4x \left(\frac{1}{2} (\partial^\mu \phi) (\partial_\mu \phi) - \frac{m^2}{2} \phi^2 \right) \\ &= \frac{1}{2} \int d^4x \int d^4y \phi(x) \delta^4(x-y) \left(-\square_y - m^2 \right) \phi(y) \\ &= -\frac{1}{2} \int d^4x \int d^4y \phi(x) A(x, y) \phi(y) \end{aligned} \quad (1.151)$$

$$A(x, y) = \delta^4(x-y) (\square + m^2) \quad (1.152)$$

(klassische Feldgleichung ist die Klein-Gordon-Gleichung $(\square + m^2)\phi = 0$).

- Da Theorie quadratisch, ergibt sich für das erzeugende Funktional

$$\begin{aligned} Z[J] &= \exp \left(\frac{i}{2} \int d^4x \int d^4y J(x) A^{-1}(x, y) J(y) \right) \\ &= \exp \frac{1}{2} \left(J(x), \Delta_F(x, y) J(y) \right) \end{aligned} \quad (1.153)$$

- A^{-1} ist Lösung von

$$\int d^4y \delta^4(x - y) (\square_y + m^2) A^{-1}(y, z) = (\square_x + m^2) A^{-1}(x, z) = \delta^4(x - z). \quad (1.154)$$

Vgl. mit QFT1: $\Delta_F \equiv -iA^{-1}$ ist der Feynmanpropagator, d.h. Green-Funktion zum Klein-Gordon-Operator,

$$(\square + m^2) \Delta_F(x, y) = -i\delta^4(x - y) \quad (1.155)$$

In Fourierdarstellung:

$$\Delta_F(x, z) = i \int \frac{d^4p}{(2\pi^4)} \frac{e^{-ip(x-z)}}{p^2 - m^2 + i\varepsilon} \quad (1.156)$$

- 2-Punktfunktion:

$$\begin{aligned} G_2(x_1, x_2) &= - \frac{\delta^2 Z[J]}{\delta J(x_1) \delta J(x_2)} \Big|_{J=0} = \frac{1}{2} (\Delta_F(x_1, x_2) + \Delta_F(x_2, x_1)) \\ &= \Delta_F(x_1, x_2) \end{aligned} \quad (1.157)$$

- 4-Punktfunktion

$$\begin{aligned} G_4(x_1, \dots, x_4) &= (-i)^4 \frac{\delta^4 Z[J]}{\delta J(x_1) \dots \delta J(x_4)} \Big|_{J=0} \\ &= \Delta_F(x_1, x_2) \Delta_F(x_3, x_4) + \Delta_F(x_1, x_3) \Delta_F(x_2, x_4) \\ &\quad + \Delta_F(x_1, x_4) \Delta_F(x_2, x_3) \end{aligned} \quad (1.158)$$

Beachte: Wick'sches Theorem aus QFT1 hier nicht nötig, Funktionalableitungen erfüllen denselben Zweck!

1.10 Euklidische Formulierung der skalaren QFT

Observable Physik einer skalaren QFT ist enthalten in Wightmanfunktionen

$$W(x_1, \dots, x_n) = \langle \Omega | \phi(x_1) \dots \phi(x_n) | \Omega \rangle \quad (1.159)$$

$$\phi(x) = e^{iP^\mu x_\mu} \phi(0) e^{-iP^\mu x_\mu} \quad (1.160)$$

Impulsoperator P^μ , Eigenwerte p^μ , Translationsinvarianz Vakuum $e^{iP^\mu x_\mu} |\Omega\rangle = |\Omega\rangle$

$$\Rightarrow W(x_1 \dots x_n) = \langle \Omega | \phi(0) e^{-ip(x_1-x_2)} \phi(0) e^{-ip(x_2-x_3)} \dots e^{-ip(x_{n-1}-x_n)} \phi(0) | \Omega \rangle$$

Analytische Fortsetzung zu komplexen Koordinaten:

$$x_k = u_k - iy_k \quad u_k, y_k \in \mathbb{R}^4 \quad (1.161)$$

$$\Rightarrow \exp -ip(x_k - x_{k+1}) = \exp -ip(u_k - u_{k+1}) \exp -p(y_k - y_{k+1}) \quad (1.162)$$

Speziell für euklidische Zeiten $x_k^0 \rightarrow -ix_k^4$:

$$x_k = (-ix_k^4, \mathbf{x}_k); \quad x_k^4 \in \mathbb{R}, \mathbf{x}_k \in \mathbb{R}^3 \quad (1.163)$$

$$\Rightarrow y_k = (x_k^4, \mathbf{0}) \quad (1.164)$$

Für relativistische, physikalische Theorien ist H -Operator von unten beschränkt und positiv,

\Rightarrow Spektrum des Impulsoperators im Vorwärtslichtkegel:

$$p \in \mathbb{R}^4 : \quad p^0 \geq 0, \quad p^\mu p_\mu \geq 0 \quad (1.165)$$

\Rightarrow im Vorwärtslichtkegel $x_1^4 > x_2^4 > \dots x_n^4$ sind exp-Faktoren in (1.162) beschränkt und analytisch

Definiere Schwingerfunktion, zunächst für $x_1^4 > x_2^4 > \dots x_n^4$

$$S(\mathbf{x}_1, x_1^4, \dots \mathbf{x}_n, x_n^4) \equiv W(\mathbf{x}_1, -ix_1^4, \dots \mathbf{x}_n, -ix_n^4) \quad (1.166)$$

$$= \langle \Omega | \phi(0, \mathbf{x}_1) e^{-H(x_1^4 - x_2^4)} \phi(0, \mathbf{x}_2) \dots | \Omega \rangle \quad (1.167)$$

Beispiel: $W(x_1, x_2) = W(x_1 - x_2) = W(x)$ (wg. Translationsinvarianz)

wegen (1.162) ist $W(x)$ analytisch in unterer Halbebene für komplexes x^0

Def.: $W_\pi(x) \equiv W(-x)$; \Rightarrow analytisch in oberer Halbebene

Für reelle Zahlen und raumartige Abstände $(x_1 - x_2)^2 < 0$ ist

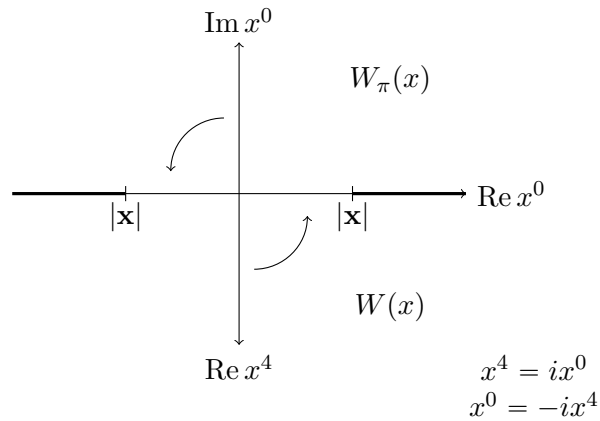
$$\langle \Omega | \phi(x_1) \phi(x_2) | \Omega \rangle = \langle \Omega | \phi(x_2) \phi(x_1) | \Omega \rangle \quad (\text{Mikrokausalität}) \quad (1.168)$$

$$\Rightarrow W(x_1, x_2) = W(x_2, x_1) \quad \text{symmetrisch} \quad (1.169)$$

$$\Rightarrow W_\pi(x) = W(-x) \quad \text{auf reeller } x^0\text{-Achse} \quad (1.170)$$

$\Rightarrow W_\pi(x), W(x)$ bilden eine analytische Funktion in der Vereinigung ihrer Definitionsbereiche

$\Rightarrow W(x)$ ist analytisch für alle $x^0 \in \mathbb{C}$ außer $\{\text{Re } x^0 \mid |x^0| > |\mathbf{x}|\}$



Verallgemeinerung auf n -Punktfunktionen:

- Schwingerfunktionen sind reell analytisch für alle nicht aufeinanderliegenden euklidischen Punkte $x_i \neq x_k$ (auch ohne Zeitordnung).
- Schwingerfunktionen transformieren kovariant unter $SO(4)$ -Rotationen und sind symmetrisch in den Argumenten
- Wightmanfunktionen und damit die QFT im Minkowskiraum können aus Schwingerfunktionen rekonstruiert werden

\Rightarrow Wightmanfunktionen sind Randwerte von Schwingerfunktionen, Annäherung an reelle Achse von unten

$$W(x_1, \dots, x_n) = \lim_{\substack{\epsilon_k \rightarrow 0 \\ \epsilon_k - \epsilon_{k+1} > 0}} S(\dots; \mathbf{x}_k, ix_k^0 + \epsilon_k; \dots) \quad (1.171)$$

Spezialfall: Greenfunktion $\langle \Omega | T(\phi(x_1) \dots \phi(x_2)) | \Omega \rangle$ (symmetrisch!)

Aus Schwingerfunktion durch Wickrotation im Gegenuhrzeigersinn

$$W(x_1, \dots, x_n) = \lim_{\alpha \rightarrow \frac{\pi}{2}} S(\dots; \mathbf{x}_k, e^{i\alpha} x_k^0; \dots) \quad (1.172)$$

ϕ^4 -Theorie im Minkowskiraum:

$$S = \int dt d^3x \mathcal{L}[\phi] \quad (1.173)$$

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} (\partial_\mu \phi) \partial^\mu \phi - \frac{m^2}{2} \phi^2 - \frac{\lambda}{4!} \phi^4 \quad (1.174)$$

$$= \frac{1}{2} (\partial_t \phi)^2 - \frac{1}{2} (\nabla \phi)^2 - \frac{m^2}{2} \phi^2 - \frac{\lambda}{4!} \phi^4 \quad (1.175)$$

$$= -\frac{1}{2} (\partial_\tau \phi)^2 - \frac{1}{2} (\nabla \phi)^2 - \frac{m^2}{2} \phi^2 - \frac{\lambda}{4!} \phi^4 \quad (1.176)$$

$$= -\mathcal{L}_E[\phi] \quad (1.177)$$

$$\mathcal{L}_E[\phi] = \frac{1}{2} (\partial_\mu \phi) (\partial_\mu \phi) + \frac{m^2}{2} \phi^2 + \frac{\lambda}{4!} \phi^4; \quad \partial_\mu = (\partial_\tau, \nabla) \quad (1.178)$$

$$iS = i(-i) \int d\tau d^3x \mathcal{L}[\phi] \quad (1.179)$$

$$= - \int d^4x_E \mathcal{L}_E[\phi] = -S_E[\phi] \quad (1.180)$$

Euklidische Wirkung (nach partieller Integration)

$$S_E[\phi] = \int d^4x_E \left\{ -\frac{1}{2} \phi \partial_\mu \partial_\mu \phi + \frac{m^2}{2} \phi^2 + \frac{\lambda}{4!} \phi^4 \right\} \quad (1.181)$$

$$= \int d^4x_E \left\{ \frac{1}{2} \phi (\square + m^2) \phi + \frac{\lambda}{4!} \phi^4 \right\} \quad (1.182)$$

$$\text{mit } \square = -\partial_\mu \partial_\mu = -\frac{\partial}{\partial \tau^2} - \nabla^2 \quad (1.183)$$

euklidischer D'Alembert-Operator

Erzeugendes Funktional der freien Theorie:

$$Z_{0E}[J] = \frac{1}{Z_{0E}} \int D\phi e^{-S_{0E}[\phi] + (J, \phi)} = \langle 0 | T e^{(J, \phi)} | 0 \rangle \quad (1.184)$$

$$Z_{0E} = \int D\phi e^{-S_{0E}[\phi]} \quad (1.185)$$

$$\Rightarrow Z_{0E}[J] = \exp \left\{ \frac{1}{2} \int d^4x d^4y J(x) \Delta_{F,E}(x-y) J(y) \right\} \quad (1.186)$$

$$= \exp \left\{ \frac{1}{2} (J, \Delta_{F,E} J) \right\} \quad (1.187)$$

n -Punktfunktionen:

$$G_{n,E}(x_1 \dots x_n) = \langle 0 | T \left\{ \phi(x_1) \dots \phi(x_n) \right\} | 0 \rangle = \frac{\delta^n Z_{0E}[J]}{\delta J(x_1) \dots \delta J(x_n)} \Big|_{J=0} \quad (1.188)$$

Euklidische 2-Punktfunktion:

$$\langle 0 | T(\phi(x)\phi(y)) | 0 \rangle = G_{2,E}(x; y) \quad (1.189)$$

$$\text{mit } (\square + m^2) G_{2,E}(x, y) = \delta^4(x - y) \quad (1.190)$$

$$\text{Lösung: } G_{2,E}(x - y) = \Delta_{F,E}(x - y) = \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \frac{e^{ip(x-y)}}{p^2 + m^2} \quad (1.191)$$

$$\Delta_{F,E}(p) = \frac{1}{p^2 + m^2} \quad (1.192)$$

↑
Beachte: keine Pole auf reeller Achse

Analog durch analytische Fortsetzung aus Propagator im Minkowskiraum:

$$i\Delta_F(x - y) = i \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \frac{e^{-ip(x-y)}}{p^2 - m^2 + i\varepsilon} \quad (1.193)$$

$$\xrightarrow{p_E = (ip_0, \mathbf{p})} i(-i) \int \frac{d^4 p_E}{(2\pi)^4} \frac{e^{-i[-ip_E(x_{0E} - y_{0E}) - (-i) - \mathbf{p}(\mathbf{x} - \mathbf{y})]}}{-p_E^2 - m^2 + i\varepsilon} \quad (1.194)$$

$$= - \int \frac{d^4 p_E}{(2\pi)^4} \frac{e^{ip_E(x-y)_E}}{p_E^2 + m^2} = -\Delta_{F,E} \quad (1.195)$$

$$(\partial^2 + m^2)\Delta_F = -i\delta^4(x - y) \rightarrow (-\partial^2 + m^2) - \Delta_{F,E} = -\delta^4(x - y) \quad (1.196)$$

$$\Rightarrow (-\partial^2 + m^2) \Delta_{F,E} = \delta^4(x - y) \quad (1.197)$$

Erzeugendes Funktional der wechselwirkenden Theorie:

$$Z_E[J] = \frac{1}{Z_E} \int D\phi e^{-S_E[\phi] + (J, \phi)} \quad (1.198)$$

$$Z_E = \int D\phi e^{-S_E[\phi]} \quad (1.199)$$

$$S_E[\phi] = S_{0E}[\phi] + S_{iE}[\phi] \quad (1.200)$$

- Integrale nicht mehr Gauß'sch
- Auswertung durch
 - a) Störungstheorie
 - b) Gitterformulierung

2 Erzeugende Funktionale und Entwicklungsverfahren

In diesem Kapitel euklidische Formulierung, weglassen von “E”

Erzeugendes Funktional der Greenfunktion für wechselwirkende Theorie

$$Z[J] = \frac{1}{Z} \int D\phi e^{-S[\phi] + (J, \phi)} \quad (2.1)$$

$$Z = \int D\phi e^{-S[\phi]} \quad (2.2)$$

$$S[\phi] = S_0[\phi] + S_i[\phi] \quad (2.3)$$

S_0 quadratisch in Feldern, d.h. freie Theorie, S_i Wechselwirkungsterm.

Hier: ϕ^4 -Theorie des reellen Skalarfelds

2.1 Störungsentwicklung im Rahmen der PI-Quantisierung

$$\begin{aligned} Z[J] &= \frac{1}{Z} \int D\phi \exp \left\{ -\frac{1}{2} \int d^4x \phi(x) (\square + m^2) \phi(x) \right. \\ &\quad \left. - \frac{\lambda}{4!} \int d^4x \phi^4(x) + \int d^4x J(x) \phi(x) \right\} \\ &= \frac{1}{Z} \int D\phi \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \left[-\frac{\lambda}{4!} \int d^4x \phi^4(x) \right]^k \\ &\quad \exp \left\{ -\frac{1}{2} \int d^4x \phi(x) (\square + m^2) \phi(x) + \int d^4x J(x) \phi(x) \right\} \\ &= \frac{1}{Z} \underbrace{\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \left[-\frac{\lambda}{4!} \int d^4x \left(\frac{\delta}{\delta J(x)} \right)^4 \right]^k}_{= \exp \left\{ -\int d^4x \mathcal{L}_i \left[\phi \rightarrow \frac{\delta}{\delta J} \right] \right\}} \underbrace{\int D\phi e^{-S_0[\phi] + (J, \phi)}}_{= Z_0 \cdot Z_0[J]} \quad (2.4) \\ &= \exp \left\{ -S_i \left[\frac{\delta}{\delta J} \right] \right\} \end{aligned}$$

$$Z[J] = \frac{Z_0}{Z} \exp \left\{ -S_i \left[\frac{\delta}{\delta J} \right] \right\} \exp \left\{ \frac{1}{2} (J, \Delta_F J) \right\} \equiv \frac{Z_0}{Z} A[J] \quad (2.5)$$

$$G_n(x_1 \dots x_n) = \frac{Z_0}{Z} \frac{\delta}{\delta J(x_1)} \dots \frac{\delta}{\delta J(x_n)} \exp \left\{ -S_i \left[\frac{\delta}{\delta J} \right] \right\} \exp \left\{ \frac{1}{2} (J, \Delta_F J) \right\} \Big|_{J=0}$$

Perturbative Auswertung:

Entwicklung von e^{-S_i}

$$\begin{aligned} A[J] &= \exp \left\{ -S_i \left[\frac{\delta}{\delta J} \right] \right\} \exp \left\{ \frac{1}{2} (J, \Delta_F J) \right\} \\ &= e^{\frac{1}{2}(J, \Delta_F J)} \{ 1 + \lambda w_1[J] + \lambda^2 w_2[J] + \dots \} \end{aligned} \quad (2.6)$$

$$\text{mit } w_1[J] = -\frac{1}{4!} e^{-\frac{1}{2}(J, \Delta_F J)} \left\{ \int d^4 x \left[\frac{\delta}{\delta J(x)} \right]^4 \right\} e^{\frac{1}{2}(J, \Delta_F J)} \quad (2.7)$$

$$\begin{aligned} w_2[J] &= +\frac{1}{2} \left(\frac{1}{4!} \right)^2 e^{-\frac{1}{2}(J, \Delta_F J)} \left\{ \int d^4 x \left[\frac{\delta}{\delta J(x)} \right]^4 \right\}^2 e^{\frac{1}{2}(J, \Delta_F J)} \\ &= +\frac{1}{2} \left(\frac{1}{4!} \right)^2 e^{-\frac{1}{2}(J, \Delta_F J)} \left\{ \dots \right\} e^{\frac{1}{2}(J, \Delta_F J)} e^{-\frac{1}{2}(J, \Delta_F J)} \left\{ \dots \right\} e^{\frac{1}{2}(J, \Delta_F J)} \\ &= -\frac{1}{2} \frac{1}{4!} e^{-\frac{1}{2}(J, \Delta_F J)} \left\{ \int d^4 x \left[\frac{\delta}{\delta J(x)} \right]^4 \right\} e^{\frac{1}{2}(J, \Delta_F J)} w_1[J] \end{aligned} \quad (2.8)$$

$$\begin{aligned} \frac{\delta}{\delta J(x)} e^{\frac{1}{2}(J, \Delta_F J)} &= \frac{1}{2} \int dy [\Delta_F(x, y) J(y) + J(y) \Delta_F(y, x)] e^{\frac{1}{2}(J, \Delta_F J)} \\ &= \int dy \Delta_F(x, y) J(y) e^{\frac{1}{2}(J, \Delta_F J)} \end{aligned} \quad (2.9)$$

$$\begin{aligned} \frac{\delta}{\delta J(x)} \frac{\delta}{\delta J(x)} e^{\frac{1}{2}(J, \Delta_F J)} &= \left[\Delta_F(x, x) \right. \\ &\quad \left. + \int dy_1 dy_2 \Delta_F(x, y_1) \Delta_F(x, y_2) J(y_1) J(y_2) \right] e^{\frac{1}{2}(J, \Delta_F J)} \end{aligned} \quad (2.10)$$

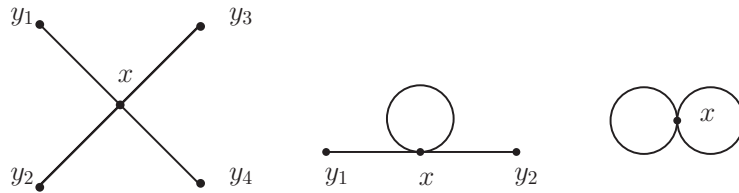
$$\begin{aligned} \left(\frac{\delta}{\delta J(x)} \right)^3 e^{\frac{1}{2}(J, \Delta_F J)} &= \left[\Delta_F(x, x) \int dy \Delta_F(x, y) J(y) + 2 \int dy \Delta_F(x, y) \Delta_F(x, x) J(y) \right. \\ &\quad \left. + \int dy_1 dy_2 dy_3 \Delta_F(x, y_1) \Delta_F(x, y_2) \Delta_F(x, y_3) \right. \\ &\quad \left. J(y_1) J(y_2) J(y_3) \right] e^{\frac{1}{2}(J, \Delta_F J)} \end{aligned} \quad (2.11)$$

$$\begin{aligned} \left(\frac{\delta}{\delta J(x)} \right)^4 e^{\frac{1}{2}(J, \Delta_F J)} &= \left[3 \Delta_F^2(x, x) + 6 \int dy_1 \int dy_2 \Delta_F(x, y_1) \Delta_F(x, y_2) \right. \\ &\quad \left. J(y_1) J(y_2) \Delta_F(x, x) + \int dy_1 \dots dy_4 \right. \\ &\quad \left. \Delta_F(x, y_1) \dots \Delta_F(x, y_4) J(y_1) \dots J(y_4) \right] e^{\frac{1}{2}(J, \Delta_F J)} \end{aligned} \quad (2.12)$$

Damit

$$\begin{aligned}
 w_1[J] = & -\frac{1}{4!} \left[\int d^4x \int d^4y_1 \dots d^4y_4 \Delta_F(x, y_1) \dots \Delta_F(x, y_4) J(y_1) \dots J(y_4) \right. \\
 & + 3! \int d^4x \int d^4y_1 d^4y_2 \Delta_F(x, y_1) \Delta_F(x, y_2) \Delta_F(x, x) J(y_1) J(y_2) \\
 & \left. + \underbrace{3 \int d^4x \Delta_F^2(x, x)} \right] \quad (2.13) \\
 & \Rightarrow \text{trägt nicht zu den } G_n \text{ bei}
 \end{aligned}$$

Diagrammatisch:



- Faktor $J(y_i)$ für jeden äußeren Punkt
- $\Delta_F(x_i, y_i)$ für jede Linie
- Integration über alle Argumente (x_i, y_j)

G_n durch Diff. nach $J(y_i)$ und $J = 0$
 $\Rightarrow w_1[J]$ liefert Beiträge zu G_2, G_4

Ebenso findet man:

$$\begin{aligned}
w_2[J] &= \frac{1}{2} w_1^2[J] \\
&\text{a) } + \frac{1}{2(3!)^2} \Delta_F(x_1, y_1) \Delta_F(x_1, y_2) \Delta_F(x_1, x_3) \Delta_F(x_1, x_2) \Delta_F(x_2, y_4) \\
&\quad \times \Delta_F(x_2, y_5) \Delta_F(x_2, y_6) J(y_1) J(y_2) J(y_3) J(y_4) J(y_5) J(y_6) \\
&\text{b) } + \frac{3}{2 \cdot 4!} \Delta_F(x_1, y_1) \Delta_F(x_1, y_2) \Delta_F^2(x_1, x_2) \Delta_F(x_2, y_3) \Delta_F(x_2, y_4) \\
&\quad \times J(y_1) J(y_2) J(y_3) J(y_4) \\
&\text{c) } + \frac{2}{4!} \Delta_F(x_1, y_1) \Delta_F(x_1, x_1) \Delta_F(x_1, x_2) \\
&\quad \times \Delta_F(x_2, y_2) \Delta_F(x_2, y_3) \Delta_F(x_2, y_4) J(y_1) J(y_2) J(y_3) J(y_4) \\
&\text{d) } + \frac{1}{8} \Delta_F(x_1, y_1) \Delta_F(x_1, x_1) \Delta_F(x_1, x_2) \Delta_F(x_2, x_2) \Delta_F(x_2, y_2) J(y_1) J(y_2) \\
&\text{e) } + \frac{1}{8} \Delta_F(x_1, y_1) \Delta_F^2(x_1, x_2) \Delta_F(x_2, x_2) \Delta_F(x_1, x_2) J(y_1) J(y_2) \\
&\text{f) } + \frac{1}{12} \Delta_F(x_1, y_1) \Delta_F^3(x_1, x_2) \Delta_F(x_2, y_2) J(y_1) J(y_2) \\
&\quad + J\text{-unabh. Terme, Integrale über alle } x_i, y_i
\end{aligned} \tag{2.14}$$

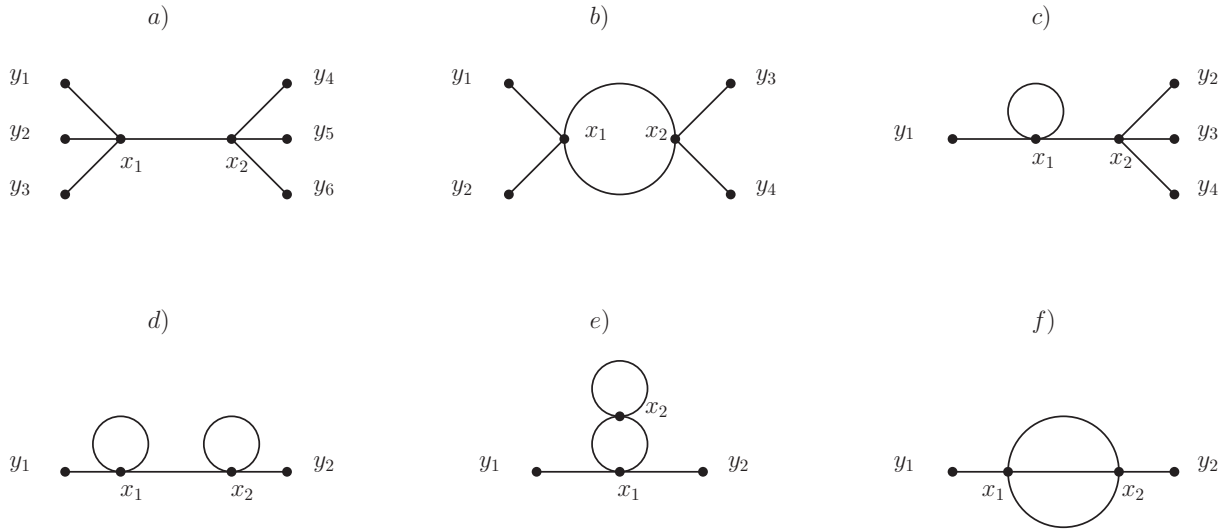


Diagramme a)-f): ergeben zusammenhängende Greenfunktionen

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}w_1^2 &= \frac{1}{2} \left[-\frac{1}{4!} \left(3 \text{ (two circles)} + 6 \text{ (circle with a dot)} + \text{ (cross)} \right) \right]^2 = \\
&= \frac{1}{2(4!)^2} \left(9 \text{ (two circles)} + 36 \text{ (circle with a dot)} + 6 \text{ (cross)} + \dots \right)
\end{aligned}$$

nicht zusammenhängende Beiträge zu Greenfunktionen

$$Z[J] = \frac{Z_0}{Z} A[J] \quad (2.15)$$

↑

$$\text{Normierungsfaktor, } J\text{-unabhängig, } Z[0] = 1, \quad A[0] \stackrel{!}{=} \frac{Z}{Z_0} \quad (2.16)$$

J -unabhängige Terme tragen nicht zu Greenfunktionen bei \Rightarrow Vakuumgraphen!

$$\begin{aligned}
\frac{Z}{Z_0} &= \frac{\int D\phi e^{-S}}{\int D\phi e^{-S_0}} \\
&= \frac{1}{Z_0} \int D\phi e^{-S_0} e^{-S - S_0} \\
&= \frac{1}{Z_0} \int D\phi \left(1 - \frac{\lambda}{4!} \int d^4x \phi^4(x) + \dots \right) e^{-S_0} \\
&= \frac{1}{Z_0} \int D\phi e^{-S_0} \\
&\quad - \frac{\lambda}{4!} \int d^4x_1 \dots d^4x_4 \delta^4(x_1 - x_2) \delta^4(x_1 - x_3) \delta^4(x_1 - x_4) \\
&\quad \times \frac{1}{Z_0} \int D\phi \phi(x_1) \dots \phi(x_4) e^{-S_0} + \dots
\end{aligned} \quad (2.17)$$

$O(\lambda)$ -Term:

$$\begin{aligned}
&\int d^4x_1 \dots d^4x_4 \delta^4(x_1 - x_2) \delta^4(x_1 - x_3) \delta^4(x_1 - x_4) \langle 0 | T\phi(x_1) \dots \phi(x_4) | 0 \rangle \\
&= \int d^4x_1 \dots d^4x_4 \delta^4(x_1 - x_2) \delta^4(x_1 - x_3) \delta^4(x_1 - x_4) \\
&\quad \times [\Delta_F(x_1 - x_2) \Delta_F(x_3 - x_4) + \Delta_F(x_1 - x_3) \Delta_F(x_2 - x_4) + \Delta_F(x_1 - x_4) \Delta_F(x_2 - x_3)] \\
&= 3 \int d^4x \Delta_F^2(x, x)
\end{aligned} \quad (2.18)$$

$$Z/Z_0 = 1 - \frac{1}{8} \text{ (two circles)} + \dots \quad (2.19)$$